Colles
corrigées et commentées

BCPST 1

Maths

*S'entraîner aux concours dès la **Sup***

Tancrède Huet
Antoine Humeau
Marie Le Verdier

ellipses

Colles

corrigées et commentées

BCPST1

Maths

Colles

corrigées et commentées

BCPST1

Maths

Tancrède Huet
professeur de mathématiques (appliquées) en classe préparatoire ECG1
au lycée Alexandre Dumas (Saint-Cloud)

Antoine Humeau
professeur de mathématiques (approfondies) en classe préparatoire ECG1
au lycée Alexandre Dumas (Saint-Cloud)

Marie Le Verdier
professeur de mathématiques en classe préparatoire BCPST1
au lycée Sainte-Geneviève (Versailles)

ellipses

ISBN 9782340-108585
Dépôt légal : septembre 2025
©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Les interrogations orales, également appelées colles, constituent une spécificité et une richesse de la classe préparatoire. Pendant une heure, le professeur interroge trois étudiants, faisant alterner temps de travail personnel et échange avec le colleur.

Ce dernier cherche d'abord à vérifier que le cours est assimilé, ainsi que les méthodes principales acquises. Il est également un interlocuteur privilégié pour les élèves qui, au travers d'exercices, approfondissent leur compréhension des notions, et perfectionnent la maîtrise de leurs diverses applications.

Ce sont ces exercices que nous proposons dans ce manuel pour la première année de classe préparatoire BCPST : tantôt classiques pour que l'étudiant puisse faire ses gammes, tantôt plus ardus ou originaux, qui seront l'occasion de réinvestir les méthodes du chapitre dans un cadre nouveau. Pour suivre cette progression, nous avons cherché, à l'intérieur de chaque chapitre et autant que faire se peut, à ordonner les exercices par ordre croissant de difficulté. Les chapitres correspondent quant à eux à ceux du programme, avec le même agencement.

Vous trouverez dans ce manuel à la fois les énoncés des exercices et leurs corrigés, mais également de nombreux commentaires. Ils ont pour but de faire des rappels de méthode, d'expliciter les difficultés habituelles rencontrées, bref de donner à l'élève toutes les indications qu'il recevrait dans le cadre d'une colle afin de tirer le plus grand profit de son étude.

Vous trouverez également quelques questions d'informatique, qui fournissent à la fois une illustration numérique des résultats, et préparent en même temps aux questions classiques qui peuvent être posées lors des concours.

Nous vous souhaitons une bonne lecture, et de belles années en classe préparatoire.

Sommaire

Chapitre 1.	**Logique, raisonnements et ensembles**	**7**
Chapitre 2.	**Nombres réels**	**17**
Chapitre 3.	**Trigonométrie**	**27**
Chapitre 4.	**Nombres complexes**	**41**
Chapitre 5.	**Calcul de sommes et produits**	**51**
Chapitre 6.	**Applications**	**63**
Chapitre 7.	**Dénombrement**	**71**
Chapitre 8.	**Suites réelles**	**83**
Chapitre 9.	**Fonctions usuelles**	**95**
Chapitre 10.	**Calcul de dérivées et de primitives**	**107**
Chapitre 11.	**Équations différentielles**	**117**
Chapitre 12.	**Systèmes linéaires**	**127**
Chapitre 13.	**Matrices**	**141**
Chapitre 14.	**Géométrie**	**159**
Chapitre 15.	**Statistique descriptive**	**171**
Chapitre 16.	**Polynômes**	**181**
Chapitre 17.	**Limites et continuité**	**193**
Chapitre 18.	**Dérivation**	**209**

Chapitre 19. **Intégration** **221**

Chapitre 20. **Développements Limités** **233**

Chapitre 21. **Fonctions de deux variables** **245**

Chapitre 22. **Espaces vectoriels** **261**

Chapitre 23. **Applications linéaires** **273**

Chapitre 24. **Probabilités** **285**

Chapitre 25. **Variables aléatoires finies** **297**

Chapitre 1. Logique, raisonnements et ensembles

Exercice 1

Montrer qu'il n'existe pas d'entier à la fois pair et impair.

Commentaire

Une idée aussi absurde qu'un entier à la fois pair et impair appelle un raisonnement par... l'absurde.

Supposons par l'absurde qu'il existe un tel entier $n \in \mathbb{Z}$. Puisque n est pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. Puisque n est également impair, il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k' + 1$.
On a alors $2k = 2k' + 1$ d'où $2k - 2k' = 1$ *i.e.* $2(k - k') = 1$. Alors 1 serait divisible par 2 bien qu'impair, d'où une contradiction.
Il n'existe donc pas de nombre entier qui soit à la fois pair et impair.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^{\circ n} = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (composée de n fonctions f successives).
Déterminer $f^{\circ 2}$ et $f^{\circ 3}$, en déduire une conjecture sur l'expression de $f^{\circ n}$ puis prouver cette conjecture.

