

EDICIÓN ACTUALIZADA CON MODELIZACIONES

MATEMÁTICA BÁSICA (Álgebra)

3a. Edición

LÓGICA Y CONJUNTOS

NÚMEROS REALES

ECUACIONES e INECUACIONES



RELACIONES Y FUNCIONES

EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

♦♦ INTERÉS COMPUESTO ♦♦

ANÁLISIS COMBINATORIO

J. Armando Venero B.



MATEMÁTICA BÁSICA (Álgebra)

Tercera edición digital

2026

J. ARMANDO VENERO BALDEÓN

Licenciado en Matemáticas

Universidad Nacional de Ingeniería – Perú



REPRESENTACIONES GEMAR E.I.R.L.

LIMA

PERÚ

MATEMÁTICA BÁSICA (Álgebra)

Tercera edición

Autor:

© **Jesús Armando Venero Baldeón**

Estudios de Maestría en **MATEMÁTICAS**

Pontificia Universidad Católica del Perú

Dpto. de tipeo, diagramación, diseño y revisión

Ana María Vargas Loayza de Venero

Lic. en Educación (UNMSM)

© 2026, 2024, 2020, Representaciones GEMAR E.I.R.L.

Tercera edición digital, setiembre 2026

Editado por:

© Representaciones GEMAR E.I.R.L.

Av. José Pardo 975 – Dpto. 203, Miraflores- Lima - Perú

Teléfono: 953 255 935 , rep_gemar09@hotmail.com

<https://www.facebook.com/veneromath/>

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú **N° 2026-03867**

ISBN PDF: 978-612-99042-3-8

Nota sobre la edición digital / Accesibilidad

Información de accesibilidad: Esta obra es un texto de matemática superior de maqueta-ción fija que contiene fórmulas científicas complejas y gráficos vectoriales avanzados. Debido a la naturaleza intrínseca del contenido y conforme a los criterios de exención por 'carga desproporcionada' y estatuto de microempresa contemplados en la Ley Europea de Accesibilidad (EAA), este ePDF puede no ser totalmente compatible con lectores de pantalla u otras tecnologías asistenciales. El editor se compromete a evaluar alternativas en futuras ediciones a medida que avancen los estándares de conversión matemática.

Prohibida la reproducción parcial o total, por cualquier medio o método, de este libro sin la autorización legal del autor y/o de **REPRESENTACIONES GEMAR E.I.R.L.**
LIMA – PERÚ.

PRÓLOGO

En este texto *MATEMÁTICA BÁSICA (Álgebra) 3a. Ed. actualizada con Modelizaciones* se estudian temas que se dictan en cursos iniciales de matemáticas universitarias, en las carreras de ciencias exactas y naturales, ingeniería, informática, economía, administración, etc.

Los conceptos matemáticos son presentados como una prolongación natural de lo que se aprendió en los estudios secundarios y preuniversitarios.

Este libro está dirigido no solamente a los estudiantes que llevan cursos con las materias aquí tratadas sino también a formar profesores que quieran transmitir las matemáticas con la seguridad, la fluidez y la alegría que nos caracteriza.

El Capítulo [1] estudia la **Lógica Simbólica** (Lógica Matemática) presentando las *proposiciones lógicas*, sus variables, los *conectivos lógicos* y otros operadores matemáticos aplicados a ellas. Se construyen *Inferencias Lógicas* y se analiza su validez o invalidez con total precisión. Es el soporte principal de la creación de algoritmos en el campo de la informática.

El Capítulo [2] estudia los **Conjuntos** como objetos que agrupan otros objetos de una misma especie denominados *elementos*. Se muestran las relaciones de *inclusión* (subconjuntos) y *pertenencia* entre estos objetos. Se definen las operaciones entre conjuntos como unión, intersección, complementación, en términos de la Lógica Simbólica.

Cuando llegues a *las leyes del álgebra de conjuntos* te sorprenderá ver que son completamente análogas a *las leyes del álgebra de proposiciones lógicas* del capítulo 1, como si se vieran reflejadas en un mismo espejo o como si fueran hermanas gemelas.

En el Capítulo [3] se estudia el **Sistema de los Números Reales**, sus axiomas, las propiedades de la *suma* y *multiplicación* y la *relación de orden* “menor que” entre estos números.

En el Capítulo [4], **Ecuaciones Polinómicas**, se estudian los *Polinomios*, la naturaleza de sus raíces y las relaciones entre sus raíces y coeficientes, así como los métodos para factorizarlos. Hallarás aquí dos *nuevas* e interesantes secciones, la Sección 4, **Modelización con Ecuaciones Lineales**, y la Sección 5, **Modelización con Sistemas de Ecuaciones Lineales**, con muchos problemas diseñados en el entorno de la **Modelización Matemática** y que ilustran su aplicación a situaciones con aproximación a la vida real.

El Capítulo [5], **La Ecuación de Segundo Grado**, como complemento necesario del capítulo 4 previo, estudia ampliamente el trinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ y las propiedades de su **discriminante** destinadas a conocer sus raíces.

Verás otra sección nueva, **Aplicaciones y Modelización**, con muchos problemas de esta clase, con sus respectivas resoluciones, y donde aparece una ecuación cuadrática, se elige una de sus soluciones y se le interpreta en el contexto del problema.

El Capítulo [6], **Desigualdades e Inecuaciones**, estudia las propiedades y teoremas que involucran *desigualdades*, apoyadas en los axiomas de la relación de orden “*menor que*”, con la finalidad de establecer métodos de resolución de *inecuaciones polinómicas y racionales*.

En el Capítulo [7] se estudian métodos para resolver **Ecuaciones e Inecuaciones con Radicales**, y en el Capítulo [9] se presentan métodos para resolver *Ecuaciones e Inecuaciones Exponenciales*.

El Capítulo [8] está dedicado al estudio de las propiedades del **Valor Absoluto** y del **Máximo Entero** de un número real; se resuelven ecuaciones e inecuaciones que contienen el operador Valor Absoluto así como el operador Máximo Entero.

Los Capítulos [10] y [11], estudian las **Relaciones** en el plano cartesiano, sus gráficas y sus propiedades. El Capítulo [12], está dedicado al estudio minucioso de las **Funciones** y sus gráficas; incluye las funciones *pares, impares, periódicas*, el *álgebra de funciones*, la *composición de funciones*, las funciones *univalentes*, *suryectivas* y *biyectivas*, las funciones *crecientes y decrecientes* y un amplio análisis de la **función inversa de una función univalente**.

En la sección [13] de este Capítulo [12] se definen los conceptos del **Logaritmo** y de la **Base de un Logaritmo**; se estudian las leyes, propiedades de los logaritmos y las fórmulas para cambio de base de logaritmos.

En la sección [13.5] presento la definición del mágico *número de Euler* e , el cual será la base de los logaritmos naturales (o neperianos).

Con estos elementos se estudian las **Funciones Exponenciales** y las **Funciones Logarítmicas** en general, sus propiedades y los fundamentos para la resolución de ecuaciones e inecuaciones logarítmicas.

A continuación de este prólogo te muestro detalles de este mágico *Número de Euler* e , cuál es su valor numérico, las formas de calcularlo, incluso una forma de memorizar sus primeros doce dígitos decimales. Este número es sumamente importante en la ciencia, la tec-

nología, la biología, etc., así como en las finanzas, y específicamente, en el **Interés Compuesto continuo**.

En el Capítulo [13], **Aplicaciones Exponenciales y Logarítmicas**, presento por primera vez un completo estudio matemático del **Interés Compuesto financiero**, por la importancia real que tiene el aspecto económico en la vida cotidiana de las personas y de las empresas.

Además, incluyo problemas de desintegración radiactiva, crecimiento poblacional y de cultivo de bacterias, así como de depreciación de maquinaria industrial.

El Capítulo [14] , **Análisis Combinatorio**, estudia los métodos para contar, “sin contar uno por uno” , la cantidad de posibles ordenamientos, selecciones o agrupaciones (*permutaciones, variaciones, combinaciones*) de los elementos de un conjunto finito.

Los factoriales y los números combinatorios son la esencia de estos cálculos, así como para construir los *coeficientes binomiales y multinomiales* en el desarrollo del Binomio de Newton y de su generalización, el Multinomio de Newton, respectivamente.

También incluye el estudio de cómo calcular el número de **particiones** ordenadas así como el de las particiones no ordenadas de un conjunto finito.

Estos conocimientos te permitirán acceder al fascinante universo del Cálculo de Probabilidades Discretas.

Todos los capítulos contienen una o varias Series de Ejercicios Propuestos, seguidos de sus correspondientes Claves de Respuestas, y resoluciones en muchos casos, que permiten aclarar las dudas del estudiante y afianzar su aprendizaje.

Again, todo mi amor y admiración a mi adorable esposa Anita María Vargas Loayza, Licenciada en Educación (UNMSM) por ser aquella maravillosa arquitecta venida de las estrellas para hacer que esta nueva obra se convierta en una grata realidad. Es ella quien, con su especial cariño y mística dedicación, llevó a cabo la revisión matemática y lexicográfica así como todo lo relacionado a la diagramación e impresión del libro.

EL MÁGICO NÚMERO e

Leonhard Euler (1707-1783) descubrió este número especial cuando estudiaba la exponencial siguiendo asignándole valores n cada vez más grandes ilimitadamente, tanto positivos como negativos

$$(1) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \rightarrow \pm \infty, \quad \text{es decir} \quad e = \lim_{n \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

observando que tomaba valores crecientes, pero siempre entre 2 y 3.

Demostró que e es un *número irracional* pues no es un número decimal exacto ni tiene período y que es además un *número trascendente* pues no es raíz de ningún polinomio con coeficientes racionales.

Su valor decimal truncado hasta los primeros quince dígitos decimales es

$$e = 2,718281828459045 \dots$$

Puedes notar que, después de 2,7 aparece dos veces el bloque 1828 y luego aparecen los legendarios números 45 90 45. Veamos otras formas de calcularlo.

$$(2) \quad e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

(3) Como fracción continua infinita

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, (1, 2n, 1), \dots], \quad n = 5, 6, 7, \dots$$

Truncando hasta $n = 5$, $e = 2,718281828$ con una calculadora:

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{B}}}}, \quad B = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{A}}}}}, \quad A = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{10}}}}$$

(4) Como otra fracción continua infinita

$$e = 1 + 2 \div ([1; 6, 10, 14, 18, 22, 6 + 4n, \dots]) \quad \text{para} \quad n = 5, 6, 7, \dots$$

Truncando hasta $n = 4$, $e = 2,718281828$ con una calculadora:

$$e = 1 + 2 \div \left(1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{A}}}\right), \quad \text{donde} \quad A = 14 + \frac{1}{18 + \frac{1}{22}}.$$

CONTENIDO

1 LÓGICA SIMBÓLICA

1. Proposiciones Lógicas	.. 1
2. Proposiciones Compuestas Básicas. La Negación. La Disyunción. La Conjunción. La Condicional. La Bicondicional. La Disyunción Exclusiva. Conectivos Lógicos	.. 2
3. Proposiciones Compuestas	.. 6
4. Tautología y Contradicción	.. 8
5. <i>Implicación Lógica y Equivalencia Lógica</i>	.. 9
6. <i>Proposiciones lógicamente equivalentes</i>	.. 9
7. Leyes del Álgebra Proposicional	.. 10
Serie de Ejercicios	.. 13
8. Variantes Condicionales	.. 17
9. <i>Inferencia Lógica</i> (Argumento Lógico)	.. 19
Serie de Ejercicios	.. 26
10. Circuitos Booleanos (Lógicos). Circuitos en Serie, Circuitos en Paralelo.	.. 27

2 CONJUNTOS

1. Conjuntos	.. 37
2. Conjuntos Numéricos. <i>Intervalos</i>	.. 38
3. <i>Cuantificador Existencial y Cuantificador Universal</i> , Funciones Proposicionales, Negación de proposiciones con cuantificadores.	.. 39
4. <i>Inclusión</i> de Conjuntos. Subconjuntos. Conjunto Unitario, Conjunto Vacío, Conjunto Universal. Conjuntos Iguales	.. 46
5. Operaciones entre Conjuntos: Unión, Intersección, Complemento de un Conjunto, Diferencia de Conjuntos, Diferencia Simétrica	.. 48
6. Operaciones de Conjuntos aplicadas a los Intervalos	.. 52
7. Leyes del Álgebra de Conjuntos	.. 55
8. Conjunto Potencia	.. 65
9. Número de elementos de un conjunto	.. 67

3 NÚMEROS REALES

1. El Sistema de los Números Reales . Axiomas de la <i>Suma</i> y de la <i>Multipli-</i> <i>cación</i> de Números Reales. Axiomas de la Relación de Orden ' <i>menor que</i> '. Axiomas de la Relación de <i>Igualdad</i> . Interpretación Geométrica	.. 75
2. Propiedades de los Números Reales. Principios de Sustitución de la Adición y de la Multiplicación. <i>Sustracción</i> (Resta). <i>División</i>	.. 78

