

ESTUDO É
GEOMETRIA
tomo I

EUCLIDIANO
TRIÂNGULOS

ESPAÇIAL
QUADRILÁTEROS
SIMETRIA
TRANSFORMAÇÕES
CÍRCULOS
PRIGONOMETRIA
DETA
TUDO É
ÁR
FORMA
PIANA
ANALÍTICA
PROJEÇÕES
VOLUMES
CONICAS
DISTÂNCIAS
KLEIN
LOBACHEWIKI

Rauryson Alves

TUDO É GEOMETRIA

TOMO I

1^a Edição

Natal-RN
José Rauryson Alves Bezerra
2015

Catálogo da publicação na fonte.

Bezerra, José Rauryson Alves.

Tudo é Geometria / José Rauryson Alves Bezerra. - 1. ed. - Natal: José Rauryson Alves Bezerra, 2015.

295 p.

1. Geometria. 2. Problemas - Matemática. 3. Exercícios - Matemática.

Todos os direitos reservados

A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação dos direitos autorais. (Lei 9,610/98)

“Imagine se seu advogado dissesse não saber ortografia, se seu dentista orgulhosamente declarasse não falar qualquer língua estrangeira, se o gerente de seu banco admitisse, com alegria, sempre confundir Voltaire com Molière. Com muita razão estas pessoas seriam consideradas ignorantes. O mesmo não se passa com a matemática. Qualquer deficiência neste ramo do conhecimento é aceita com compreensão por todos.”

George G. Szpiro

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é fruto da compilação de minhas notas de aula. Elas se transformaram em um livro graças a insistência de meus alunos e amigos em me convencer de que sou um bom professor, desejo agradecer a todos eles. Em especial a Amanda Dal Ross, Gibran Me-deiros, André Gustavo, Carlos André, Paulo Sobrinho, Aleximara e a Diogo Lira.

Rauryson Alves

SUMÁRIO

Introdução	11
1 IDEIAS FUNDAMENTAIS	13
1.1 Conceitos Primitivos	14
1.1.1 Notação - ponto, reta e plano	17
1.2 Axiomas	20
1.2.1 Axiomas de Incidência	20
1.2.2 Axiomas de Ordem	28
1.2.3 Axiomas de Continuidade	32
1.2.4 Axiomas de Congruência	55
1.2.5 Axioma das Paralelas	70
1.3 Geometrias Não Euclidianas	74
1.3.1 Geometria Esférica ou Elíptica	74
1.3.2 Geometria Hiperbólica	75
Exercícios	79
2 AS FORMAS	109
2.1 Formas planas	112
2.1.1 Quadriláteros	113
2.1.2 Polígonos	117
2.1.3 Círculos e suas partes	125
2.1.4 Elipse	127
2.1.5 Hipérbole	131
2.1.6 Parábola	134
2.2 Formas Espaciais	137
2.2.1 Poliedros	139
2.2.2 Sólidos de Revolução	148
2.3 Seções Planas em sólidos espaciais	153
2.3.1 Seções Cônicas	155
2.3.2 Seções Meridianas	157
2.3.3 Seções Transversais	158

Sumário

2.4	Noções de Geometria Projetiva	162
2.4.1	Sistema Cônico ou Central	165
2.4.2	Sistema de Projeção Cilíndrica ou Paralela	165
2.4.3	Projeção Ortogonal	166
2.4.4	Projeção Cartográfica	169
2.5	Transformações Isométricas	171
2.5.1	Rotação	172
2.5.2	Translação	174
2.5.3	Reflexão	175
2.5.4	Transformações Isométricas Compostas	176

Exercícios 183

3	CALCULANDO DISTÂNCIAS	213
3.1	Teorema de Tales	213
3.2	Semelhança	216
3.2.1	Semelhança de Triângulos	218
3.2.2	Semelhança de Polígonos	224
3.2.3	Semelhança no Espaço	225
3.2.4	Homotetia	227
3.3	Elementos Métricos	228
3.3.1	Elementos Métricos nos Triângulos	228
3.3.2	Elementos métricos nos Polígonos Regulares	240
3.3.3	Potência de um ponto	241
3.4	Teorema de Pitágoras	245
3.4.1	Aplicações nos triângulos equiláteros	248
3.4.2	Aplicações nos quadrados e cubos	251
3.4.3	Aplicações nos polígonos regulares	253
3.4.4	Aplicações nas formas espaciais	255
3.4.5	Cones retos	259

Exercícios 261

Referências 291

INTRODUÇÃO

O Exame Nacional do Ensino Médio (**Enem**) foi criado em 1998 com o objetivo de avaliar o desempenho do estudante ao fim da educação básica, buscando contribuir para a melhoria da qualidade desse nível de escolaridade. A partir de 2009, ele passou a ser utilizado também como mecanismo de seleção para o ingresso no ensino superior.