Commentaire

Même si on ne sait pas a priori quelle formule on va trouver, ce sera une formule en fonction de $n \in \mathbb{N}$, ce qui fait immédiatement penser à une récurrence.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f^{\circ 2}(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{1 + x^2}) = \sqrt{1 + (\sqrt{1 + x^2})^2} = \sqrt{1 + 1 + x^2} = \sqrt{2 + x^2}$$

et :

$$f^{\circ 3}(x) = f(f^{\circ 2}(x)) = f(\sqrt{2 + x^2}) = \sqrt{1 + (\sqrt{2 + x^2})^2} = \sqrt{1 + 2 + x^2} = \sqrt{3 + x^2}.$$

On conjecture alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f^{\circ n}(x) = \sqrt{n + x^2}$. On va montrer cette propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}, f^{\circ n}(x) = \sqrt{n+x^2}$. Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}, f^{\circ(n+1)}(x) = \sqrt{n+1+x^2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f^{\circ(n+1)}(x) &= f\left(f^{\circ n}(x)\right) \\ &= f(\sqrt{n+x^2}) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \sqrt{1+(\sqrt{n+x^2})^2} \\ &= \sqrt{1+n+x^2}, \end{aligned}$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f^{\circ n}(x) = \sqrt{n+x^2}.}$$

Exercice 3

Soit E un ensemble et A, B, C trois sous-ensembles de E. Montrer que :

$$(A \cap B \subset A \cap C \text{ et } A \cup B \subset A \cup C) \implies B \subset C.$$

Commentaire

On part sur une preuve classique par implication d'appartenance : montrer que $x \in B$ appartient aussi à C. Pour faire le lien avec le troisième sous-ensemble A, on pense à distinguer les cas selon que x soit dans A ou non.

Supposons que $A \cap B \subset A \cap C$ et $A \cup B \subset A \cup C$.
Prenons $x \in B$ et montrons que $x \in C$. Distinguons les cas suivant l'appartenance ou non de x à A.

Cas 1 : si $x \in A$ Puisque $x \in B$, on a $x \in A \cap B$. Or $A \cap B \subset A \cap C$ d'où $x \in A \cap C$, puis $x \in C$.

Cas 2 : $x \notin A$ Puisque $x \in B$, on a $x \in A \cup B$. Or $A \cup B \subset A \cup C$ d'où $x \in A \cup C$. Or $x \notin A$, ce qui nous donne $x \in C$.

Dans tous les cas, $x \in C$, d'où $\boxed{B \subset C.}$

Exercice 4

Soit $n+1$ nombres réels $x_0, x_2, \ldots, x_n$ qui vérifient l'inégalité :

$$0 \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n \leqslant 1.$$

Montrer qu'il y a au mons deux x_i consécutifs qui sont distants d'au plus $\dfrac{1}{n}$.

Commentaire

Puisque le résultat à démontrer dépend uniquement de n, on peut être tenté par une récurrence. Même si cele peut fonctionner, ce n'est pas la méthode la plus efficace.

On s'apperçoit que l'assertion contraire à celle de l'énoncé est assez contraignante, puisqu'elle porte sur tous les x_i. Ceci invite à envisager un raisonnement par l'aburde.

Formellement, on doit montrer l'assertion suivante :

$$\exists i \in [\![0\,;n-1]\!], x_{i+1} - x_i \leqslant \frac{1}{n}.$$

On va montrer ce résultat par l'absurde. Supposons donc l'assertion contraire *i.e.* :

$$\forall i \in [\![0\,;n-1]\!], x_{i+1} - x_i > \frac{1}{n}.$$

Si on additionne ces n égalités strictes, on obtient :

$$(\cancel{x_1} - x_0) + (\cancel{x_2} - \cancel{x_1}) + \cdots + (\cancel{x_{n-1}} - \cancel{x_{n-2}}) + (x_n - \cancel{x_{n-1}}) > n \times \frac{1}{n}.$$

Après simplification, ceci nous donne $x_n - x_0 > 1$. Or $0 \leqslant x_0 \leqslant x_n \leqslant 1$ d'où $x_n - x_0 \leqslant 1$. On a alors une contradiction.

Par conséquent, il y a au moins deux x_i consécutifs qui sont distants d'au plus $\frac{1}{n}$.

Exercice 5

On note A l'ensemble des fonctions affines réelles et B l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables pour lesquelles $f(0) = f'(0) = 0$.

Montrer que toute fonction dérivable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction de A et d'une fonction de B.

Commentaire

Les exercices de ce type où l'on cherche une décomposition (unique ou non d'un objet) se font par analyse-synthèse. On suppose dans la phase d'analyse que la décomposition existe pour chercher des conditions sur cette décomposition. Une fois ces conditions trouvées, on vérifie qu'elles conviennent dans la phase de synthèse.

On va raisonner par analyse-synthèse.

Analyse : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$. Puisque a est affine, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}, a(x) = \lambda x + \mu$.

On a d'une part $f(0) = a(0) + b(0) = \lambda \times 0 + \mu + b(0) = \mu$ car $b \in B$.

D'autre part f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables avec $f'(x) = (\lambda x + \mu)' + b'(x) = \lambda + b'(x)$ d'où $f'(0) = \lambda$ car $b \in B$.

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}, a(x) = f'(0)x + f(0)$ et $b(x) = f(x) - a(x)$.

Synthèse : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si on se donne, sur $\mathbb{R}$, les fonctions a et b définies par $a(x) = f'(0)x + f(0)$ et $b(x) = f(x) - a(x)$.

Clairement, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = a(x) + b(x)$. Tout aussi clairement, a est une fonction affine *i.e.* $a \in A$.

De plus, b est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions dérivables avec $b'(x) = f'(x) - (f'(0)x+f(0))' = f'(x)-f'(0)$. Ceci nous donne d'une part $b(0) = f(0)-a(0) = f(0)-f(0) = 0$ et d'autre part $b'(0) = f'(0) - f'(0) = 0$. On a donc $b \in B$.

Pour toute fonction dérivable f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe donc $a \in A$ et $b \in B$ tels que $f = a + b$.

De plus, a et b sont uniques car entièrement déterminées par les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.

Exercice 6

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

Indication : On pourra développer l'expression $\left(x^{n+1} + \dfrac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

On calcule :

$$\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+2} + x^n + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n+2}} = \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}}\right).$$

Commentaire

Le calcul effectué nous permet de relier notre expression aux rangs $n, n+1$ et $n+2$, ce qui nous amène tout naturellement à considérer un raisonnement par récurrence double.