4 ECUACIONES POLINÓMICAS

1. Ecuaciones Lineales en una Variable	.. 83
2. Sistemas de Ecuaciones Lineales con 2 incógnitas	.. 85
3. Sistemas de Ecuaciones Lineales con 3 incógnitas	.. 86
4. MODELIZACIÓN CON ECUACIONES LINEALES	.. 91
5. MODELIZACIÓN CON SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	.. 97
6. POLINOMIOS	.. 106
7. El Algoritmo de la División para Polinomios	.. 108
8. División Sintética (Regla de Ruffini).	.. 110
9. Teorema del Residuo y Teorema del Factor.	.. 115
10. Número de Raíces de un Polinomio. <i>Teorema Fundamental del Álgebra.</i>	.. 130
11. Regla de los Signos de Descartes	.. 132
12. Raíces Racionales de un Polinomio	.. 136
13. Relaciones entre las Raíces y los Coeficientes de un Polinomio.	.. 139
14. Resolución de la Ecuación de Segundo Grado. Método de <i>Completar Cuadrados</i>	.. 143
15. Ecuaciones de Grado Superior	.. 150

5 LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

1. La Ecuación de Segundo Grado	.. 155
2. Raíces y Discriminante de la Ecuación Cuadrática	.. 155
3. Ecuaciones reducibles a la Forma Cuadrática	.. 164
4. Ecuaciones Recíprocas. Características de las Ecuaciones Recíprocas	.. 166
5. APLICACIONES Y MODELIZACIONES	.. 171

6 DESIGUALDADES e INECUACIONES

1. La Relación de Orden. Teoremas relativos a Desigualdades	.. 191
2. La Regla de los Signos	.. 194
3. Desigualdades Lineales y Cuadráticas. <i>Inecuaciones</i>	.. 195
4. Regla Gráfica de los Signos para resolver <i>Inecuaciones</i>	.. 201
5. Método de los Puntos Críticos para resolver <i>Inecuaciones</i> Inecuaciones con Factores Cuadráticos Irreducibles	.. 204 .. 213
6. Problemas de aplicación sobre Desigualdades. Serie de Ejercicios	.. 215 .. 216

7 INECUACIONES CON RADICALES

1. Ecuaciones con Radicales. Ecuaciones con varios radicales	.. 225
2. Inecuaciones con Radicales	.. 233

8 VALOR ABSOLUTO Y MÁXIMO ENTERO

1. El Valor Absoluto de un número real. Interpretación Geométrica	.. 247
Propiedades. Desigualdad Triangular.	.. 252
2. <i>Ecuaciones</i> con Valor Absoluto. Teoremas relativos	.. 257
3. <i>Inecuaciones</i> con Valor Absoluto. Teoremas relativos	.. 262
4. Problemas de Aplicación.	.. 265
Serie de Ejercicios	.. 277
Serie adicional de ejercicios propuestos	.. 283
Problemas resueltos sobre desigualdades de números reales	.. 285
5. El Máximo Entero de un número real. Propiedades	.. 291
6. <i>Inecuaciones</i> con Máximo Entero. Teoremas relativos	.. 298

9 INECUACIONES EXPONENCIALES

1. Ecuaciones Exponenciales	.. 311
Serie de Ejercicios	.. 314
2. Inecuaciones Exponenciales	.. 314
Serie de Ejercicios	.. 319

10 RELACIONES

1. Pares Ordenados. Producto Cartesiano	.. 321
2. Relaciones . Tipos de Relaciones: Reflexivas, Simétricas, Transitivas, Relaciones de Equivalencia. Dominio y Rango	.. 324
Serie de Ejercicios	.. 330
3. Gráficas de Relaciones definidas por Ecuaciones	.. 334
Gráficas de Relaciones definidas por Inecuaciones (A)	.. 338
4. Relaciones Inversas . Gráfica de la Relación Inversa	.. 342
5. Distancia entre dos puntos en el Plano Cartesiano	.. 346
Fórmula del Punto Medio	.. 348
6. La Recta y sus ecuaciones. Pendiente de una Recta	.. 349
7. Rectas Paralelas y Rectas Perpendiculares	.. 352
Serie de Ejercicios	.. 355

11 GRÁFICAS DE RELACIONES

1. Gráfica de la <i>Parábola</i>	
Desplazamientos Horizontales y Verticales	.. 357
2. Gráficas que involucran el Valor Absoluto	.. 362
3. La <i>Circunferencia</i> . Rectas Tangentes	.. 363

4. Gráficas de algunas <i>Hipérbolas</i>	.. 368
5. Simetrías de Gráficas	.. 369
6. <i>La Parábola</i> . Ecuaciones de parábolas y sus gráficas	.. 371
7. Ecuación de la <i>Elipse</i> . Rectas Tangentes	.. 375
8. Ecuación de la <i>Hipérbola</i> . Rectas Tangentes	.. 376
9. Gráficas de Inecuaciones (B)	.. 378
Serie de Ejercicios	.. 380

12 FUNCIONES

1. Funciones . Dominio, Rango y Gráfica.	.. 383
Aplicaciones de A en B . Regla de Correspondencia	.. 386
2. Gráfica de una Función.	.. 388
Funciones Reales de una Variable Real	.. 390
3. Conjunto Imagen. Conjunto Imagen Inversa o Preimagen	.. 392
4. Evaluación de una Función en un Punto	.. 397
5. Cálculo de Dominios y Rangos de Funciones	.. 403
Funciones con varias reglas de correspondencia	.. 409
6. Funciones Especiales: Función <i>Identidad</i> , Función <i>Constante</i> , Función <i>Escalón Unitario</i> , Función <i>Signo</i> , Función <i>Valor Absoluto</i> , Función <i>Máximo Entero</i> (Floor, Piso), Función Raíz Cuadrada, Función Cuadrática, Polinomios, Función Seno y Función Coseno	.. 414
7. Trazado de Gráficas Especiales: Desplazamientos Verticales, Desplazamientos Horizontales, Reflexiones, Estiramientos, Contracciones. Gráficas de relaciones con Valor Absoluto y con Máximo Entero	.. 440
8. Funciones <i>Pares</i> , <i>Impares</i> y <i>Periódicas</i>	.. 448
9. Álgebra de Funciones. Igualdad de Funciones, Suma de Funciones, Resta y Multiplicación de Funciones, Cociente de Funciones (Función Cociente)	.. 461
10. Composición de Funciones . Propiedades	.. 474
11. Funciones <i>Inyectivas</i> (Univalentes), <i>Suryectivas</i> y <i>Biyectivas</i> Funciones Monótonas: <i>Crecientes</i> y <i>Decrecientes</i> Cálculo de Rangos de Funciones Inyectivas Monótonas	.. 493 .. 507 .. 509
12. Funciones Inversas	.. 514
Propiedad Fundamental de las Funciones Inversas	.. 517
Cálculo de la Función Inversa	.. 519
Función Inversa de una Composición de Funciones	.. 524

13. Funciones Exponenciales y Funciones Logarítmicas	.. 538
Definición del <i>número de Euler</i> e	.. 541
14. Ecuaciones e Inecuaciones Logarítmicas y Exponenciales	.. 566

13 APLICACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

1. Interés Compuesto	.. 587
Frecuencia de Capitalización	.. 588
Interés Compuesto Continuo	.. 590
Problemas variados de Interés Compuesto	.. 592
2. Aplicaciones Logarítmicas Diversas	.. 610

14 ANÁLISIS COMBINATORIO

1. Técnicas de Conteo. <i>Principio de Conteo Aditivo</i>	.. 619
<i>Principio de Conteo Multiplicativo</i>	.. 621
2. Permutaciones	.. 631
Permutaciones de n objetos tomados de r en r	.. 634
Permutaciones Circulares	.. 639
Permutaciones Distinguibiles	.. 642
3. Coefficientes Binomiales y Multinomiales	.. 648
Triángulo de Pascal	.. 649
Teorema del Binomio de Newton	.. 650
Teorema del Multinomio de Newton	.. 651
4. Combinaciones	.. 654
Problemas de Naipes	.. 665
5. Particiones Ordenadas y No Ordenadas	.. 679
Partición de un Conjunto	.. 679
Número de Particiones Ordenadas de un Conjunto	.. 682
Número de Particiones No Ordenadas de un Conjunto	.. 683
Problemas Resueltos	.. 685
Serie de Ejercicios	.. 689

ÍNDICE ALFABÉTICO	.. 691
--------------------------	--------

BIBLIOGRAFÍA	.. 695
---------------------	--------

LA VOLUNTAD

1. *La Voluntad es la Fuerza del Espíritu.*
2. *La Verdadera Fuerza que mueve el Universo.*
3. *La Voluntad es vencer en las pequeñas cosas, para poder vencer en las grandes.*
4. *La Voluntad es el triunfo del espíritu sobre la materia.*
5. *Porque no hay mayor batalla que aquella que se libra consigo mismo.*
6. *La Voluntad es la victoria más grande en la lucha de la Existencia.*
7. *Ella es la fuerza que mueve todas las cosas.*
8. *Es la fuerza que acompaña al Hombre en su camino al infinito.*

“Hacia un Despertar ...”

VIDEOS CON ANIMACIÓN DE DIVERSOS PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS CON EL PROGRAMA GEOGEBRA

CÁLCULO DIFERENCIAL

- 1) Límite Trigonométrico Lateral Derecho
<https://www.facebook.com/veneromath/videos/354258125477575>
- 2) Aplicación de Rectas tangentes a la función Seno: Surfista sobre las olas del mar
<https://www.facebook.com/veneromath/videos/418635638996541>

CÁLCULO INTEGRAL

- 3) Volumen de un sólido mediante el área conocida de sus Secciones Transversales
<https://www.facebook.com/100063506772839/videos/301801330890526>

CÁLCULO MULTIVARIABLE

- 3) Círculos de curvatura en 2d (XY)
<https://www.facebook.com/veneromath/videos/229000767736237>
- 4) El planteamiento de este problema y su solución analítica en este enlace
<https://www.facebook.com/photo?fbid=1134401536716507>
- 5) Círculo de curvatura 3d (XYZ)
<https://www.facebook.com/veneromath/videos/439647299862783>
- 6) Helicoide: Planos osculadores y círculos de curvatura - Minería a cielo abierto
<https://www.facebook.com/veneromath/videos/2013021215655269>

ECUACIONES DIFERENCIALES

- 7) Recta Envolvente de una Familia de parábolas como solución singular y solución general de una Ecuación Diferencial de primer orden (Ecuación. de Lagrange)
<https://www.facebook.com/100018275384045/videos/605775083374999>

Tal ecuación diferencial es planteada y hallada en el siguiente enlace:

<https://www.facebook.com/photo?fbid=666493120636528>

1

L Ó G I C A S I M B Ó L I C A

En la actualidad, el estudio serio de cualquier tema tanto en el campo de las Humanidades como en el de las Ciencias y la Técnica requiere conocer los fundamentos y métodos del razonamiento lógico preciso que permita al estudiante o al profesional extraer y depurar sus conclusiones evitando el riesgo de modificar en forma equivocada la información que posee.

Esto es aún más evidente en esta era de la Informática, herramienta que es empleada en todos los campos del desarrollo de una sociedad, y que por la velocidad a la cual se procesan los datos cualquier error de *lógica simbólica* (*lógica matemática*) puede originar problemas técnicos y por lo tanto sociales y económicos.

En este capítulo presentaremos la teoría mínima necesaria de la *lógica formal* que será de suma utilidad para tales fines.

1. PROPOSICIONES LÓGICAS

Son aquellas expresiones u oraciones que pueden ser calificadas bien como **verdaderas** o bien como **falsas**, sin ambigüedades. Las proposiciones lógicas serán denotadas con letras minúsculas generalmente:

$p, \quad q, \quad r, \quad \dots, \quad \text{etc.}$

A la veracidad o falsedad de un enunciado (proposición) se le denomina **valor veritativo** o **valor de verdad**.

EJEMPLOS DE PROPOSICIONES LÓGICAS

$p:$	$17 - 6 = 11$	...	VERDADERA (V)
$q:$	Viena es la capital de Austria	...	VERDADERA (V)
$r:$	$117 + 319 = 426$	...	FALSA (F)

EJEMPLOS DE EXPRESIONES QUE NO SON PROPOSICIONES LÓGICAS

“ Buenos días ” , “ No faltes ” , “¿Quién llamó por teléfono?”

Estas expresiones no son proposiciones lógicas debido a que no es posible asignarles un valor definido de verdad o de falsedad.

 **NOTA 1.-** En resumen, las Proposiciones Lógicas son expresiones de las que tiene sentido decir que son **verdaderas** o que son **falsas**.
También se les denomina simplemente **PROPOSICIONES**.

1.1 DEFINICIÓN.- Se llaman **VALORES VERITATIVOS** o **VALORES DE VERDAD** de una Proposición a sus dos valores posibles: verdadero o falso. Estos posibles valores se pueden esquematizar en una **TABLA DE VERDAD** como sigue:

p
V
F

1.2 CLASES DE PROPOSICIONES LÓGICAS

a) **PROPOSICIONES SIMPLES** o **ATÓMICAS.-** Son aquellas que se pueden representar por una sola variable, es decir, por una sola letra como

$$p: 1 + 4 = 5$$

b) **PROPOSICIONES COMPUESTAS** o **MOLECULARES.-** Son aquellas que se pueden representar por lo menos por una variable y algún o algunos de los símbolos que representan a las palabras siguientes:

no , **implica** , **o** , **y** , **si y solo si** .