Ao mudarem o uso do instrumento foram implementadas mudanças no Exame¹ na tentativa de contribuir para a democratização das oportunidades de acesso às vagas oferecidas por Instituições Federais de Ensino Superior (IFES).

Respeitando a autonomia das universidades, a utilização dos resultados do Enem para acesso ao ensino superior pode ocorrer como fase única de seleção ou combinado com seus processos seletivos próprios. Além disso, o Enem também é utilizado para o acesso a programas oferecidos pelo Governo Federal, tais como o Programa Universidade para Todos – ProUni - e o Fundo de Financiamento Estudantil - FIES.

Nesse contexto, a Matemática, tema já de grande importância para a formação de um estudante, ganhou uma relevância muito maior. É sabido que a disciplina costuma ser um “calo” na vida da maior parte dos estudantes. Esse dado é confirmado por números nacionais - a nota da prova de Matemática é sempre a de maior valor relativo entre as quatro áreas no Enem- e também por dados internacionais - no Pisa (Programa Internacional de Avaliação de Alunos) Matemática foi a única disciplina em que os brasileiros apresentaram avanço no desempenho, ainda que pequeno e deixando o Brasil, que passou de 386 pontos em 2009 para 391 em 2014, muito abaixo da média da OCDE que é de 494 pontos.

O mercado editorial e os autores têm feito um grande esforço para adaptar seus livros à forma particular como a Matemática é cobrada no Enem. A maior parte ainda esbarra nos paradigmas que foram estabelecidos ao longo

1 As mudanças mais relevantes foram a divisão da prova em quatro grandes áreas: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas Tecnologias. Além disso a prova que possuía 200 questões passou a ter apenas 180, sendo 45 de cada área.

dos anos. A construção deste livro foi pensada objetivando atender algumas demandas:

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES - Ao invés de encontrar os assuntos divididos de forma seriada, como é o caso da maior parte dos livros de Ensino Fundamental e Ensino Médio, você encontrará os temas organizados segundo a matriz de referência do Enem.

PROBLEMAS CARACTERÍSTICOS - Um cuidadoso trabalho de seleção foi feito para colocar nesta obra as questões dos exames passados e ainda questões com características semelhantes. Além de uma grande quantidade de questões inéditas, elaboradas pelo próprio autor.

REVISÃO RECORRENTE - Considerando a dificuldade de alguns alunos com os temas mais básicos, a obra traz de forma detalhada as ideias necessárias para superar este problema. Ainda tem-se recorrência de tópicos para garantir ao aluno a absorção das ideias.

DEMONSTRAÇÃO E INTUIÇÃO - É importante comentar que o leitor não deve esperar demonstrações rigorosas de teoremas da geometria, mas vez ou outra vai se deparar com algumas nuances do método axiomático usado para construir o tema.

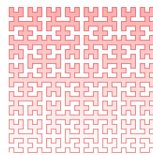
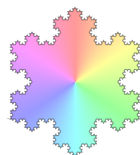
Bem, chega de conversa! Vamos estudar!

1

IDEIAS FUNDAMENTAIS

“(...) incapazes até de reconhecer na pintura, na arquitetura, na escultura, nas configurações das danças, na estética do trabalho do estilista, a beleza das figuras, essas pessoas vão olhando sem ver (...)”

Tânia Maria Mendonça
Campos



PARA a maior parte dos estudantes do ensino médio brasileiro, GEOMETRIA significa apenas o conjunto de conhecimentos que adquirimos quando estudamos GEOMETRIA EUCLIDIANA na escola. Os conceitos contidos neste termo, entretanto, são muito mais abrangentes e possuem aplicação por toda parte, das partículas subatômicas às galáxias.

A palavra geometria - que significa “medição da terra” - nos dá ideia de qual foi um dos primeiros usos desta parte da matemática. No Egito antigo, por exemplo, o faraó¹ ordenava o pagamento de impostos de acordo com as áreas alagadas pelo Nilo em cada ano e pelo tamanho de cada uma das propriedades.

¹ Apesar de teoricamente o faraó possuir todas as terras e bens a prática era a de que instituições e indivíduos possuísem imóveis.

Hoje o conceito de geometria é muito mais amplo. Como foi proposto por Felix Klein²:

“Geometria é o estudo das propriedades das figuras, num espaço de quaisquer dimensões, que permanecem invariantes relativamente a um determinado conjunto de transformações previamente definidas.”