On va donc montrer la propriété $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence double.

Initialisation : On a d'une part $x^0 + \dfrac{1}{x^0} = 1 + 1 = 2 \in \mathbb{Z}$ et d'autre part $x^1 + \dfrac{1}{x^1} = x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ par hypothèse de l'énoncé.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ et tel que $x^{n+1} + \dfrac{1}{x^{n+1}} \in \mathbb{Z}$. Montrons que $x^{n+2} + \dfrac{1}{x^{n+2}} \in \mathbb{Z}$. D'après le calcul préliminaire, on a :

$$x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} = \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right).$$

Puisque $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ et $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$, on a donc $x^{n+2} + \dfrac{1}{x^{n+2}} \in \mathbb{Z}$.

Conclusion : Par le principe de récurrence double, on a donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{Z}, x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}.}$

Exercice 7

Déterminer toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) = f(x) + f(y).$$

Commentaire

Ce type d'équation, appelé « équation fonctionnelle » se résout toujours par analyse-synthèse. Dans la phase d'analyse on cherche des informations sur f en testant d'abord certaines valeurs (souvent 0 ou 1) dans l'équation fonctionnelle puis en cherchant l'expression générale de $f(x)$. On vérifie ensuite cette expression dans la phase de synthèse.

On va raisonner par analyse synthèse :

Analyse : Soit f une application de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = f(x) + f(y)$.

Commençons par regarder cette égalité pour $x = y = 0$: on a $f(0)f(0) = f(0) + f(0)$ puis $f(0)^2 - 2f(0) = 0$ d'où $f(0)(f(0) - 2) = 0$. On a donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 2$.

Si $f(0) = 0$, prenons $x \in \mathbb{R}$ quelconque et 0 et réappliquons notre égalité fonctionnelle. On a alors $f(0)f(x) = f(0) + f(x)$, soit $0 = f(x)$. f est alors la fonction nulle.

Si $f(0) = 2$, prenons $x \in \mathbb{R}$ quelconque et 0 et réappliquons notre égalité fonctionnelle. On a alors $f(0)f(x) = f(0) + f(x)$ d'où $2f(x) = 2 + f(x)$ soit $f(x) = 2$. f est alors la fonction constante égale à 2.

f est donc soit la fonction nulle, soit la fonction constante égale à 2.

Synthèse : Soit f qui est soit la fonction nulle, soit la fonction constante égale à 2.

Si f est la fonction nulle, on a, pour tout $x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = 0 = f(x) + f(y)$.

Si f est l'application constante égale à 2, on a, pour tout $x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = 4 = f(x)+f(y)$.

Dans les deux cas, f vérifie l'égalité fonctionnelle.

Les solutions de notre problème sont donc les fonctions $x \mapsto 0$ et $x \mapsto 2$.

Exercice 8

Montrer que si $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier impair λ_n (qui dépend donc de n) tel que $5^{2^n} = 1 + \lambda_n 2^{n+2}$.

Commentaire

On a ici clairement un exercice qui se fait par récurrence. La difficulté principale, dans la phase d'hérédité, consiste à appliquer rigoureusement les règles des puissances : $5^{2^{n+1}}$ vaut $5^{2\times 2^n}$ et pas $5^2 \times 5^{2^n}$.

On va montrer la propriété demandée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $5^{2^0} = 5^1 = 5$. En posant $\lambda_0 = 1$, qui est bien un nombre impair, on a $5 = 1 + \lambda_0 2^2$, d'où $5 = 1 + \lambda_0 2^{0+2}$.

Initialisation : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe un entier impair λ_n tel que $5^{2^n} = 1 + \lambda_n 2^{n+2}$. Montrons qu'il existe un entier impair λ_{n+1} tel que $5^{2^{n+1}} = 1 + \lambda_{n+1} 2^{n+3}$. On a :

$$\begin{aligned} 5^{2^{n+1}} &= 5^{2\times 2^n} = \left(5^{2^n}\right)^2 \\ &= \left(1 + \lambda_n 2^{n+2}\right)^2 \\ &= 1^2 + 2 \times 1 \times \lambda_n 2^{n+2} + \left(\lambda_n 2^{n+2}\right)^2 \\ &= 1 + \lambda_n 2^{n+3} + \lambda_n^2 2^{2n+4} \\ &= 1 + \left(1 + \lambda_n 2^{n+1}\right) \lambda_n 2^{n+3}. \end{aligned}$$

Puisque λ_n est un nombre impair, $\lambda_n 2^{n+1}$ est également un nombre impair. On en déduit que $1 + \lambda_n 2^{n+1}$ est un nombre pair, puis que $\left(1 + \lambda_n 2^{n+1}\right) \lambda_n$ est un nombre impair.

Si on pose $\lambda_{n+1} = \left(1 + \lambda_n 2^{n+1}\right) \lambda_n$, on a donc $5^{2^{n+1}} = 1 + \lambda_{n+1} 2^{n+3}$ où λ_{n+1} est un nombre impair.

Conclusion : Par le principe de récurrence, on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \exists \lambda \in \mathbb{Z} \text{ avec } \lambda \text{ impair tel que } 5^{2^n} = 1 + \lambda_n 2^{n+2}.}$$

Exercice 9

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe des entiers $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p(2q+1)$.
Indication : On raisonnera par récurrence forte pour l'hypothèse :

$$\mathcal{P}(n) : \exists p, q \in \mathbb{N}, n = 2^p(2q+1).$$

Commentaire

La décomposition recherchée, sous la forme du produit d'une puissance de 2 avec un nombre impair invite, dans la phase d'hérédité à distinguer les cas $n+1$ pair et $n+1$ impair.