2. PROPOSICIONES COMPUESTAS BÁSICAS

2.1 LA NEGACIÓN Dada una proposición p , se denomina **LA NEGACIÓN** de p , a otra proposición denotada por: $\sim p$, y que le asigna el valor veritativo opuesto al de p . Su tabla de verdad es:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Esta proposición $\sim p$ es también leída como:

“no p ”

“no es cierto que p ”.

EJEMPLO.- Sean las proposiciones $p: 3 \times 4 = 12$ (V)
 $q: \text{Helsinki es la capital de Polonia}$ (F)

Sus negaciones son:

$\sim p$: No es cierto que $3 \times 4 = 12$ [o sino, $3 \times 4 \neq 12$] (F)

$\sim q$: Helsinki no es la capital de Polonia (V)

La última negación $\sim q$ es **verdadera** pues la ciudad de Helsinki es la capital de Finlandia.

2.2 LA DISYUNCIÓN Se le denota " $p \vee q$ " y se lee " p o q ". Es una proposición compuesta por las proposiciones p y q , ambas conectadas por la palabra "o", en el sentido inclusivo de y/o , y está definida por la siguiente condición:

"La proposición $p \vee q$ es **falsa** únicamente en el caso en que p y q son **ambas falsas**; en cualquier otro caso es **verdadera**."

En su tabla de verdad se anotan sus valores para todas las posibles combinaciones de valores veritativos de p y de q como sigue:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V (*)
F	F	F

Por ejemplo, correspondiente a la combinación (*) de la tercera fila:

p : 8 es menor que 5 ... (F)
 q : 6 es mayor que 3 ... (V)
 $p \vee q$: 8 es menor que 5 o 6 es mayor que 3 ... (V)

2.3 LA CONJUNCIÓN Se le simboliza " $p \wedge q$ ", y se lee como " p y q "

Se le define como una nueva proposición que resulta **verdadera** (V) en el único caso en que las proposiciones componentes p y q son **ambas verdaderas** (V). En todos los demás casos es **falsa** (F).

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F (*)
F	V	F
F	F	F

Por ejemplo, si p : 15012 es múltiplo de 3 ... (V)
 q : $4 + 7 = 12$... (F)
 $p \wedge q$: 15012 es múltiplo de 3 y $4 + 7 = 12$... (F)

2.4 LA CONDICIONAL

Se le simboliza " $p \rightarrow q$ " y se lee "**si** p **entonces** q ".

Es una nueva proposición compuesta que es **falsa** únicamente en el caso en que la proposición p es **verdadera** y la proposición q es **falsa**. Su tabla de verdad es

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La proposición p es llamada **ANTECEDENTE** y la proposición q **CONSECUENTE**

OBSERVACIONES

- 1) Según las dos últimas filas de la tabla de verdad, basta que el antecedente p sea falso para que toda la condicional sea verdadera, independientemente del valor del consecuente q .
- 2) De las filas primera y tercera se concluye que es suficiente que el consecuente q sea verdadero para que la condicional resulte verdadera.
- 3) Según la última fila, en el caso en que p y q sean ambas falsas, la condicional resulta verdadera.

En resumen, el único caso en que un procedimiento de deducción es incorrecto ocurre cuando a partir de una información verdadera se concluye una falsedad. Esta proposición $p \rightarrow q$ también se lee de las siguientes maneras:

" p implica q ", " p es una condición suficiente para que q ",
 " q a menos que $\sim p$ ", " q es una condición necesaria para que p ",
 "Es suficiente que p para que q ".

EJEMPLOS.- Explique por qué las condicionales siguientes tienen los valores veritativos indicados:

- a) $2 + 3 = 8 \rightarrow 5 < 6$ (V)
- b) $3 - 1 = 4 \rightarrow 2^4 < 2^3$ (V)
- c) Si 5 es primo entonces 51 es un número par (F)

Estas condicionales tienen los valores de verdad indicados debido a que

- a) p es falsa y q verdadera : condicional verdadera
- b) p es falsa y q falsa : condicional verdadera
- c) p es verdadera y q falsa : condicional falsa

PROBLEMA 1.- Utilizar las palabras “ Si ... entonces ... ”, para expresar de otra manera equivalente la proposición “ Yo no me presento al examen de Química mañana a menos que lo posterguen una semana. ”

SOLUCIÓN . Sean q : Yo no me presento al examen de Química mañana
 p : No postergarán el examen una semana,
 entonces la proposición dada corresponde a: “ q a menos que $\sim p$ ”, la cual precisamente se simboliza por: “ $p \rightarrow q$ ”. Así tenemos el enunciado equivalente:

“ **Si** no postergan el examen de Química una semana **entonces** yo no me presento a dicho examen mañana.”

2.5 LA BICONDICIONAL Se denota “ $p \leftrightarrow q$ ”, y se lee “ p si y solo si q ”.

Es aquella proposición compuesta que es **verdadera** en los casos en que ambas p y q tienen valores veritativos iguales (**ambas verdaderas o ambas falsas**); y es **falsa** en los casos donde p y q tienen valores veritativos **opuestos**. Su tabla de verdad es :

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

También se lee como:

“ p si y solo si q ”

“ p es una condición necesaria y suficiente para q ”.

Por ejemplo, p : $2 < 4$... (V)
 q : $2 + 6 < 4 + 6$... (V)
 $p \leftrightarrow q$: $2 < 4$ si y solamente si $2 + 6 < 4 + 6$... (V)

2.6 LA DISYUNCIÓN EXCLUSIVA Se le denota “ $p \Delta q$ ”, y se lee:

“ O bien p o bien q ”.

Es aquella proposición que es **verdadera** en los casos en que ambas proposiciones p y q tengan **valores veritativos opuestos**, y es falsa si ambas tienen idénticos valores de verdad. Su tabla de verdad es :

p	q	$p \Delta q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

También recibe el nombre de

DIFERENCIA SIMÉTRICA

2.7 CONECTIVOS LÓGICOS

Se llaman así a los símbolos:

$$\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \sim, \Delta.$$

3. PROPOSICIONES COMPUESTAS

Utilizando los conectivos lógicos se puede combinar cualquier cantidad finita de proposiciones compuestas básicas para obtener otras cuyos valores de verdad pueden ser conocidos construyendo sus tablas de verdad.

Aquí se indican los valores resultantes de estas proposiciones compuestas para todas las combinaciones posibles de valores de verdad de las proposiciones componentes.

Veamos la tabla de verdad de la proposición compuesta $[(\sim p) \vee q] \rightarrow (r \wedge p)$

p	q	r	$\sim p$	$(\sim p) \vee q$	$r \wedge p$	$[(\sim p) \vee q] \rightarrow (r \wedge p)$
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F
V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	F	F

EJERCICIO.- Sean p : 8 es un número par,
 q : 8 es el producto de dos enteros.

Traduzca en símbolos cada una de las siguientes proposiciones:

- 8 es un número par o es un producto de dos enteros.
- 8 es impar y es un producto de dos enteros.
- 8 es par y un producto de dos enteros o es un número impar y no un producto de dos enteros.

RPTA: a) $p \vee q$, b) $(\sim p) \wedge q$, c) $(p \wedge q) \vee [(\sim p) \wedge \sim q]$.

PROBLEMA 1.- Sean p , q y r tres proposiciones tales que p es verdadera, q es falsa y r es falsa. Indique cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas:

- $(p \vee q) \vee r$, b) $(\sim p) \vee (q \wedge r)$
- $[(p \wedge q) \vee ((\sim p) \wedge \sim q)] \wedge [((\sim p) \wedge q) \vee ((\sim q) \wedge p)]$
- $[(\sim p) \vee \sim q] \wedge (p \vee \sim r) \wedge (q \vee r)$

SOLUCIÓN.

a) Verdadera, pues

$$\begin{array}{ccccc}
 (p & \vee & q) & \vee & r \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 (V & \vee & F) & \vee & F \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 V & & & \vee & F \\
 & & & \downarrow & \\
 & & & V & , \text{ verdadera}
 \end{array}$$

b) Esta proposición es Falsa, pues:

$$\begin{array}{ccccc}
 (\sim p) & \vee & (q \wedge r) \\
 F & \vee & F \\
 & & F
 \end{array}$$

c) Como esta proposición está constituida por proposiciones compuestas entre dos corchetes unidos por una conjunción $\wedge$, y como el primero de tales corchetes es **falso** (¿por qué?) entonces toda la proposición (b) será **falsa**, independientemente del valor de la proposición compuesta del segundo corchete.

d) Esta proposición también es **falsa**, en forma análoga a (c), puesto que $(q \vee r)$ es falsa.

PROBLEMA 2.- Halle el valor de verdad de la proposición:

$$(\sqrt[4]{4} > \sqrt{2} \wedge 1 > 0) \rightarrow \left[\sqrt{2} \geq \sqrt[4]{4} \vee \left(1/\sqrt[4]{4} < 1/\sqrt{2} \leftrightarrow -1 < 0 \right) \right]$$

SOLUCIÓN. De $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = 2^{2/4} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$, se tiene que $\sqrt[4]{4} > \sqrt{2}$ y $1/\sqrt[4]{4} < 1/\sqrt{2}$ son ambas falsas. Sin embargo, $\sqrt{2} \geq \sqrt[4]{4}$ es **verdadera** pues $\geq$ quiere decir: $(>)$ o $(=)$.

Así, la proposición dada tiene el valor siguiente:

$$\begin{array}{lcl}
 (F \wedge V) & \rightarrow & [V \vee (F \leftrightarrow V)] \\
 F & \rightarrow & [V \vee (F \leftrightarrow V)]
 \end{array}$$

y según una de las **OBSERVACIONES** de la sección [2], es suficiente que el antecedente sea **falso** para que toda la condicional sea **verdadera**.

3.1 JERARQUÍA DE LOS CONECTIVOS LÓGICOS

Cuando en una proposición compuesta se tiene varios conectivos lógicos, las operaciones se realizan luego de colocar los paréntesis adecuadamente comenzando con las proposiciones que se encuentran dentro de los paréntesis interiores. Siguen todas las negaciones y luego se avanza de izquierda a derecha.

Los corchetes son considerados como paréntesis.

PROBLEMA 3.- Sean p, q, r, s y n cinco proposiciones lógicas. Si el valor de verdad de cada una de las proposiciones siguientes (a) y (b) es **falsa**:

$$\text{a) } [\sim(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow (s \wedge r), \quad \text{b) } \sim p \vee q,$$

¿cuál es el valor de verdad de (c) y (d) ? :

$$\text{c) } [(n \rightarrow p) \wedge \sim r] \rightarrow p, \quad \text{d) } s \rightarrow (p \leftrightarrow r)$$

SOLUCIÓN. Que la condicional (a) sea **FALSA** quiere decir que

$$\begin{cases} \sim(p \rightarrow q) \rightarrow r & \text{es } V \quad (*) \\ s \wedge r & \text{es } F \quad (**) \end{cases}, \quad y$$

Como $\sim p \vee q$ es **F** por hipótesis, entonces ambas $\sim p$ y q son **F** es decir, p es **V** y q es **F**, de donde resulta que $\sim(p \rightarrow q)$ es **V** y por lo tanto, r es **V**. Luego, de **(**)** resulta que s es **F**. Así, la condicional (c) resulta **V**, pues el antecedente es **F**, ya que $\sim r$ es **F**, independientemente de los valores de n y p .

Asimismo, la condicional (d) resulta también **verdadera** (**V**), pues su antecedente s es **falso** (**F**).

4. TAUTOLOGÍA Y CONTRADICCIÓN

A toda proposición simple o compuesta cuyo valor es siempre **VERDADERO** para cualquier combinación de valores veritativos de sus componentes se le llama **TAUTOLOGÍA** y se le denota simplemente por **V**.

A toda proposición que es siempre **FALSA** para todas las combinaciones de valores veritativos de sus componentes se le llama **CONTRADICCIÓN**, y se le denota simplemente por **F**.

Una proposición cuya tabla de verdad contiene al menos un **V** y al menos un **F** recibe el nombre de **CONTINGENCIA**.

EJEMPLO 1.- La proposición: $[((\sim p) \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$ es una **TAUTOLOGÍA**.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee q$	$[((\sim p) \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$		
V	V	F	F	V	F	V	F
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V

EJEMPLO 2.- La proposición $[(p \wedge q) \vee q] \wedge \sim q$ es una **CONTRADICCIÓN** :

p	q	$\sim q$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee q$	$[(p \wedge q) \vee q] \wedge \sim q$
V	V	F	V	V	F
V	F	V	F	F	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	F	F

5. IMPLICACIÓN LÓGICA Y EQUIVALENCIA LÓGICA

Se llama **IMPLICACIÓN LÓGICA** (o simplemente **IMPLICACIÓN**) a toda condicional $p \rightarrow q$ que sea **tautología** ; A esta condicional se le denota $p \Rightarrow q$.