Esta definição de geometria é uma das que tem maior poder unificador na matemática moderna.

1.1 CONCEITOS PRIMITIVOS

O mito da caverna, uma passagem do livro *A REPÚBLICA* de Platão³, narra a história de pessoas que desde que nasceram vivem presas a correntes e passam o tempo todo olhando para o fundo de uma caverna que é iluminada pela luz de uma fogueira. Nesta parede são projetadas sombras representando pessoas, animais, plantas, objetos e situações. Para os prisioneiros aquilo é a realidade.



Trecho de “As sombras da vida” de Maurício de Sousa, 2002

Certo dia, um dos habitantes saiu da caverna e logo ficou cego devido à clareza da luz. Aos poucos recobrou sua visão e pode admirar outro mundo, com uma natureza diferente daquela que estava acostumado. Voltou então para a

² Matemático alemão, nascido em meados do séc.XIX, foi responsável pela unificação da definição de geometria. No início do séc.XX iniciou uma próspera campanha para melhorar a educação matemática em todo o mundo. Mais informações em <http://klein.sbm.org.br/>

³ Platão foi um filósofo do período clássico da Grécia Antiga. Autor de diversos diálogos filosóficos, foi pupilo de Sócrates e tutor de Aristóteles. Como cita Pablo Capistrano em um de seus textos “*Platão está para a filosofia como Freud para a psicologia, Euclides da Cunha para a literatura brasileira, Marx para o curso de Ciências Sociais*”.

caverna para contar o fato aos outros, mas eles não acreditaram e revoltados com a “mentira” o mataram.

Para Platão os seres estão divididos entre o mundo inteligível, habitado pelas IDEIAS, e o mundo sensível, habitados por cópias das IDEIAS. Tudo o que vemos não passa de uma sombra do que de fato é real. Mas estas sombras são necessárias para chegarmos a compreensão daquilo que é ideal.

Ao estudar geometria temos que nos habituar com a dualidade ideal/cópia. Quando um geômetra pesquisa as propriedades de um quadrado⁴ traçado na areia ou em uma folha de papel, por exemplo, ele sabe que aquilo que está desenhado não é o verdadeiro quadrado mas que pode usar aquele simulacro para compreender as propriedades do quadrado ideal.

Para evitar confusões, as primeiras ideias às quais daremos atenção são chamadas de CONCEITOS PRIMITIVOS. É com eles que iremos iniciar nossa reflexão sobre a importância do significado dos termos e os conceitos que eles carregam.

São conceitos primitivos: o PONTO, a LINHA, o PLANO e o ESPAÇO. Estes termos não estão presentes apenas na geometria. Na física, por exemplo, trabalha-se com *carga puntiforme*, *trajetória retilínea*, *plano inclinado*, *espaço sideral*, etc. Mesmo assim na maioria das vezes a escola nos apresenta estes termos como abstrações matemáticas, como IDEIAS.

PONTO: O ponto é adimensional, isto é, não tem comprimento, largura ou altura.

LINHA: A linha é unidimensional, tem apenas comprimento.

PLANO: O plano é bidimensional, tem largura e comprimento.

SUPERFÍCIE: A superfície também é bidimensional, sendo o revestimento de um objeto tridimensional.

ESPAÇO: O espaço é tridimensional, tem largura, comprimento e altura (ou profundidade).

Estudar geometria partindo desses conceitos é uma herança deixada pelos gregos e seu método lógico de apresentar a geometria. Não podemos ignorar, entretanto, que muito antes dos gregos darem esta conotação elegante aos elementos básicos da geometria os egípcios e babilônicos já compreendiam estes objetos geométricos como entidades físicas. A linha era uma corda, a borda de

⁴ As vezes uma única palavra define um ente geométrico (como por exemplo a palavra QUADRADO), mas isso não é uma regra. Algumas vezes é necessário deixar mais detalhes explícitos.

um campo ou a aresta de uma pirâmide. Um plano era um pedaço de terra ou a face de um bloco de pedra. O espaço era tudo aquilo que nos rodeia, o nosso lugar.

Para evitar confusões, as primeiras ideias às quais daremos atenção são chamadas de **CONCEITOS PRIMITIVOS**. É com eles que iremos iniciar nossa reflexão sobre a importância do significado dos termos e os conceitos que eles carregam.