On va montrer par récurrence forte, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'assertion suivante :

$$\mathcal{P}(n) : \exists p, q \in \mathbb{N}, n = 2^p(2q+1).$$

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $2^0(2 \times 0 + 1) = 1$. $p = q = 0$ conviennent donc et $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!], \mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On va distinguer les cas selon la parité de $n+1$.

Si $n+1$ est pair, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n+1 = 2k$. On a alors $k \in [\![1\,;n]\!]$ et, par hypothèse de récurrence, il existe $r, s \in \mathbb{N}$ tels que $k = 2^r(2s+1)$ d'où :

$$n+1 = 2k = 2 \times 2^r(2s+1) = 2^{r+1}(2s+1).$$

En posant $p = r+1$ et $q = s$, on a donc la décomposition souhaitée.

Si $n+1$ est impair, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n+1 = 2k+1 = 2^0(2k+1)$. En posant $p = 0$ et $q = k$, on a donc la décomposition souhaitée.

Dans tous les cas on peut ainsi écrire $n+1$ sous la forme souhaitée.

Conclusion : Par le principe de récurrence forte $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'existence de $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p(2q+1)$.

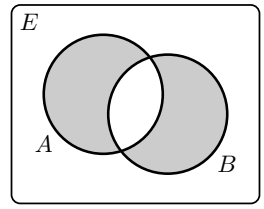
Exercice 10

Soit E un ensemble et A, B deux parties de E. On appelle *différence symétrique* l'ensemble $A\Delta B$ défini par :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Visualiser cette nouvelle opération ensembliste à l'aide d'un diagramme de Venn (patatoïde).
2. À quel connecteur logique (non vu en cours mais facilement devinable) correspond cette opération ensembliste ? Donner sa table de vérité.
3. Calculer $A\Delta A$ et $A\Delta\varnothing$.
4. Montrer que $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
5. Montrer que $(A\Delta B) \cap C \subset A\Delta(B \cap C)$. L'inclusion réciproque est-elle toujours vraie ?

1.



$A\Delta B$

2. L'opération ensembliste Δ correspond au connecteur logique SOIT ou OU EXCLUSIF que l'on notera XOR.
Si P et Q sont deux assertions, $P \operatorname{XOR} Q$ est vraie si et seulement si une seule des deux assertions P et Q est vraie. Autrement dit, on a la table de vérité suivante :

P	Q	$P \operatorname{XOR} Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

3. On a :

$$A\Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A \boxed{= \varnothing}$$

et

$$A\Delta\varnothing = (A \cup \varnothing) \setminus (A \cap \varnothing) = A \setminus \varnothing \boxed{= A.}$$

4.

> **Commentaire**
> Dans cette question, il faut appliquer avec rigueur les règles de calcul sur les parties d'un ensemble pour passer d'une expression de $A\Delta B$ à l'autre.

On a :

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \\ &= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) \\ &= \varnothing \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup \varnothing \\ &\boxed{= (A \setminus B) \cup (B \setminus A).} \end{aligned}$$

5.

> **Commentaire**
> Pour la preuve d'inclusion directe, il faut utiliser le connecteur logique associé à Δ pour exprimer de manière détaillée l'appartenance d'un élément à $A\Delta B$ dans le raisonnement.

Soit $x \in (A\Delta B) \cap C$; montrons que $x \in A\Delta(B \cap C)$. On a $x \in C$ et, soit $x \in A$, soit $x \in B$ (mais jamais $x \in A \cap B$). Effectuons une disjonction de cas.
Si $x \in A$, on a $x \notin B$ d'où $x \notin B \cap C$. On a donc $x \in A\Delta(B \cap C)$.
Si $x \in B$, on a $x \notin A$. Puisque $x \in C$, on a $x \in B \cap C$. On en déduit que $x \in A\Delta(B \cap C)$.
Dans tous les cas, $x \in A\Delta(B \cap C)$. On en déduit que $\boxed{(A\Delta B) \cap C \subset A\Delta(B \cap C).}$

Commentaire

Pour vérifier si l'inclusion réciproque est vraie, il faut la tester sur de petits exemples (des ensembles à un, deux ou trois élément). Cela permet de voir assez vite si quelque chose cloche et d'obtenir ainsi un contre-exemple.

L'inclusion réciproque n'est pas vraie en générale. En effet, dans $\mathbb{N}$, prenons $A = \{0\,;1\,;3\}$ $B = \{0\,;2\}$ et $C = \{0\,;3\}$.
On a d'une part :

$$(A\Delta B) \cap C = (\{0\,;1\,;3\}\Delta\{0\,;2\}) \cap \{0\,;3\} = \{1\,;2\} \cap \{0\,;3\} = \varnothing$$

et d'autre part :

$$A\Delta(B \cap C) = \{0\,;1\,;3\}\Delta(\{0\,;2\} \cap \{0\,;3\}) = \{0\,;1\,;3\}\Delta\{0\} = \{1\,;3\}.$$

On a ici $(A\Delta B) \cap C \subset A\Delta(B \cap C)$ mais $A\Delta(B \cap C) \not\subset (A\Delta B) \cap C$.

Exercice 11

Soit E un ensemble non vide. On dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole sur E si :
- $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$;
- $E \in \mathcal{A}$;
- $X \in \mathcal{A} \implies \overline{X} \in \mathcal{A}$;
- $(X \in \mathcal{A} \text{ ET } Y \in \mathcal{A}) \implies X \cup Y \in \mathcal{A}$.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par intersection, c'est à dire :

$$\forall X, Y \in \mathcal{A}, X \cap Y \in \mathcal{A}.$$

2. Quelles sont les deux algèbres de Boole les plus simples que l'on puisse poser sur E ?

3. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole sur E et B une partie de E. Montrer que $\mathcal{B} = \{A \cap B \mid A \in \mathcal{A}\}$ est une algèbre de Boole sur B.