Como ejemplo de **IMPLICACIÓN** se tiene $[((\sim p) \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$, cuya tabla de verdad está mostrada en el Ejemplo [1] .

Se llama **EQUIVALENCIA LÓGICA** (o simplemente **EQUIVALENCIA**) a toda bicondicional $p \leftrightarrow q$ que sea **tautología**, denotándose en tal caso $p \Leftrightarrow q$.
Un ejemplo de Equivalencia Lógica es:

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$\leftrightarrow$	p
V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	F	F	V	F

6. PROPOSICIONES LÓGICAMENTE EQUIVALENTES

Dos proposiciones p y q se llaman **EQUIVALENTES** (o **Lógicamente Equivalentes**) si sus tablas de verdad son idénticas, en cuyo caso se simboliza

$$p \equiv q$$

EJEMPLO 1.- Las proposiciones $(p \rightarrow q)$ y $[(\sim q) \rightarrow \sim p]$ son **EQUIVALENTES** pues sus tablas de verdad resultantes son idénticas, como se puede ver en el cuadro de la siguiente página.

$$\text{Por lo tanto, } (p \rightarrow q) \equiv [(\sim q) \rightarrow (\sim p)]$$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	V	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

NOTA 1.- Esta última Equivalencia de (Ejemplo 1) es muy importante en lo que a demostraciones de teoremas o resultados en general respecta, pues viene a ser la base del llamado *método de demostración por REDUCCIÓN AL ABSURDO* que es una forma indirecta de un proceso de demostración, y que ilustraremos varias veces en el desarrollo del libro.

NOTA 2.- Un par de Proposiciones Equivalentes $p \equiv q$ producen siempre una Equivalencia Lógica $p \Leftrightarrow q$ y viceversa. Por esta razón cuando hay una Equivalencia Lógica entre p y q también se dice que: $p \equiv q$.

7. LEYES DEL ÁLGEBRA PROPOSICIONAL

Son ciertas Equivalencias Lógicas que las representaremos a continuación y cuya demostración es fácil de realizar exhibiendo sus tablas veritativas correspondientes.

- 1a. $p \vee p \equiv p$
 - 2a. $p \vee q \equiv q \vee p$
 - 3a. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
 - 4a. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
 - 5a. $p \vee F \equiv p$
 - 6a. $p \vee V \equiv V$
 - 7a. $p \vee (\sim p) \equiv V$
 - 8a. $\sim(\sim p) \equiv p$
 - 1b. $p \wedge p \equiv p$
 - 2b. $p \wedge q \equiv q \wedge p$
 - 3b. $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
 - 4b. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
 - 5b. $p \wedge F \equiv F$
 - 6b. $p \wedge V \equiv p$
 - 7b. $p \wedge (\sim p) \equiv F$
 - 8b. $\sim V \equiv F$; $\sim F \equiv V$
 - 9a. $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$
 - 9b. $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$
- } Leyes de DE MORGAN

Como es válido reemplazar una proposición por su equivalente sin alterar el resultado, estas leyes son muy útiles para simplificar los problemas.

7.1 LISTA ADICIONAL DE PROPOSICIONES EQUIVALENTES

- 1A. $p \rightarrow q \equiv (\sim p) \vee q$
 2A. $p \rightarrow q \equiv (\sim q) \rightarrow (\sim p)$
 3A. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
 4A. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
 5A. $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
 6A. $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee [(\sim p) \wedge (\sim q)]$
 7A. $p \Delta q \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

PROBLEMA 1 .- Simplifique las siguientes proposiciones utilizando las Leyes del Álgebra Proposicional o la Lista Adicional:

- a) $\sim[\sim(p \wedge q) \rightarrow \sim q] \vee q$, b) $[(\sim p) \wedge q] \rightarrow (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q$

SOLUCIÓN

- a) $\sim[\sim(p \wedge q) \rightarrow \sim q] \vee q$
 $\equiv \sim[\sim(\sim(p \wedge q)) \vee \sim q] \vee q$ 1A.
 $\equiv \sim[(p \wedge q) \vee \sim q] \vee q$ 8a.
 $\equiv [\sim(p \wedge q) \wedge \sim(\sim q)] \vee q$ 9a.
 $\equiv [(\sim p \vee \sim q) \wedge q] \vee q$ 9b.
 $\equiv q \vee [q \wedge (\sim p \vee \sim q)]$ 2a , 2b.
 $\equiv q$ 4A.
- b) $[(\sim p) \wedge q] \rightarrow (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q$
 $\equiv [((\sim p) \wedge q) \rightarrow F] \wedge \sim q$ 7b.
 $\equiv [(\sim((\sim p) \wedge q)) \vee F] \wedge \sim q$ 1A.
 $\equiv [(p \vee \sim q) \vee F] \wedge \sim q$ 9b.
 $\equiv [(p \vee \sim q)] \wedge \sim q$ 5a.
 $\equiv \sim q$ 2b , 3a.

PROBLEMA 2.- Demuestre que la siguiente proposición es una Tautología

$$[(p \vee \sim q) \wedge q] \rightarrow p$$

SOLUCIÓN

- $\equiv \sim[(p \vee \sim q) \wedge q] \vee p$ 1A.
 $\equiv [\sim(p \vee \sim q)] \vee p \vee (\sim q)$ 9b , 2a.
 $\equiv ((\sim p) \wedge q) \vee p \vee (\sim q)$ 9a.
 $\equiv (\sim p \wedge q) \vee [\sim(\sim p \wedge q)]$ 9b
 $\equiv V$ Tautología 7a.

 **NOTA .-** En muchos casos este método es más práctico que el de las tablas de verdad.

PROBLEMA 3.- Determine si (a) y (b) son proposiciones equivalentes:

a) $p \rightarrow (r \vee \sim q)$

b) $(q \rightarrow \sim p) \vee (\sim r \rightarrow \sim p)$

MÉTODO 1 Mediante las tablas de verdad:

P	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$\sim r$	$p \rightarrow (r \vee \sim q)$		$(q \rightarrow \sim p) \vee (\sim r \rightarrow \sim p)$		
V	V	V	F	F	F	V	V	F	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F	F	F	F
V	F	V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V	V	F
F	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V

↑ ↑
idénticas

MÉTODO 2 Simplificando:

a) $p \rightarrow (r \vee \sim q) \equiv (\sim p) \vee (r \vee \sim q) \quad \dots (1)$

b) $(q \rightarrow \sim p) \vee (\sim r \rightarrow \sim p)$
 $\equiv [\sim q \vee \sim p] \vee [(\sim \sim r) \vee \sim p]$
 $\equiv \sim q \vee \sim p \vee (r \vee \sim p)$
 $\equiv \sim q \vee (\sim p \vee \sim p) \vee r$
 $\equiv (\sim q) \vee (\sim p) \vee r$
 $\equiv (\sim p) \vee (r \vee \sim q) \quad \dots (2)$

Siendo (1) y (2) iguales, entonces $a \equiv b$.

PROBLEMA 4.- Dadas $t: (r \leftrightarrow s) \Delta \sim r$, $u: (r \rightarrow \sim s) \rightarrow r$,
 si t es falsa y u es verdadera, determine el valor de verdad
 de: $[(r \leftrightarrow u) \wedge (t \Delta s)] \Delta \sim t$.

SOLUCIÓN.- Datos $t: F$, $u: V$. Solo puede ocurrir (a) o (b):

a) Si $r: V$, **a1)** $s: V$, entonces $t: V \Delta F \equiv V$ (contradicción)
 a2) $s: F$, entonces $t: F \Delta F \equiv F$
 $u: V \rightarrow V \equiv V$ } (válidos)

- b) Si $r: F$, entonces $u: V \rightarrow F \equiv F$ (contradicción) y por lo tanto,
 $r: V$ y $s: F$, y en consecuencia el valor de verdad de la proposición

$$[(r \leftrightarrow u) \wedge (t \Delta s)] \Delta \sim t$$

es:

$$[(V \leftrightarrow V) \wedge (F \Delta F)] \Delta V$$

$$[V \wedge F] \Delta V$$

$$[F] \Delta V \equiv V \quad \text{.. VERDADERA}$$

EJERCICIO 5.- Pruebe que $[(\sim r) \wedge (p \vee s)] \rightarrow (q \vee s)$ tiene el valor verdadero si es que $p \leftrightarrow \sim(q \wedge r)$ y $p \Delta r$ son ambas falsas.

SERIE DE EJERCICIOS

- Demuestre las Leyes del Álgebra de Proposiciones.
- Demuestre las Equivalencias de la Lista Adicional.
- Demuestre que las condicionales siguientes son **IMPLICACIONES**:
 - $p \Rightarrow p$
 - $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r) : \text{LEY TRANSITIVA}$
 - $(\sim p) \Rightarrow (p \rightarrow q)$
 - $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$, g) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
 - $p \Rightarrow (p \vee q)$ h) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \leftrightarrow q)$
 - $(p \wedge q) \Rightarrow p$ f) $(p \leftrightarrow q) \Rightarrow (p \rightarrow q)$
- Demuestre que las bicondicionales siguientes son **EQUIVALENCIAS LÓGICAS**:
 - $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee q$
 - $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
 - $(p \wedge q) \vee p \Leftrightarrow p$
 - $(p \vee q) \wedge p \Leftrightarrow p$
 - $\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$
- Demuestre que
 - $(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \rightarrow F$ (Reducción al absurdo)
 - $(F \rightarrow p) \equiv V$; $(p \rightarrow V) \equiv V$;
 $(p \rightarrow F) \equiv \sim p$; $\sim(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)$
 - $(p \rightarrow q) \equiv [(p \vee q) \leftrightarrow q]$
 - $(p \rightarrow q) \equiv [(p \wedge q) \leftrightarrow p]$
 - $p \Delta q \equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q) \equiv \sim(p \leftrightarrow q)$
- Dadas las proposiciones:
 - $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee \sim q)$
 - $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee \sim q)$
 - $\sim(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow \sim q)$

indique cuál (o cuáles) es una contradicción (F).

7. La proposición $\sim(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \sim r)$, ¿a cuál (o cuáles) de las siguientes proposiciones es equivalente?
 - a) $p \wedge (p \vee \sim r) \wedge (\sim q)$,
 - b) $p \wedge (\sim q) \wedge \sim(q \wedge r)$
 - c) $(p \wedge \sim q) \vee [(p \wedge \sim r) \wedge \sim q]$
8. ¿Alguna de las siguientes proposiciones es una Tautología?
 - a) $\sim[(\sim(p \vee q)) \rightarrow \sim q] \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
 - b) $\sim[(\sim p) \leftrightarrow q] \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
 - c) $\sim\{(p \wedge q) \vee [p \wedge (\sim p \vee q)]\} \leftrightarrow (p \rightarrow \sim q)$
9. Simplifique: $[(\sim p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q$
10. Simplifique: $[(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)] \wedge \sim(p \wedge q)$.
11. De las siguientes proposiciones, ¿cuáles son equivalentes entre sí? :
 - a) Es necesario que Juan no vaya al cine para que termine su tarea.
 - b) No es cierto que Juan termine su tarea y vaya al cine.
 - c) Juan no terminará su tarea y no irá al cine.
12. ¿Cuáles son Tautologías? :
 - a) $[(p \vee \sim q) \wedge q] \rightarrow p$,
 - b) $[(p \wedge q) \vee q] \leftrightarrow q$
 - c) $[\sim p \wedge (q \vee \sim r)] \leftrightarrow [(\sim p \wedge q) \vee \sim(p \vee r)]$
13. De la falsedad de $(p \rightarrow \sim q) \vee (\sim r \rightarrow s)$, deducir el valor de
 - a) $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q$
 - b) $[(\sim r \vee q) \wedge q] \leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$
 - c) $(p \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$
14. Si $(p \wedge q)$ y $(q \rightarrow t)$ son falsas, ¿cuáles proposiciones son verdaderas? :
 - a) $(\sim p \vee t) \vee s$,
 - b) $\sim[p \wedge (\sim q \vee \sim p)]$
 - c) $[\sim p \vee (q \wedge \sim t)] \leftrightarrow \{(p \rightarrow q) \wedge \sim(q \wedge t)\}$
15. ¿Cuál (es) de las siguientes proposiciones es equivalente a:
"Es necesario pagar 100 soles y ser socio para ingresar al teatro"?
 - a) No ingresar al teatro o pagar 100 soles, y ser socio.
 - b) Pagar 100 soles o ser socio, y no ingresar al teatro.
 - c) Pagar 100 soles y ser socio, o no ingresar al teatro.
16. Si $(\sim p \wedge q) \rightarrow [(p \wedge r) \vee t]$ es falsa, halle el valor veritativo de :
 - a) $\sim[(\sim p) \vee (\sim q) \rightarrow (r \vee \sim t)]$
 - b) $(\sim q \wedge \sim r) \vee [\sim t \wedge (p \vee q)]$
 - c) $(\sim p \rightarrow t) \rightarrow [\sim q \rightarrow r]$
17. Demuestre que las tres proposiciones siguientes son equivalentes:
 - a) $\sim[(q \vee \sim p) \vee (q \wedge (r \vee \sim p))]$
 - b) $(p \wedge \sim q) \wedge [\sim q \vee (\sim r \vee p)]$

$$c) \sim[\sim q \rightarrow \sim p] \wedge [q \rightarrow \sim(p \rightarrow r)]$$

18. La proposición $(p \vee q) \leftrightarrow (r \wedge s)$ es verdadera; teniendo r y s valores veritativos opuestos, se afirma que

- a) $[\{(\sim p) \wedge (\sim q)\} \vee (r \wedge s)] \wedge p$ es verdadera
 b) $[\sim(p \vee q) \wedge (r \vee s)] \vee (\sim p \wedge q)$ es falsa
 c) $[(\sim r \wedge \sim s) \rightarrow (p \vee r)] \wedge \sim(r \wedge s)$ es verdadera
 d) $[(\sim r \wedge \sim s) \rightarrow (s \vee p)] \Delta \sim(r \wedge p)$ es verdadera

¿Cuáles son ciertas?