São conceitos primitivos: o **PONTO**, a **LINHA**, o **PLANO** e o **ESPAÇO**. Estes termos não estão presentes apenas na geometria. Na física, por exemplo, trabalha-se com *carga puntiforme*, *trajetória retilínea*, *plano inclinado*, *espaço sideral*, etc. Mesmo assim na maioria das vezes a escola nos apresenta estes termos como abstrações matemáticas, como **IDEIAS**.

PONTO: O ponto é adimensional, isto é, não tem comprimento, largura ou altura.

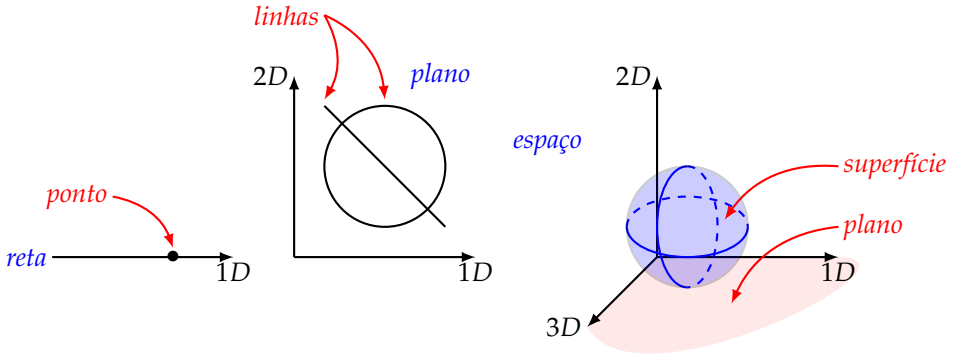
LINHA: A linha é unidimensional, tem apenas comprimento.

PLANO: O plano é bidimensional, tem largura e comprimento.

SUPERFÍCIE: A superfície também é bidimensional, sendo o revestimento de um objeto tridimensional.

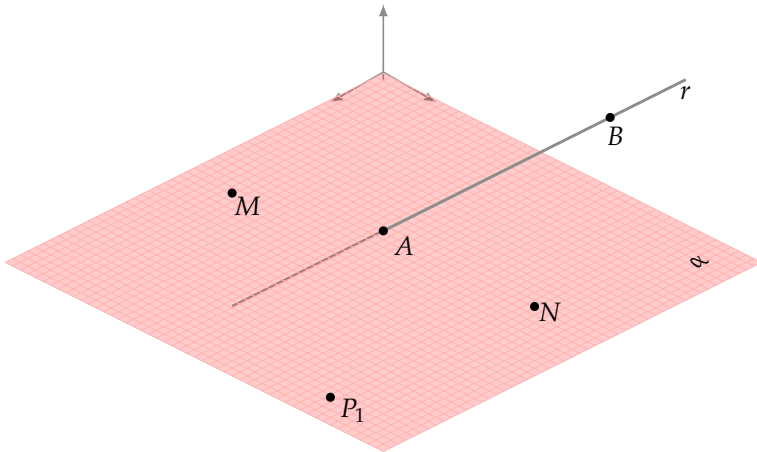
ESPAÇO: O espaço é tridimensional, tem largura, comprimento e altura (ou profundidade).

Estudar geometria partindo desses conceitos é uma herança deixada pelos gregos e seu método lógico de apresentar a geometria. Não podemos ignorar, entretanto, que muito antes dos gregos darem esta conotação elegante aos elementos básicos da geometria os egípcios e babilônicos já compreendiam estes objetos geométricos como entidades físicas. A linha era uma corda, a borda de um campo ou a aresta de uma pirâmide. Um plano era um pedaço de terra ou a face de um bloco de pedra. O espaço era tudo aquilo que nos rodeia, o nosso lugar.



1.1.1 Notação - ponto, reta e plano

Observe a figura:



Perceba que representamos alguns pontos, uma reta e um plano no espaço tridimensional usando as seguintes convenções:

PONTOS: representados por letras latinas maiúsculas (Ex.: A , B , M , N) ou por letras latinas maiúsculas associadas a um índice (Ex.: P_1).

RETAS: representadas por letras latinas minúsculas (Ex.: r). Em alguns textos poderemos encontrar uma indicação formada por dois de seus pontos juntamente com o símbolo “ \leftrightarrow ” (Ex.: \overleftrightarrow{AB}) ou ainda por “*reta AB*”.

PLANOS: representados por letras gregas minúsculas (Ex.: α). É possível também indicar o plano por três de seus pontos (Ex.: *plano AMN*).