1.

Commentaire

Puisqu'on dispose ici de la stabilité par passage au complémentaire et à l'union, il faut penser à la loi de Morgan $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Soit $X, Y \in \mathcal{A}$. On a $\overline{X} \in \mathcal{A}$ et $\overline{Y} \in \mathcal{A}$, puis $\overline{X} \cup \overline{Y} \in \mathcal{A}$, par stabilité de $\mathcal{A}$ par passage à l'union. Par stabilité de $\mathcal{A}$ par passage au complémentaire, on en déduit $\overline{\overline{X} \cup \overline{Y}} \in \mathcal{A}$ soit, par la loi de Morgan, $X \cap Y \in \mathcal{A}$.

2. Une première possibilité est $\mathcal{A} = (\varnothing, E)$.
En effet, on a $(\varnothing, E) \subset \mathcal{P}(E)$ et $E \in (\varnothing, E)$. De plus $\overline{\varnothing} = E \in (\varnothing, E)$ et $\overline{E} = \varnothing \in (\varnothing, E)$. Enfin, $E \cup E = E \in (\varnothing, E), \varnothing \cup \varnothing = \varnothing \in (\varnothing, E)$ et $\varnothing \cup E = E \in (\varnothing, E)$.

Une deuxième possibilité est $\boxed{\mathcal{A} = \mathcal{P}(E).}$
En effet, on a tout d'abord $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$. Ensuite, pour $X \in \mathcal{P}(E)$, on a $\overline{X} \in \mathcal{P}(E)$. Enfin, si $X, Y \in \mathcal{P}(E)$, on a $X \cup Y \in \mathcal{P}(E)$.
3. Puisque, pour tout $A \in \mathcal{A}, A \cap B \subset B$ *i.e.* $A \cap B \in \mathcal{P}(B)$, on a $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(B)$.
Ensuite, puisque $E \in \mathcal{A}$, on a $E \cap B = B \in \mathcal{B}$.
Soit maintenant $X \in \mathcal{B}$. Il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $X = A \cap B$. On a alors :

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \overline{A \cap B} \cap B = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap B \\ &= (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap B) = \overline{A} \cap B\end{aligned}$$

Puisque $A \in \mathcal{A}$, on a, par stabilité par passage au complémentaire, $\overline{A} \in \mathcal{A}$, d'où $\overline{X} = \overline{A} \cap B \in \mathcal{B}$.
Soit enfin $X, Y \in \mathcal{B}$. Il existe $A, A' \in \mathcal{A}$ tels que $X = A \cap B$ et $Y = A' \cap B$. On a alors :

$$X \cup Y = (A \cap B) \cup (A' \cap B) = (A \cup A') \cap B.$$

Par stabilité de $\mathcal{A}$ par passage à l'union, on a $A \cup A' \in \mathcal{A}$, d'où $X \cup Y = (A \cup A') \cap B \in \mathcal{B}$.
On a ainsi bien vérifié que $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une algèbre de Boole sur } B.}$

Chapitre 2. Nombres réels

Exercice 1

Montrer que pour tous réels x et y :

$$\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2} \text{ et } \max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}.$$

On distingue deux cas :

Premier cas : On suppose que $x \leqslant y$. Alors $\min(x,y) = x$ et

$$\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-(y-x)}{2} = x.$$

Par ailleurs, $\max(x,y) = y$ et

$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+(y-x)}{2} = y.$$

Second cas : On suppose que $x > y$. Alors $\min(x,y) = y$ et

$$\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-(x-y)}{2} = y.$$

Par ailleurs, $\max(x,y) = x$ et

$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+(x-y)}{2} = x.$$

Dans tous les cas, les expressions coïncident. On a donc bien :

$$\boxed{\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2} \text{ et } \max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}.}$$

Exercice 2

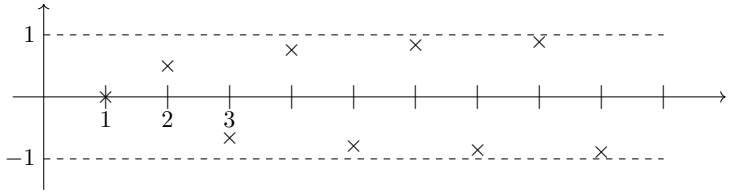
Montrer que l'ensemble suivant admet une borne inférieure et une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. S'agit-il de minimum, de maximum ?

$$A = \left\{ (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Pour $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant 1 - \dfrac{1}{n} \leqslant 1$ et donc

$$-1 \leqslant (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leqslant 1.$$

La partie A est donc non vide et bornée, donc A admet une borne inférieure et une borne supérieure.



Montrons que 1 est la borne supérieure de A et -1 sa borne inférieure.

Commentaire

Pour montrer que 1 est la borne supérieure de A, il faut montrer deux choses :

- 1 est un majorant de A (ça on l'a déjà fait),
- 1 est le plus petit des majorants de A : cela signifie que si $\varepsilon > 0$, $1-\varepsilon$ n'est plus un majorant de A, c'est à dire qu'il existe $y \in A$ vérifiant $1 - \varepsilon < y$.

Cela revient à montrer que :

$$\begin{cases} \forall y \in A,\ y \leqslant 1 \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in A,\ 1 - \varepsilon < y \leqslant 1. \end{cases}$$

Pour la borne inférieure, on a quelque chose d'analogue.