19. ¿Cuáles son Equivalencias Lógicas? :

- a) $\sim(q \rightarrow \sim p) \leftrightarrow (q \vee p)$
 b) $\{(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q\} \leftrightarrow \sim[(p \vee q) \wedge q]$
 c) $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$

20. Si $p \downarrow q$ se define por $(\sim p) \wedge (\sim q)$, entonces ¿a cuál es equivalente $\sim(p \leftrightarrow q)$? :

- a) $[(\sim p) \downarrow q] \vee [q \downarrow p]$, c) $[(\sim p) \downarrow (\sim q)] \vee [p \downarrow q]$
 b) $[(\sim p) \downarrow q] \vee [(\sim q) \downarrow p]$

21. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones

- a) $\sim[p \wedge (\sim q) \wedge (\sim r)]$, b) $(p \wedge \sim q) \vee r$
 c) $(r \vee q) \wedge \sim(\sim r \wedge q)$, d) $(\sim p) \vee q \vee r$

son equivalentes a : $(p \rightarrow q) \rightarrow r$?.

22. Si $p \downarrow q$ significa "ni p y ni q ", ¿cuáles de las siguientes proposiciones son Tautologías (siempre verdaderas) ? :

- a) $[(p \downarrow q) \downarrow (q \downarrow p)] \leftrightarrow (p \vee q)$
 b) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow [p \downarrow q]$
 c) $(p \downarrow q) \leftrightarrow \sim(p \vee q)$
 d) $\sim(p \downarrow q) \leftrightarrow p \Delta q$

23. ¿Cuántas F y cuántas V tiene el resultado de la Tabla de Verdad de:
 $\sim[(p \wedge q) \rightarrow \sim r] \wedge (s \vee \sim s)$ después de simplificarla? .

24. Dada $z : \{(p \rightarrow q) \rightarrow [p \vee (q \wedge r)]\} \rightarrow [q \wedge (p \vee r)]$,

- a) Indique los valores de p y r de modo que si q es F, entonces z es F.
 b) Indique los valores de p y r de modo que si q es V, entonces z es V.

25. Escribir la negación de cada una de las proposiciones siguientes:

- a) Él no es rico, pero es feliz.
 b) Él no es pobre ni es feliz.
 c) Él es bajo pero es muy ágil.
 d) Ni Juan ni su papá viajarán a Tarma a fin de mes.

- e) Él tiene un compás o una regla.
 f) Ambos equipos Alianza y la U irán a la Copa Libertadores.
 g) Si Juan llega a tiempo con los documentos, entonces ambos, Carlos y Jorge, podrán inscribirse en el ciclo de conferencias.
26. Si p, q, r, s, t, w son proposiciones tales que
 a) $(p \wedge \sim r) \leftrightarrow (s \rightarrow w)$ es verdadera,
 b) $(\sim w \rightarrow \sim s)$ es falsa, halle el valor de verdad de las proposiciones:
 c) $(p \wedge q) \vee r \vee s$, d) $(s \leftrightarrow \sim w) \rightarrow (r \vee \sim p)$
 e) $[t \rightarrow (w \vee \sim p)] \wedge \sim(p \rightarrow r)$
27. Expresé la proposición $(p \wedge q) \vee (r \vee s)$ de otra manera, en la que únicamente intervengan los conectivos $(\sim)$ y $(\rightarrow)$.
28. Halle el valor de verdad de la proposición:

$$\left(\sqrt[3]{8} > \sqrt{2} \wedge -8 < 0 \right) \rightarrow [\sqrt{2} \geq \sqrt[3]{8} \vee \left(\frac{1}{\sqrt[3]{8}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \leftrightarrow 8 > 0 \right)]$$
29. Sin usar tablas de verdad, determine si son Lógicamente Equivalentes:
 a) $(\sim s \rightarrow \sim w) \vee (t \rightarrow \sim w)$, b) $w \rightarrow (\sim t \vee s)$
30. Dadas las proposiciones p y q , se define la proposición $p \nabla q$ como:
 $p \wedge (\sim q)$. ¿Cual es equivalente $p \rightarrow \sim q$?:
 a) $\sim(p \nabla q)$ c) $\sim[p \nabla (\sim q)]$ e) $p \nabla (\sim q)$
 b) $(\sim p) \nabla (\sim q)$ d) $(\sim p) \nabla q$
31. a) Utilizando tablas de verdad determinar si la siguiente proposición es una tautología, una contradicción o una contingencia

$$\{[(\sim p \wedge r) \rightarrow q] \leftrightarrow [\sim q \leftrightarrow (p \vee r)]\} \Delta \{(p \leftrightarrow q) \Delta (q \vee \sim r)\}$$

 b) Simplificar: $\sim([p \Delta (\sim q)] \rightarrow (\sim q))$
32. Dado el circuito lógico definido por la tabla:
 analice la verdad o falsedad de las proposiciones siguientes:
- | p | q | p * q |
|---|---|-------|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | F |
- a) $q \equiv V$ es condición necesaria o suficiente para que $(p * q) \equiv V$.
 b) $\sim p * [(p \wedge q) * (r \wedge s)] \equiv r \wedge s$.
 c) Es falso que $(p \rightarrow q) \equiv F$ sea condición necesaria y suficiente para que $(p * q) \equiv F$.
33. Si la proposición $[(p \Delta (\sim q)) \wedge (p \vee q)] \rightarrow [r \leftrightarrow s]$ es falsa, ¿cuáles de las siguientes proposiciones son **necesariamente** verdaderas?
 I) $(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge s)$, II) $[(\sim p) \vee r] \rightarrow (r \vee s)$;
 III) $(r \wedge s) \rightarrow (p \Delta r)$.

34. Sabiendo que la proposición siguiente es falsa:
 $\{ \sim[(p \wedge r) \rightarrow q] \wedge [(p \vee q) \Delta s] \} \rightarrow \{ (s \Delta p) \rightarrow t \}$,
 determine el valor de verdad de las proposiciones:
 a) $\{ [(\sim p \Delta q) \Delta r] \rightarrow [\sim(q \rightarrow (u \rightarrow p))] \} \Delta (p \Delta q)$
 b) $\{ \sim(p \rightarrow q) \Delta [(r \wedge p) \rightarrow \sim(r \vee s)] \} \Delta t$
35. Si p, q, r, s, t, w son proposiciones tales que $(p \wedge \sim r) \leftrightarrow (s \rightarrow w)$ es verdadera, y $(\sim w \rightarrow \sim s)$ es falsa, halle el valor de verdad de:
 $[t \rightarrow (w \vee \sim p) \wedge \sim(p \rightarrow r)]$.

CLAVES DE RESPUESTAS

6. III ; 7. Todas ; 8. Solo (c) ; 9. $\sim q$; 10. $\sim q$;
 11. Solo (a) y (b) ; 12. Todas ; 13. a) F, b) F, c) V ;
 14. Todas, 15. Solo (c) , 16. a) F, b) V, c) V . 18. Solo (c) ,
 19. Solo (b) y (c) ; 20. y 21. Solo (b) ; 22. Solo (a) y (c) ; 23. 1V y 7F,
 24. a) $p : V$, $r : V \text{ o } F$ (cualquiera) ; b) p y r : ambos, cualquier valor.
 25. a) Él es rico o no es feliz ; b) Él es pobre o es feliz ;
 c) Él no es bajo o no es muy ágil ; (d) Al menos uno, Juan o su papá viajará a Tarma a fin de mes ; (e) Él no tiene ni un compás ni una regla.
 f) Al menos uno de los dos equipos, Alianza o la U, no irá a la Copa Libertadores.
 g) Juan llega a tiempo con los documentos, y en tal caso al menos uno, Carlos o Jorge, no podrá inscribirse en el ciclo de conferencias.
 26. $w : F$, $s : V$, $(\sim p) \vee r : V$, entonces c) : V , d) : V , e) : F .
 27. $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (\sim r \rightarrow s)$; 28. V
 29. Sí son Lógicamente Equivalentes ; 30. Solo (c).
 31. a) Contingencia, b) $p \vee (\sim q)$.
 32. Las tres proposiciones son verdaderas. Note que $p * q \equiv q$.
 33. Del dato resulta que las proposiciones r y s tienen valores de verdad opuestos, y que p y q son ambas verdaderas. Luego, solamente las proposiciones (II) y (III) son necesariamente verdaderas.
 34. Las proposiciones p y r resultan verdaderas; q , s y t son falsas. Luego, (a) es Verdadera, y (b) es Verdadera.
 35. El valor de la proposición dada dependerá del valor de la proposición t :
 - Si t es verdadera, la proposición dada resulta **falsa** ;
 - Si t es falsa, la proposición dada resulta **verdadera** .

8. VARIANTES CONDICIONALES

Dadas dos proposiciones p y q , con respecto a la proposición condicional " $p \rightarrow q$ " se pueden presentar las siguientes variantes condicionales que contienen a p y q :

$q \rightarrow p$: llamada la **PROPOSICIÓN RECÍPROCA** de $p \rightarrow q$
 $\sim p \rightarrow \sim q$: llamada la **PROPOSICIÓN INVERSA** de $p \rightarrow q$
 $\sim q \rightarrow \sim p$: llamada la **PROPOSICIÓN CONTRAPOSITIVA** de $p \rightarrow q$

Las tablas de verdad de estas cuatro condicionales son

p	q	CONDICIONAL $p \rightarrow q$	RECÍPROCA $q \rightarrow p$	INVERSA $\sim p \rightarrow \sim q$	CONTRAPOSITIVA $\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Note que una proposición condicional y su recíproca no son Lógicamente Equivalentes.

8.1 TEOREMA Una proposición condicional $p \rightarrow q$ y su contrapositiva $\sim q \rightarrow \sim p$ son Lógicamente Equivalentes.

(Ver la tabla de verdad anterior) .

EJEMPLO.- Consideremos los siguientes enunciados acerca de un Paralelogramo A ,

$p \rightarrow q$: Si A es un cuadrado, entonces A es un rombo

$q \rightarrow p$: Si A es un rombo, entonces A es un cuadrado

De nuestros conocimientos escolares sabemos que $p \rightarrow q$ es verdadero, pero que su recíproco $q \rightarrow p$ es falso.

8.2 APLICACIÓN DEL TEOREMA (8.1).- Sea n un entero positivo. Demostrar que si n^2 es par entonces n es par.

SOLUCIÓN. Definimos p : n^2 es par , q : n es par. Sus negaciones son

$\sim p$: n^2 es impar, $\sim q$: n es impar.

Se nos pide demostrar que $p \rightarrow q$ es verdadera , es decir que “ Si n es impar entonces n^2 es impar ” se cumple . En efecto ,

Si n es impar entonces $n = 2k + 1$ para algún entero $k \geq 0$; luego

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

$$n^2 = 2k_1 + 1 \quad \text{donde} \quad k_1 = 2k^2 + 2k$$

y como k_1 es un entero ≥ 0 , entonces n^2 resulta también ser impar.

Así hemos verificado que $\sim q \rightarrow \sim p$ es verdadera, y por lo tanto que $p \rightarrow q$ es verdadera, que es lo que queríamos demostrar.

A continuación estudiaremos un tipo de condicionales que nos llevarán a procedimientos correctos de deducción lógica.

9. INFERENCIA LÓGICA o ARGUMENTO LÓGICO

Se llama **INFERENCIA LÓGICA** o **ARGUMENTO (LÓGICO)** a toda condicional de la forma

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_k) \rightarrow q \quad (*)$$

donde las **proposiciones** $p_1, p_2, \dots, p_k$ son llamadas **PREMISAS**, y originan como consecuencia otra proposición denotada q , llamada **CONCLUSIÓN**.

Una inferencia puede ser una tautología, una contingencia, o una contradicción.

- 1) Si la condicional $(*)$ es una **tautología**, es decir si es una **Implicación** entonces recibe el nombre de **ARGUMENTO VÁLIDO** o Inferencia Válida.
- 2) Si la condicional $(*)$ no es una Tautología entonces se denomina **FALACIA**.

El valor de verdad de un Argumento se determina como sigue.

DEFINICIÓN. Un argumento $(*)$ es verdadero si q es verdadera cuando todas las premisas $p_1, p_2, \dots, p_k$ son verdaderas. En cualquier otro caso el Argumento $(*)$ es falso.

El Argumento $(*)$ también es denotado por:

$$p_1, p_2, \dots, p_k \vdash q \quad (**)$$

9.1 TEOREMA Si el Argumento es **VÁLIDO** y las premisas $p_1, p_2, \dots, p_k$, son verdaderas, entonces la **CONCLUSIÓN** q es **verdadera**.

PRUEBA. Siendo un argumento (inferencia) válido, la condicional $(*)$

$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_k) \rightarrow q$ es una tautología, en la que $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_k)$ es verdadera (pues cada $p_1, p_2, \dots, p_k$ lo es) de donde la única posibilidad para la **CONCLUSIÓN** q es que sea verdadera (si fuese falsa, la condicional sería falsa y la inferencia **no** sería **válida**, contradiciendo la hipótesis).

👁 **OBSERVACIÓN** Una inferencia no se modifica si una o varias de las proposiciones componentes $p_1, p_2, \dots, p_k, q$, se reemplazan por otra u otras que sean **EQUIVALENTES**.

9.2 NOTACIÓN Un argumento $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_k) \rightarrow q$ también se denota en la forma siguiente:

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \\ \hline \therefore q \end{array}$$

donde los tres puntos $\therefore$ se leen
 “*por lo tanto*”.

EJERCICIO 1.- Demuestre que el siguiente Argumento es Válido:

$$\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

SOLUCIÓN. Probemos que la condicional $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ es una tautología:

$$\begin{aligned} [p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q &\equiv \sim[p \wedge (p \rightarrow q)] \vee q \\ &\equiv \sim[p \wedge (\sim p \vee q)] \vee q \\ &\equiv (\sim p) \vee (p \wedge \sim q) \vee q \\ &\equiv [(\sim p) \vee q] \vee (p \wedge \sim q) \\ &\equiv [\sim(p \wedge \sim q)] \vee (p \wedge \sim q) \quad \equiv \quad V \quad \dots \text{TAUTOLOGÍA} \end{aligned}$$

Esto también puede demostrarse con las tablas de verdad.

EJEMPLO 2.- En un Ejercicio Propuesto teníamos la LEY TRANSITIVA:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$$

por lo tanto el siguiente es un *argumento lógico válido* :

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

9.3 INFERENCIAS VÁLIDAS NOTABLES

MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

9.3.1 LEY DEL MODUS PONENDO PONENS

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

también simbolizado como:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

y cuya validez ha sido demostrada en el Ejercicio 1.

EJEMPLO: Si Luis gana el concurso, entonces viajará a España
Luis gana el concurso

∴ Luis viajará a España

9.3.2 LEY DEL MODUS TOLLENDI

$$[(p \rightarrow q) \wedge (\sim q)] \Rightarrow (\sim p)$$

simbolizado también como:

$$\frac{p \rightarrow q}{\sim q} \quad \therefore \sim p$$

EJEMPLO: Si Luis gana el concurso, entonces viajará a España
Luis no viajó a España

∴ (Por lo tanto) Luis no ganó el concurso

9.3.3 LEY DEL SILOGISMO HIPOTÉTICO

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r) \quad \text{LEY TRANSITIVA}$$

simbolizado también como:

$$\frac{p \rightarrow q}{q \rightarrow r} \quad \therefore p \rightarrow r$$

EJEMPLO: Si no llueve entonces se perderá la cosecha
Si se pierde la cosecha entonces no se podrá cancelar la deuda

∴ (Por lo tanto) Si no llueve, no se podrá cancelar la deuda.

9.3.4 LEY DEL SILOGISMO DISYUNTIVO

$$[(p \vee q) \wedge (\sim p)] \Rightarrow q$$

esquematizada por:

$$\frac{p \vee q}{\sim p} \quad \therefore q$$

EJEMPLO: Gladys tiene un carnet o una Libreta Electoral
Gladys no tiene ningún carnet

∴ (Por lo tanto) Gladys tiene una Libreta Electoral

9.3.5 LEY DEL DILEMA CONSTRUCTIVO

$$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \Rightarrow (q \vee s)$$

esquematzada por:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ \hline p \vee r \\ \hline \therefore q \vee s \end{array}$$

EJEMPLO: Si Pepito toma bebidas heladas, entonces se resfriará
Si Rosa no llega a tiempo, se quedará sin ver la obra
Pepito toma bebidas heladas o Rosa no llegó a tiempo

 $\therefore$ (Por lo tanto) Pepito se resfriará o Rosa se quedará sin ver la obra.

9.3.6 LEYES DE SIMPLIFICACIÓN

$$\begin{array}{ll} \text{a) } p \wedge q \Rightarrow p, & \text{b) } p \wedge q \Rightarrow q \end{array} \quad \text{esquematzadas por}$$

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \end{array} & \begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \end{array} \end{array}$$

EJEMPLO: Ningún estudiante es ocioso y Carlos es un excelente pianista.
Por lo tanto, ningún estudiante es ocioso.

9.3.7 LEY DE LA ADICIÓN : $p \Rightarrow (p \vee q)$

EJEMPLO: Todos los poetas son desordenados. Luego, los poetas son desordenados o son temperamentales.

EJERCICIO 1.- Para cada conjunto dado de premisas encontrar una Conclusión adecuada, de modo que la Inferencia sea válida:

$$\text{a) } (p \rightarrow \sim q), (r \rightarrow q) ; \quad \text{b) } (p \rightarrow \sim q), (r \rightarrow p), q$$

SOLUCIÓN. De las *implicaciones* ya conocidas tenemos que:

a) Si reemplazamos $(r \rightarrow q)$ por su equivalente $(\sim q \rightarrow \sim r)$ entonces:

$$[(p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \rightarrow \sim r)] \Rightarrow (p \rightarrow \sim r)$$

por la Ley del Silogismo Hipotético.

b) Por conmutatividad tenemos

$$\begin{array}{ll} [(r \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow \sim q) \wedge q] & \\ \Rightarrow [(r \rightarrow \sim q) \wedge q] & \text{(Ley del Modus Ponendo Ponens)} \\ \Rightarrow \sim r & \text{(Ley del Modus Tollendo Tollens)} \end{array}$$

9.4 MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

Cuando se utiliza un argumento lógico válido en la forma:

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_k \Rightarrow q \quad (I)$$

para una cierta demostración, entonces se dice que se ha empleado un **Método Directo de Demostración**.

En cambio, si consideramos la **negación de la conclusión** $\sim q$ y de **una de las premisas** $p_1, p_2, \dots, p_k$, digamos de p_1 y se construye el

argumento:
$$[(\sim q) \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_k] \rightarrow \sim p_1 \quad (II)$$

probaremos que este Argumento Lógico (II) es equivalente al Argumento (I):

$$\begin{aligned} & [(\sim q) \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_k] \rightarrow \sim p_1 \\ & \equiv \sim [(\sim q) \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_k] \vee \sim p_1 \equiv q \vee [\sim (p_2 \wedge \dots \wedge p_k)] \vee \sim p_1 \\ & \equiv q \vee [\sim (p_2 \wedge \dots \wedge p_k \wedge p_1)] \equiv \sim (p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_k) \vee q \\ & \equiv [p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_k] \rightarrow q \quad : \text{ ARGUMENTO (I) } \end{aligned}$$

9.4.1 DEFINICIÓN Cuando se desea emplear el Argumento Válido (II) en una demostración, se dice que se está aplicando el **MÉTODO INDIRECTO** o Método por Reducción al Absurdo.

 **NOTA 1.-** La aplicación del **MÉTODO INDIRECTO** consiste en considerar ahora como premisa a la negación de la conclusión, es decir $\sim q$, y se trata de inferir válidamente la negación de **alguna de las premisas**, considerando las demás verdaderas. Para efectos de la prueba previa se trató de inferir $\sim p_1$, la negación de la premisa p_1 .

EJERCICIO 1.- Utilice los dos métodos: Directo e Indirecto, para comprobar la validez del argumento:

$$\begin{array}{l} q \rightarrow p \\ q \vee s \\ \hline \sim s \\ \hline \therefore p \end{array}$$

MÉTODO DIRECTO:

$$\begin{aligned} & [(q \rightarrow p) \wedge (q \vee s) \wedge \sim s] \rightarrow p \equiv [(\sim q \vee p) \wedge (q \wedge \sim s)] \rightarrow p \\ & \equiv [p \wedge q \wedge \sim s] \rightarrow p \equiv \sim (q \wedge \sim s \wedge p) \vee p \\ & \equiv \sim (q \wedge \sim s) \vee (\sim p \vee p) \equiv \sim (q \wedge \sim s) \vee V \equiv V \quad \text{TAUTOLOGÍA} \end{aligned}$$

MÉTODO INDIRECTO: Probaremos que la siguiente condicional es Tautológica

$$\begin{aligned} & [(q \rightarrow p) \wedge (\sim p) \wedge (\sim s)] \rightarrow \sim (q \vee s) \equiv \\ & \equiv [(\sim q \vee p) \wedge (\sim p) \wedge (\sim s)] \rightarrow \sim (q \vee s) \\ & \equiv [\{(\sim q \wedge \sim p) \vee F\} \wedge (\sim s)] \rightarrow \sim (q \vee s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\equiv \sim(q \vee p \vee s) \rightarrow \sim(q \vee s) \quad \equiv \quad (q \vee p \vee s) \vee \sim(q \vee s) \\ &\equiv p \vee [(q \vee s) \vee \sim(q \vee s)] \quad \equiv \quad p \vee V \quad \equiv \quad V \quad \dots \text{TAUTOLOGÍA} \end{aligned}$$

PROBLEMA 2.- Demostrar que: si $q = \frac{m}{n}$, con m, n enteros primos entre sí (no tiene factores comunes, excepto el 1), entonces $q^2 \neq 2$.

SOLUCIÓN. Supongamos que se cumple la negación de la tesis, es decir que

$$q^2 = 2 \text{ para } q = \frac{m}{n}, \text{ con } m \text{ y } n \text{ enteros primos entre sí,}$$

$$\text{luego } q^2 = 2 \Rightarrow (m/n)^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \quad \dots (*)$$

$$\Rightarrow m^2 \text{ es par, pues } n \text{ es un entero } \Rightarrow m \text{ también es par}$$

(por un Ejercicio anterior), $m = 2k_1$ para algún entero k_1

Luego, en $(*)$: $4k_1^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k_1^2 \Rightarrow n^2 \text{ es par } \Rightarrow n \text{ es par}$
también (por un Ejercicio previo) $\Rightarrow n = 2k_2$ para algún entero k_2 .

Resulta que ambos m y n tienen como factor común al número 2 contradiciendo la hipótesis acerca de m y n , de ser primos entre sí. Así concluye nuestra demostración, mediante una aplicación del **método indirecto** o por Reducción al Absurdo.

Hemos demostrado que **no existe ningún número racional q tal que $q^2 = 2$** .

9.5 COROLARIO El número $\sqrt{2}$ no es racional.

9.6 APLICACIONES A ENUNCIADOS

EJEMPLO 1.- Determine la validez de los argumentos:

a) Si llueve, Julia se resfriará No llovió $\therefore$ Julia no se resfrió	$\vdash$	b) Si llueve, Julia se resfriará Julia no se resfrió $\therefore$ No llovió
--	----------	--

SOLUCIÓN.- Sean p : Llueve, q : Julia está resfriada. Simbólicamente,

$$\text{a) } [(p \rightarrow q) \wedge (\sim p)] \rightarrow \sim q, \quad \text{b) } [(p \rightarrow q) \wedge (\sim q)] \rightarrow \sim p$$

$$\text{a) } \equiv \sim\{[(\sim p) \vee q] \wedge \sim p\} \vee (\sim q) \equiv \sim\{(\sim p) \vee (q \wedge \sim p)\} \vee (\sim q)$$

$$\equiv [p \wedge (\sim q \vee p)] \vee (\sim q) \equiv (p \vee \sim q) \wedge (p \vee \sim q)$$

$$\equiv p \vee \sim q. \quad \text{No es una Tautología pues depende de los valores que tomen } p \text{ y } q. \text{ Así, (a) no es válido, es una } \textbf{falacia}.$$

$$\text{b) } [(p \rightarrow q) \wedge (\sim q)] \rightarrow \sim p \equiv \sim\{[(\sim p) \vee q] \wedge \sim q\} \vee (\sim p)$$

$$\equiv \sim\{(\sim p) \wedge (\sim q)\} \vee (\sim p) \equiv p \vee q \vee \sim p \equiv (p \vee \sim p) \vee q$$

$\equiv V \vee q \equiv V \dots$ **Tautología** . Luego , (b) es **válido**.

En este caso (b) podría aplicarse la Ley del Modus Tollendo Tollens directamente.

EJEMPLO 2.- Compruebe la validez del argumento:

Si estudio, entonces no me desaprueban Matemáticas
Si no voy a nadar, entonces estudio
Pero, me desaprobaron Matemáticas

∴ (Por lo tanto) Me fui a nadar

SOLUCIÓN. p : Yo estudio , q : Me desaprueban Matemáticas
 r : Me voy a nadar.