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. En particulier,

$$\frac{1}{N+1} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Si N est pair : d'une part $(-1)^N \left(1 - \dfrac{1}{N}\right) = 1 - \dfrac{1}{N} > 1 - \varepsilon$ et d'autre part

$$(-1)^{N+1} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = -1 + \frac{1}{N+1} < -1 + \varepsilon.$$

Si N est impair : d'une part $(-1)^N \left(1 - \dfrac{1}{N}\right) = -1 + \dfrac{1}{N} < -1 + \varepsilon$ et d'autre part

$$(-1)^{N+1} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} > 1 - \varepsilon.$$

Dans les deux cas, il existe donc $x \in A$ et $y \in A$ tels que

$$-1 \leqslant x < -1+\varepsilon \quad \text{et} \quad 1-\varepsilon < y \leq 1.$$

On a montré que :

$$\begin{cases} \forall y \in A,\ y \leqslant 1 \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in A,\ 1-\varepsilon < y \leqslant 1. \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall y \in A,\ y \geqslant -1 \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in A,\ -1 \leqslant y < -1+\varepsilon. \end{cases}$$

On en déduit que $\boxed{\inf A = -1 \text{ et } \sup A = 1.}$
Par ailleurs, pour $n \geqslant 1$, on a $\left|(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| = 1-\frac{1}{n} < 1$. Donc $-1 \notin A$ et $1 \notin A$. On en déduit que $\boxed{A \text{ n'a ni minimum ni maximum.}}$

Exercice 3

Soit f une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$. On suppose que f est croissante. On note A l'ensemble :

$$A = \{x \in [0;1],\ x \leqslant f(x)\}.$$

1. Montrer que A possède une borne supérieure, notée a.
2. En déduire que $a \leqslant f(a)$.
3. Montrer que $a \geqslant f(a)$. En déduire que l'équation $f(x) = x$ possède au moins une solution.
4. On vient de montrer que toute fonction croissante sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ possède au moins un point fixe (l'équation $f(x) = x$ possède au moins une solution). Ce résultat reste-t-il vrai si f est décroissante ?
5. Dans cette dernière question, on modifie les hypothèses : on suppose que la fonction f est continue sur $[0;1]$ à valeurs dans $[0;1]$ (on ne suppose rien sur la monotonie de f sur $[0;1]$). Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0;1]$.

1. On a $0 \in A$ car $0 \leqslant f(0)$. Or A est majorée par 1. Donc A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ donc $\boxed{A \text{ possède une borne supérieure.}}$
2. Soit $\varepsilon > 0$. Comme a est une borne supérieure, il existe $x \in A$ tel que $a-\varepsilon < x \leqslant a$. Comme $x \in A$, on a $f(x) \geqslant x$. Comme f est croissante et que $x \leq a$, on a $f(x) \leqslant f(a)$. En combinant ces relations, on obtient $a-\varepsilon < x \leqslant f(x) \leqslant f(a)$ donc $a-\varepsilon < f(a)$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit $\boxed{a \leqslant f(a).}$

Commentaire

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $a - \varepsilon < b$. Montrons alors que $a \leqslant b$. Si par l'absurde on avait $a > b$ alors en prenant $\varepsilon = a - b > 0$, on obtiendrait :

$$b = a - (a-b) = a - \varepsilon < b$$

donc $b < b$, ce qui est absurde, donc $a \leqslant b$.

3. Raisonnons par l'absurde et supposons $a < f(a)$. Alors $f(a) \leqslant f(f(a))$ car f est croissante. Donc $f(a) \in A$. Mais alors, comme $a < f(a)$, cela contredit le fait que a est un majorant (la borne supérieure est un majorant) de A.
Ainsi donc $\boxed{a \geqslant f(a)}$. Combiné au résultat précédent, cela donne $f(a) = a$ et $a \in [0,1]$. Donc $\boxed{\text{l'équation } f(x) = x \text{ possède au moins une solution.}}$

4. Définissons $f : [0,1] \to [0,1]$ par $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ pour $x \in]0,1]$. Alors f est décroissante, mais par construction, $f(x) \neq x$ pour tout $x \in [0,1]$.

$\boxed{\text{Le résultat de la question précédente n'est plus vrai si l'on suppose } f \text{ décroissante.}}$

5. La fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $[0,1]$ par différence de telles fonctions et $g(0) = f(0) - 0 \geqslant 0$, $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ par hypothèse. On en déduit par le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $c \in [0;1]$ tel que $g(c) = 0$ c'est-à-dire $f(c) - c = 0$ *i.e* $\boxed{f(c) = c.}$

Exercice 4

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie bornée et non vide et soit $B = \{-x,\ x \in A\}$. Montrer que

$$\sup A = -\inf B.$$

D'abord, comme A est bornée et non vide, A admet une borne supérieure que l'on note M et une borne inférieure que l'on note m. On a donc :

$$\forall x \in A,\ m \leqslant x \leqslant M \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in A,\ M - \varepsilon < y \leqslant M, \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists z \in A,\ m \leqslant z < m + \varepsilon. \end{cases}$$

Commentaire
La partie B est *symétrique* de A par rapport à 0 sur la droite des réels. Un majorant de A, par symétrie (multiplication par -1) deviendra un minorant de B.

En multipliant toutes ces inégalités par -1, on obtient :

$$\forall x \in A,\ -m \geqslant -x \geqslant M \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in A,\ -M + \varepsilon > -y \geqslant -M, \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists z \in A,\ m \geqslant -z > -m - \varepsilon. \end{cases}$$

Ou encore :

$$\forall x' \in B,\ -m \geqslant x' \geqslant M \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists y' \in B,\ -M + \varepsilon > y' \geqslant -M, \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists z' \in B,\ m \geqslant z' > -m - \varepsilon. \end{cases}$$

Ce qui signifie que $-M = \inf B$, c'est-à-dire $\boxed{\sup A = -\inf B.}$

Exercice 5

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $|x| = -2$,
2. $|2x+3| = |6x-1|$,
3. $\left\lfloor x^2 \right\rfloor = 4$,
4. $1 \leqslant \left\lfloor x^2 - 2 \right\rfloor \leqslant 6$.