El argumento es $[(p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \rightarrow p) \wedge q] \rightarrow r$. Luego,

$$[(p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \rightarrow p) \wedge q] \equiv [(\sim r \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow \sim q) \wedge q]$$

$$\Rightarrow [(\sim r \rightarrow \sim q) \wedge q] \Rightarrow r$$

SILOG. HIP.

MODUS TOLL.

Así, hemos comprobado que el argumento dado es una **IMPLICACIÓN** (condicional tautológica), es decir que es un **ARGUMENTO VÁLIDO**.

EJERCICIO 3.- Verifique la validez del argumento:

En el cumpleaños de mi esposa la llevaré a cenar afuera
Es el cumpleaños de mi esposa o trabajo hasta tarde
Hoy no llevé a mi esposa a cenar afuera

Por lo tanto, hoy trabajé hasta tarde

SOLUCIÓN. p : Es el cumpleaños de mi esposa ,
 q : La llevaré a cenar afuera , r : Hoy trabajo hasta tarde

Verificaremos que el argumento : $[(p \rightarrow q) \wedge (p \vee r) \wedge (\sim q)] \rightarrow r$ (*) es una Tautología. En efecto,

$$[(p \rightarrow q) \wedge (p \vee r) \wedge \sim q] \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (\sim q) \wedge (p \vee r)]$$

$$\Rightarrow [(\sim p) \wedge (p \vee r)] \equiv [(\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge r)]$$

MODUS TOLLENS.

$$\equiv \sim p \wedge r \Rightarrow r \quad (\text{Ley de Simplificación})$$

Por lo tanto, $[(p \rightarrow q) \wedge (p \vee r) \wedge (\sim q)] \Rightarrow r$ es una Tautología, de modo que el argumento dado es **válido**.

 **NOTA 2** Del desarrollo de la Solución del Ejercicio previo, vemos que el siguiente es también un **argumento válido**:

En el cumpleaños de mi esposa la llevaré a cenar afuera
 Es el cumpleaños de mi esposa o trabajo hasta tarde
 Hoy no llevé a mi esposa a cenar afuera

 $\therefore$ Por lo tanto, hoy no es el cumpleaños de mi esposa

SERIE DE EJERCICIOS

1. Verifique la validez de los siguientes argumentos:

a)
$$\frac{p \wedge q \quad \sim p \rightarrow q}{q}$$

b)
$$\frac{(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s) \quad (\sim q) \vee (\sim s)}{(\sim p) \vee \sim q}$$

c)
$$\frac{p \wedge (p \vee q) \quad (p \vee q) \rightarrow r \quad r \rightarrow s}{s}$$

d)
$$\frac{r \rightarrow \sim q \quad p \rightarrow q \quad \sim r \rightarrow s}{p \rightarrow s}$$

e)
$$\frac{p \quad (\sim p \vee \sim s) \rightarrow (\sim p \wedge \sim r)}{s}$$

SUG: Algunos se prueban mejor por el método indirecto.

2. Sea n un número entero, demuestre que si n^2 es múltiplo de 3, entonces n es también múltiplo de 3.

SUG: n no múltiplo de 3 equivale a que $n = 3k + 1$ ó $n = 3k + 2$, para k entero. Probar para cada caso.

3. Sea n un entero. Demuestre que si n^2 es múltiplo de 5, entonces n es también múltiplo de 5.

4. Sea n un entero. Demuestre que si n^2 es múltiplo de 6, entonces n también es múltiplo de 6.

SUG: n es múltiplo de 6 si y solo si n es $2 \wedge 3$

5. Sea n un entero. Demuestre que si n^3 es múltiplo de 2, entonces n es múltiplo de 2.

6. Demuestre que no existe ningún número racional q tal que: $q^2 = 3$.

7. Demuestre que no existe ningún número racional q tal que: $q^3 = 2$.

8. Dados los argumentos siguientes, determine en cada caso si es un argumento válido o si es una falacia traduciendo previamente a símbolos:

a) Si 6 es impar, entonces 4 no divide a 7
 5 no es primo o 4 divide a 7
 Pero 5 es primo

 $\therefore$ 6 es par (no impar)

- b) Trabajo o apruebo Matemáticas
Si trabajo no puedo estudiar
Aprobé Matemáticas

∴ Por lo tanto, yo estudié

- c) Si trabajo, no puedo estudiar
Estudio o apruebo Matemáticas
Trabajé

∴ **Por lo tanto, aprobé Matemáticas**

RPTA: a) Válido: $\{[(p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \vee q) \wedge r] \rightarrow \sim p\} \equiv V$

b) Falacia: $\{[(p \vee r) \wedge (p \rightarrow \sim q) \wedge r] \rightarrow q\} \equiv (\sim r) \vee q$

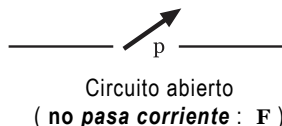
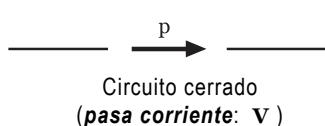
c) Válido: $\{[(p \rightarrow \sim q) \wedge (q \vee r) \wedge p] \rightarrow r\} \equiv V$

10. CIRCUITOS BOOLEANOS (LÓGICOS)

Un circuito eléctrico es un ensamblaje de interruptores automáticos que permiten el paso de la corriente eléctrica, o la interrumpen.

Se puede representar un interruptor mediante una proposición p , y viceversa, de modo que se identifique el valor **verdadero** de la proposición p con el **paso de la corriente**, en cuyo caso se dice que “**el circuito está cerrado**”.

Se identifica el valor **falso** con la **interrupción de la corriente**, y se dice que “**el circuito está abierto**”.



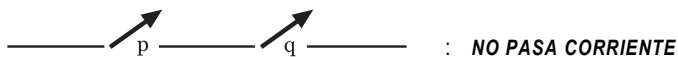
Si en un complejo de interruptores aparecen tanto p como $\sim p$, entonces: “cuando por el interruptor p está pasando corriente, por el interruptor $\sim p$ estará *interrumpido el paso de la corriente*; y cuando por p se encuentre interrumpido el paso de la corriente, por $\sim p$ estará *circulando la corriente*”

 **NOTA 1.-** Cuando esté pasando la corriente denotaremos esta situación con el valor V o sino también con el número 1 . Y cuando no esté circulando la corriente denotaremos esta situación con el valor F (Falso) o sino con el número 0 .

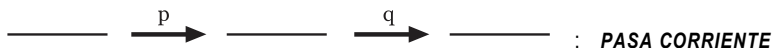
Es precisamente en base a estos dos valores 0 y 1 en que se fundamenta la teoría del funcionamiento de las calculadoras electrónicas y las computadoras.

$$1 \equiv V \text{ (verdadero)} ; \quad 0 \equiv F \text{ (falso)}$$

10.1 CIRCUITOS EN SERIE Son aquellos provistos de dos interruptores p y q , conectados en **SERIE** :

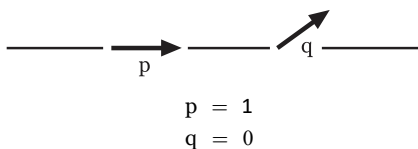


de modo que en todo el circuito pasará la corriente **solamente en el caso en que ambos** p y q **se encuentren cerrados** (ambos con el valor 1), como sigue:



Esta situación corresponde a la tabla de verdad de la **CONJUNCIÓN** $p \wedge q$.

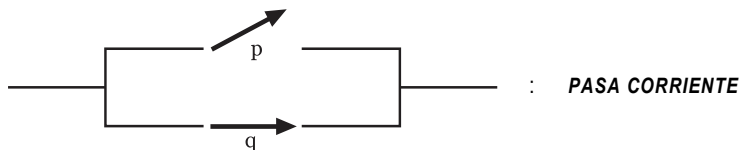
Aquí, vemos que basta que uno de estos interruptores esté abierto (0) para que no circule la corriente en todo el circuito:



p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A la expresión $p \wedge q$ se le llama la **FUNCIÓN BOOLEANA** del **CIRCUITO EN SERIE**.

10.2 CIRCUITOS EN PARALELO Son aquellos provistos de dos interruptores p y q , conectados en **PARALELO**:

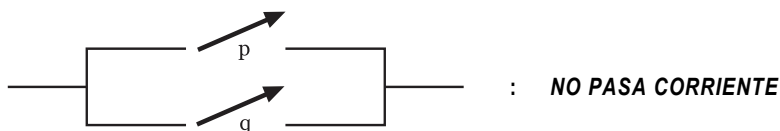


Para que circule corriente por este circuito es suficiente que alguno de los interruptores p o q **esté cerrado** (1); y solamente dejará de circular la corriente si **ambos interruptores están abiertos** (ambos con el valor 0).

Así, este circuito corresponde a la tabla de verdad de la **DISYUNCIÓN** : $p \vee q$

A la expresión $(p \vee q)$ se le denomina la **FUNCIÓN BOOLEANA** del **CIRCUITO EN PARALELO**.

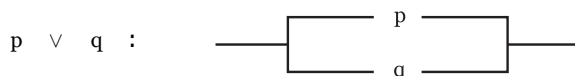
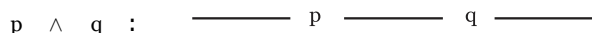
p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0



10.3 SIMBOLOGÍA.-

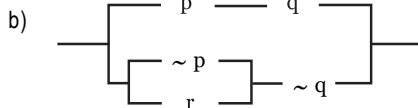
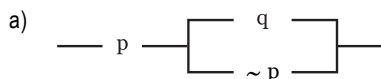
De aquí en adelante representaremos a un interruptor p simplemente como: $\text{---} p \text{---}$

EJEMPLOS:



NOTA 2.- Una **TAUTOLOGÍA** se representa por **un circuito siempre cerrado** (en el que la corriente siempre está circulando). En las computadoras no son de utilidad, evidentemente.

PROBLEMA 1.- Representar mediante Funciones Booleanas los circuitos:



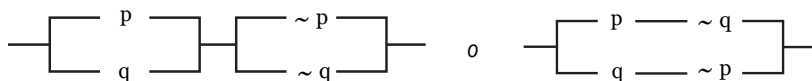
RPT: a) $p \wedge (q \vee \sim p)$ b) $(p \wedge q) \vee \{[(\sim p) \vee r] \wedge \sim q\}$

PROBLEMA 2.- Construir el circuito Lógico de las Funciones Booleanas siguientes:

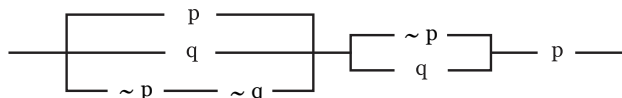
a) $p \rightarrow q$, b) $p \Delta q$

SOLUCIÓN. a) $p \rightarrow q \equiv (\sim p) \vee q$
(paralelo)

b) $p \Delta q \equiv (p \vee q) \wedge [(\sim p) \vee (\sim q)] \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$:



PROBLEMA 3.- Simplificar el siguiente circuito:

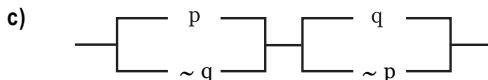
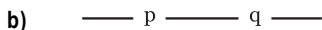
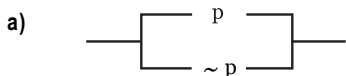


SOLUCIÓN. La función Booleana del circuito dado es:

$$\begin{aligned}
 & [p \vee q \vee \{(\sim p) \wedge (\sim q)\}] \wedge [(\sim p) \vee q] \wedge p, \\
 \equiv & [\{p \vee (\sim p) \vee q\} \wedge (p \vee q \vee \sim q)] \wedge [(\sim p) \vee q] \wedge p \\
 \equiv & [V \wedge V] \wedge [(\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p)] \equiv V \wedge [F \vee (q \wedge p)] \\
 \equiv & F \vee (p \wedge q) \equiv (p \wedge q)
 \end{aligned}$$

El circuito simplificado equivalente resulta: $\text{---} p \text{---} q \text{---}$

PROBLEMA 4.- Dada la función Booleana: $(p \Delta q) \rightarrow (q \Delta p)$,
¿a cuál de los siguientes circuitos corresponde?



SOLUCIÓN.- Como se sabe que: $(p \Delta q) \equiv (q \Delta p)$ (**conmutativa**), entonces $(p \Delta q) \rightarrow (p \Delta q) \equiv [\sim(p \Delta q)] \vee (p \Delta q)$
 $\equiv V \equiv p \vee (\sim p)$

Por lo tanto, la función Booleana dada corresponde al circuito (a).

PROBLEMA 5.- En el Congreso, una comisión compuesta de tres personas desea emplear un circuito eléctrico para registrar votaciones mayoritarias, simples y secretas.

Construya un circuito que controle tales votaciones con solo 5 interruptores, de modo que cada miembro de la comisión pueda: **accionar** (cerrar) el interruptor asignado para decir “**SÍ**” con su voto, o **no accionar** (mantenerlo abierto) su interruptor asignado para decir “**NO**” con su voto, y que se encienda una señal si la mayoría de los miembros vota afirmativamente. No se admiten abstenciones.