1. Comme $|x| \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors l'équation $|x| = -2$ n'a pas de solution.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|2x+3| = |6x-1| \iff \begin{cases} 2x+3 = 6x-1 \\ \text{ou} \\ 2x+3 = -(6x-1) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 4x = 4 \\ \text{ou} \\ 8x = -2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions réelles de l'équation $|2x+3| = |6x-1|$ est $\left\{-\frac{1}{4}, 1\right\}$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\left\lfloor x^2 \right\rfloor = 4 \iff 4 \leqslant x^2 < 5 \iff x \in]-\sqrt{5}, -2] \cup [2, \sqrt{5}[.$$

L'ensemble des solutions réelles de l'équation $\left\lfloor x^2 \right\rfloor = 4$ est $]-\sqrt{5}, -2] \cup [2, \sqrt{5}[$.

4. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 1 \leqslant \left\lfloor x^2 - 2 \right\rfloor \leqslant 6 &\iff \left\lfloor x^2 - 2 \right\rfloor \in \{1,2,3,4,5,6\} \\ &\iff 1 \leqslant x^2 - 2 < 7 \\ &\iff 3 \leqslant x^2 < 9 \\ &\iff x \in]-3, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 3[. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $1 \leqslant \left\lfloor x^2 - 2 \right\rfloor \leqslant 6$ est $]-3, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 3[$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \frac{1}{2}|2x-3| - \frac{1}{3}|x+4|$.

1. Donner l'expression de $f(x)$ sans valeurs absolues, suivant les valeurs de x.

2. Dresser le tableau des variations de f. En déduire les minima et maxima de f (locaux et globaux).

3. Dessiner la courbe de f.

1. La quantité $2x-3$ change de signe en $x = \frac{3}{2}$ et la quantité $x+4$ change de signe en $x = -4$, on étudie donc l'expression de f sur trois intervalles :

$$]-\infty;-4], \quad \left]4;\frac{3}{2}\right], \quad \left]\frac{3}{2};+\infty\right[.$$

x	$-\infty$		-4		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
expression de $\lvert 2x-3\rvert$	$-2x+3$		$-2x+3$	0	$2x-3$		
expression de $\lvert x+4\rvert$	$-x-4$	0	$x+4$		$x+4$		

Ainsi :

- Si $x \leqslant -4$:

$$f(x) = \frac{1}{2}|2x-3| - \frac{1}{3}|x+4| = \frac{1}{2}(-2x+3) + \frac{1}{3}(x+4) = -\frac{2}{3}x + \frac{17}{6}.$$

- Si $-4 < x \leqslant \frac{3}{2}$:

$$f(x) = \frac{1}{2}|2x-3| - \frac{1}{3}|x+4| = \frac{1}{2}(-2x+3) - \frac{1}{3}(x+4) = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{6}.$$

- Si $x > \frac{3}{2}$:

$$f(x) = \frac{1}{2}|2x-3| - \frac{1}{3}|x+4| = \frac{1}{2}(2x-3) - \frac{1}{3}(x+4) = \frac{2}{3}x - \frac{17}{6}.$$

f est ce qu'on appelle une fonction affine par morceaux :

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{17}{6} & \text{si } x \leqslant -4 \\ -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{6} & \text{si } -4 < x \leqslant \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{2}{3}x - \dfrac{17}{6} & \text{si } \dfrac{3}{2} < x. \end{cases}$$

2. Étudions f sur chacun des trois intervalles :

- Sur l'intervalle $]-\infty; 4]$, f est décroissante (coefficient directeur négatif) et :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{2}{3}x + \frac{17}{6} = +\infty.$$

  On a par ailleurs $f(-4) = \dfrac{33}{6} = \dfrac{11}{2}$.
- Sur l'intervalle $\left]4; \dfrac{3}{2}\right]$, f est décroissante et $f(-4) = \dfrac{11}{2}$ et $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{11}{6}$.
- Sur l'intervalle $\left]\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$: f est croissante et $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{11}{6}$ et

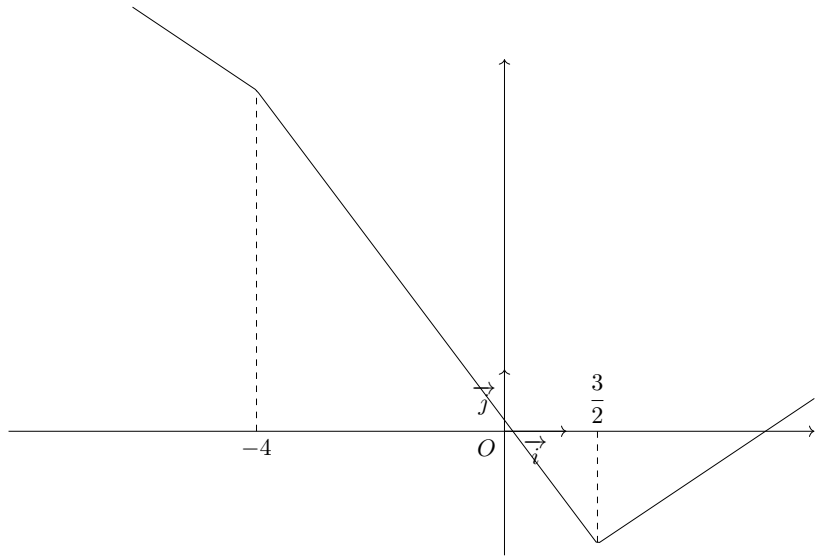
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3}x - \frac{17}{6} = +\infty.$$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-4		$\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	↘	$\dfrac{11}{2}$	↘	$-\dfrac{11}{6}$	↗	$+\infty$

Donc f n'admet pas de maximum (ni global, ni local) et admet un minimum qui est local et global : il est atteint en $x = \dfrac{3}{2}$ et vaut $-\dfrac{11}{6}$.

3. f étant une fonction affine par morceaux, sa représentation graphique est la "concaténation" de trois droites (en fait, un segment et deux demi-droites) :



Exercice 7

Montrer que, pour tous x et y réels,

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a par définition,

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{et} \quad \lfloor y \rfloor \leqslant y < \lfloor y \rfloor + 1.$$

Donc en sommant les inégalités de gauche on obtient $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant x + y$. On sait que la fonction $t \mapsto \lfloor t \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $\lfloor \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor$, c'est à dire

$$\boxed{\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor.}$$

On a par ailleurs $\lfloor x + y \rfloor \leqslant x + y$ et comme $x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $y \leqslant \lfloor y \rfloor + 1$, on a $x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$ et donc

$$\lfloor x + y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2.$$

Mais les deux termes de cette inégalité sont des entiers donc, finalement

$$\boxed{\lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2 - 1 = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.}$$

Commentaire

Pour deux entiers $a, b \in \mathbb{Z}$, on a $a < b \iff a \leqslant b - 1$.

Exercice 8

Montrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel non nul n,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \geqslant 1$.

- D'une part, on a par définition :

$$\lfloor nx \rfloor \leqslant nx < \lfloor nx \rfloor + 1.$$

Il s'ensuit $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x$. Et comme $t \mapsto \lfloor t \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor .$$

- D'autre part, on a :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Donc $n\lfloor x \rfloor \leq nx$ (car $n > 0$) et il s'ensuit que $\lfloor n\lfloor x \rfloor \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor$. Comme $n\lfloor x \rfloor$ est entier, on a $n\lfloor x \rfloor = \lfloor n\lfloor x \rfloor \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor$. Ainsi $\lfloor x \rfloor \leq \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ et donc vient $\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor \leq \left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$. On en déduit :

$$\lfloor x \rfloor \leq \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor .$$

Par double inégalité on a

$$\boxed{\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.}$$

Exercice 9

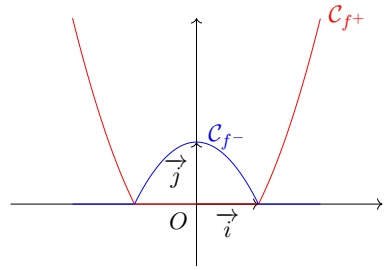
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les fonctions $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$.
1. Si $f : x \mapsto x^2 - 1$, représenter graphiquement f^+ et f^-.
2. Montrer que $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1 \leqslant 0$ si et seulement si $x \in [-1, 1]$. On déduit l'expression de f^- et de f^+ selon deux cas :

Premier cas : Si $x \in [-1, 1]$ alors $f^+(x) = 0$ et $f^-(x) = 1 - x^2$.

Second cas : Si $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ alors $f^+(x) = x^2 - 1$ et $f^-(x) = 0$.

On déduit alors les courbes de f^- et de f^+ en fonction de la courbe de f ou de sa symétrique, $-f$, par rapport à l'axe des abscisses :



2. On distingue deux cas sur $x \in \mathbb{R}$:

Premier cas : Si $f(x) \leqslant 0$ alors $f^+(x) = 0$ et $f^-(x) = -f(x)$. On a alors :

$$f^+(x) - f^-(x) = 0 - (-f(x)) = f(x) \quad \text{et} \quad f^+(x) + f^-(x) = 0 + (-f(x)) = -f(x) = |f(x)|.$$

Second cas : Si $f(x) \geqslant 0$ alors $f^+(x) = f(x)$ et $f^-(x) = 0$. On a alors :

$$f^+(x) - f^-(x) = f(x) - 0 = f(x) \quad \text{et} \quad f^+(x) + f^-(x) = f(x) + 0 = f(x) = |f(x)|.$$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ et $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ donc

$$\boxed{f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-.}$$

Chapitre 3. Trigonométrie

Exercice 1

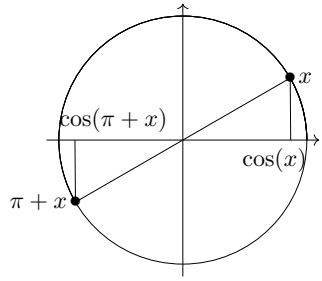
Donner les valeurs de $\cos\left(\dfrac{1651\pi}{6}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{21\pi}{4}\right)$.

Commentaire

Ici, il s'agit simplement de s'aider de la 2π-périodicité des fonctions $\cos$ et $\sin$, ainsi que des angles associés du formulaire de trigonométrie.

D'une part :

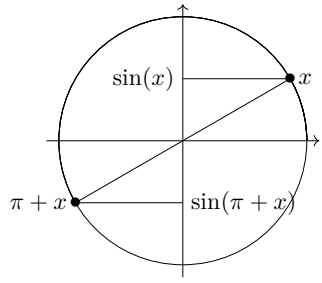
$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{1651\pi}{6}\right) &= \cos\left(137\times 2\pi + \frac{7\pi}{6}\right)\\ &= \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\\ &= \cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$



Ainsi $\boxed{\cos\left(\dfrac{1651\pi}{6}\right) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}\ .}$

On obtient de même :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{21\pi}{4}\right) &= \sin\left(2\times 2\pi + \frac{5\pi}{4}\right)\\ &= \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\\ &= \sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$



Ainsi $\boxed{\sin\left(\dfrac{21\pi}{4}\right) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\ .}$