SOLUCIÓN.- Denotemos: p , q , r los interruptores correspondientes a cada uno de los miembros de la comisión, respectivamente. El valor que tomará cada uno de estos interruptores será:

1 , *si el voto corresponde al SÍ*

0 , *si el voto corresponde al NO*

El circuito va a ser diseñado de modo que **encienda una señal** (con valor 1) **si la mayoría** (dos o tres) **de los miembros vota por el SÍ, y debe estar apagado en cualquier otro caso** (con el valor: 0).

Así, el funcionamiento de tal circuito estará gobernado por la siguiente tabla de combinaciones de votos de los tres miembros:

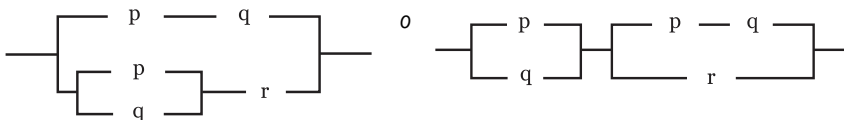
p	q	r	NUMERO DE MIEMBROS QUE VOTAN: SÍ	CIRCUITO (señal)
1	1	1	3	1 (*)
1	1	0	2	1 (*)
1	0	1	2	1 (*)
1	0	0	1	0
0	1	1	2	1 (*)
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

De la tabla construimos la Función Booleana del circuito buscado:

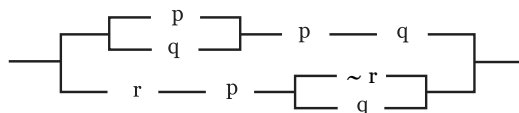
$$[p \wedge q \wedge r] \vee [p \wedge q \wedge (\sim r)] \vee [p \wedge (\sim q) \wedge r] \vee [(\sim p) \wedge q \wedge r]$$

$$(\text{ y simplificando: }) \equiv (p \wedge q) \vee [(p \vee q) \wedge r] \equiv (p \vee q) \wedge [(p \wedge q) \vee r].$$

Las dos últimas expresiones corresponden a dos circuitos equivalentes, cada uno con 5 interruptores, y con la propiedad requerida, los cuales son:



PROBLEMA 6.- Si el costo de cada llave en la instalación mostrada es de 10 soles ¿en cuánto se reducirá el costo de esta instalación si se reemplaza este circuito por uno equivalente más simple?



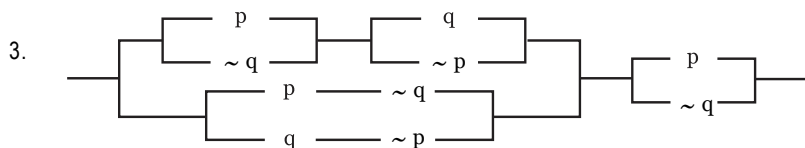
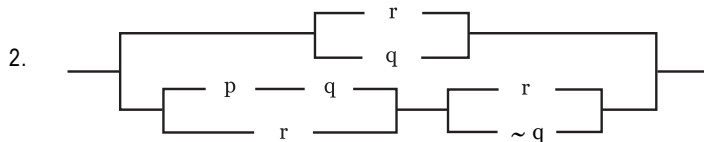
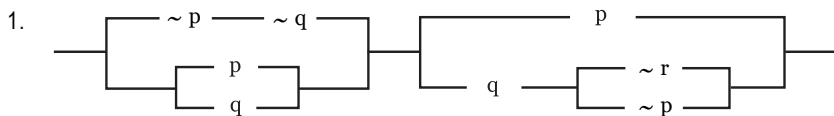
SOLUCIÓN. La función Booleana del circuito es:

$$\begin{aligned} [(p \vee q) \wedge p \wedge q] \vee [r \wedge p \wedge ((\sim r) \vee q)] &\equiv \\ &\equiv (p \wedge q) \vee [p \wedge (r \wedge q)] \equiv (p \wedge q) : \\ &\text{—— } p \text{ —— } q \text{ ——} \end{aligned}$$

Este circuito reducido y equivalente permite ahorrar 6 de las 8 llaves, lo que corresponde a un ahorro de S/. 60.00. Así, el costo total de la instalación será tan solo de S/. 20.00 (**dos llaves**).

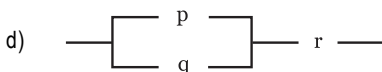
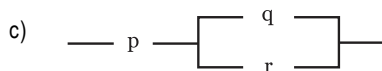
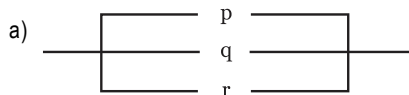
SERIE DE EJERCICIOS

Simplifique los siguientes circuitos, (1), (2) y (3) :



4. ¿A cuál, o cuáles, de los siguientes circuitos le corresponde la proposición:

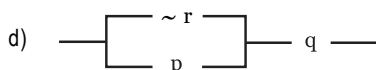
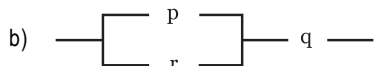
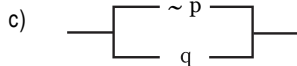
$$\sim [p \rightarrow \sim (q \vee r)] ?$$



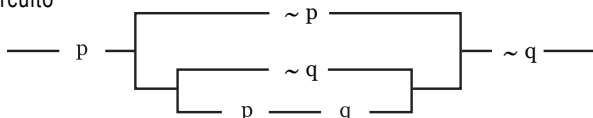
5. ¿A cuál o cuáles de los circuitos siguientes equivale la proposición:

$$\{[(r \vee q) \wedge p] \vee \sim r\} \wedge q \text{ ?}$$

a) — p — q — r —



6. El circuito



¿A cuál de las siguientes proposiciones le corresponde?

a) $p \wedge q$,

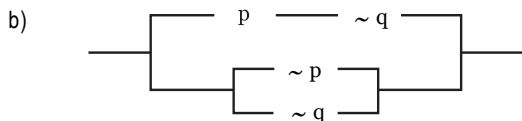
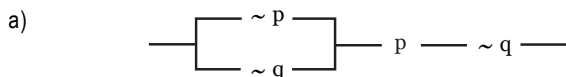
b) $\sim(p \rightarrow q)$

c) $p \vee q$,

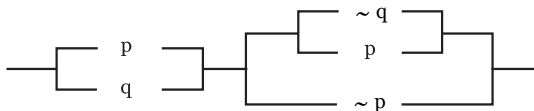
d) $p \rightarrow (\sim q)$

7. Si la tabla de verdad de cierta proposición es como la del esquema adjunto, ¿a cuál(es) de los siguientes circuitos le corresponde?

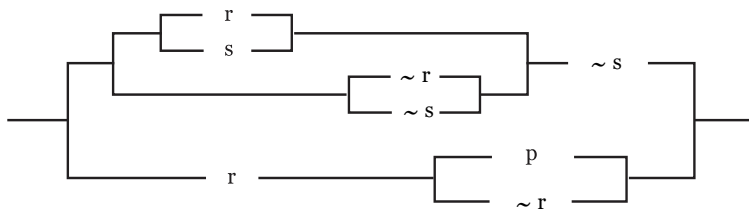
p	q	?
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V



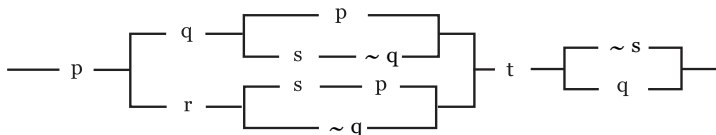
c)



8. Halle el circuito lógico más simple que represente a:

9. Halle el circuito lógico más simple correspondiente a: $(\sim p) \leftrightarrow [p \rightarrow \sim q]$

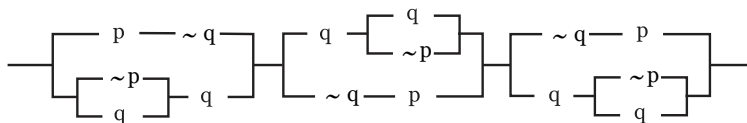
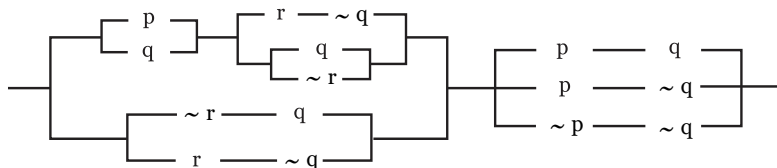
10. Dado el siguiente circuito traducirlo al lenguaje lógico formal y transformarlo en un circuito equivalente más simple:



11. Halle el circuito lógico más simple para la siguiente función Booleana:

$$\sim[(p \vee \sim q) \vee (p \wedge \sim r) \vee \sim(r \vee q \vee \sim p)]$$

12. Simplifique el siguiente circuito lógico :

13. Sea M la proposición más simplificada del circuito

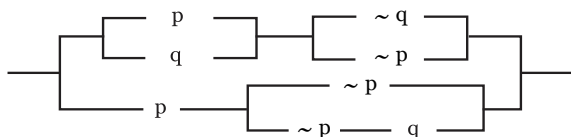
y sea N la proposición más simplificada del circuito correspondiente a:

$$[(p \wedge s) \vee (p \wedge \sim s)] \wedge [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)],$$

construir el circuito lógico más simplificado que corresponde a la proposición :

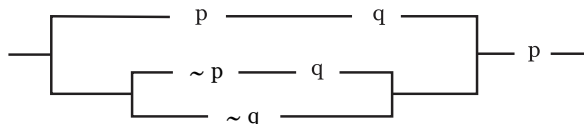
$$N \rightarrow M.$$

14. Sea A la proposición lógica más simple del circuito



y B la proposición lógica más simple de la proposición: $(p * q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$ donde $[(p * q) \rightarrow F]$ es equivalente a: $(p \rightarrow q)$. Simplifique las siguientes proposiciones: a) $p * q$, b) B , c) $A \leftrightarrow B$.

15. Simplificar el circuito lógico



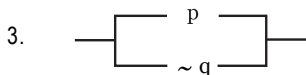
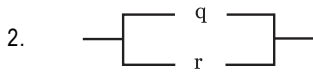
16. Dadas las siguientes premisas, hallar la conclusión

- | | | |
|-------------------|-------------------------------|--|
| a) $p \vee q$ | b) $p \rightarrow (q \vee r)$ | c) $(\sim p) \wedge (\sim q) \rightarrow \sim r$ |
| $\sim t$ | $\sim(\sim p)$ | s |
| $q \rightarrow t$ | $\sim r$ | $\sim p$ |
| | | $\sim(s \wedge \sim r)$ |

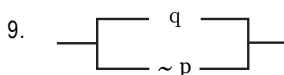
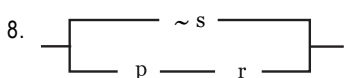
- | | | |
|--|---------------------------|--------------------------------|
| d) $\sim p \rightarrow \sim(q \vee r)$ | e) $\sim p \rightarrow r$ | f) $\sim(p \wedge q)$ |
| $s \rightarrow (q \vee r)$ | $\sim r \vee s$ | $\sim(r \vee s) \rightarrow q$ |
| $\sim p$ | $p \rightarrow q$ | p |
| $\sim s \rightarrow t$ | $\sim q$ | $\sim r$ |

- | | |
|---------------------------------|-----------------------------------|
| g) $p \rightarrow (q \wedge s)$ | h) p |
| $\sim r$ | $(p \wedge q) \rightarrow \sim r$ |
| $q \wedge s \rightarrow r$ | r |

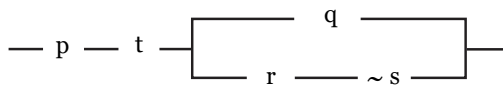
CLAVES DE RESPUESTAS



4. Solo (c) ; 5. Solo (d) ; 6. Solo (b) ; 7. Solo (b): $\sim(p \wedge q)$.



10. $p \wedge ([q \wedge \{p \vee (s \wedge \sim q)\}]) \vee [r \wedge \{(s \wedge p) \vee \sim q\}] \wedge$
 $t \wedge (q \vee \sim s) \equiv p \wedge t \wedge [q \vee (r \wedge \sim s)]$



11. $q \wedge (\sim p)$:

12. $p \vee q$:

13. $M: p \vee [r \wedge \sim q]$, $N: p \wedge (q \vee r)$.

Luego, $N \rightarrow M \equiv V$ (Tautología)

y su circuito correspondiente es el de un circuito siempre cerrado (por el que siempre está pasando la corriente).

14. Como $A \equiv [p \vee q] \wedge [(\sim p) \vee (\sim q)] \equiv p \Delta q$,

$$B \equiv p \wedge (\sim q) , \text{ pues } p * q \equiv p \wedge \sim q ,$$

$$\text{entonces } A \leftrightarrow B \equiv p \vee \sim q .$$

- 15.

16. a) p ; b) q ; c) q ; d) t ;
 e) s ; f) s ; g) $\sim p$; h) $\sim q$.