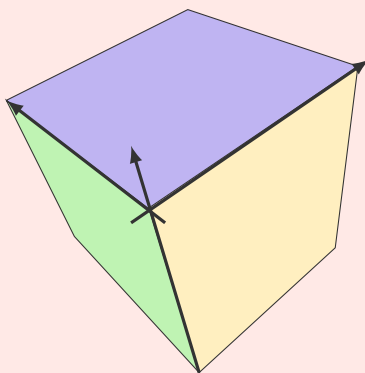
CURIOSIDADE

O CUBO (1976)

A escultura é obra de José Rodrigues, artista português nascido em Luanda, Angola. O *Cubo da Ribeira* foi colocado na Praça do Cubo, na cidade do Porto, norte de Portugal. Atualmente é um dos símbolo da cidade. Trata-se de um cubo de pedra apoiado sobre um dos seus vértices, colocado em uma fonte.



Fonte da imagem: *Acervo pessoal.*



Nele é possível observar todos os elementos que chamamos de conceitos primitivos. É importante ainda perceber que a nossa conversa sobre o mundo das IDEIAS e a sua relação com a realidade não está tão distante da nossa compreensão. Perceba que os quadriláteros que compõem a representação da escultura à esquerda são quadrados de mesma dimensão pois o sólido em

questão é um cubo, que os lados destes quadrados são linhas que limitam a estrutura e que estas linhas, por sua vez, encontram-se em pontos, formando as quinas do cubo. Tudo isso ocupando uma posição na belíssima paisagem portuguesa.

Além dos entes que apresentamos, devemos ter em mente três relações:

- Estar entre**
- Estar em**
- Ser congruente**

Aqui o adjetivo *primitivo* que atribuímos a estes conceitos torna-se ainda mais evidente. As três relações não podem ser definidas através de outras e cada pessoa costuma ter uma compreensão de seu significado, apesar de a maior parte delas fazer uma leitura que acaba tendo sentido semelhante.

De qualquer forma, podemos compreender que **ESTAR ENTRE** e **ESTAR EM** se apliquem tanto aos pontos, retas e planos individualmente, como também a relação entre esse elementos. Também é possível dizer que **SER CONGRUENTE** possa ser entendido, a grosso modo, como ter as mesmas características.



Tábua de argila de origem babilônica com um problema de geometria

Fonte da imagem: *Acervo pessoal*

1.2 AXIOMAS

No séc.XIX, o matemático David Hilbert⁵ escreveu o livro GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE (*Fundamentos de Geometria*) com um tratamento moderno da Geometria Euclidiana. Considerando alguns dos conceitos primitivos que foram apresentados, além de outros que iremos citar adiante, ele classificou os seus axiomas em cinco grupos:

AXIOMAS DE INCIDÊNCIA: Que trabalham a ideia de ESTAR EM.

AXIOMAS DE ORDEM: Que trabalham a ideia de ESTAR ENTRE.

AXIOMAS DE CONTINUIDADE: Que trabalham as ideias que permitirão medir distâncias.

AXIOMAS DE CONGRUÊNCIA: Que trabalham as ideias sobre a CONGRUÊNCIA.

AXIOMAS DAS PARALELAS: Que trabalha as ideias associadas ao paralelismo.

Estes axiomas serão citados a medida que avançamos no nosso estudo.

1.2.1 Axiomas de Incidência

Através destes axiomas vamos estabelecer algumas regras sobre como ocorrem as relações entre pontos, retas, plano e o espaço.

“Qualquer que seja a reta, existem infinitos pontos que estão na reta e infinitos pontos que não estão.”

Basicamente o que esse axioma nos garante é a existência de infinitos pontos em todo o espaço.

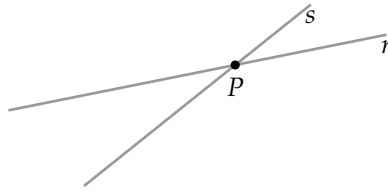
Para determinar a posição de uma reta no espaço usamos o seguinte axioma:

“Dados dois pontos distintos existe uma única reta que passa por estes dois pontos”



⁵ David Hilbert foi um dos mais notáveis matemáticos do mundo. Nasceu na Alemanha, na cidade de Königsberg - que deu origem ao problema das pontes e possivelmente a teoria dos grafos.

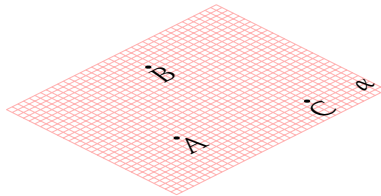
Assim, se tentássemos passar uma outra reta por estes mesmos pontos teríamos RETAS COINCIDENTES. Duas retas podem se interse⁶tar em um único ponto, quando isso acontece dizemos que são RETAS CONCORRENTES:



duas retas concorrentes se interse⁶tar em apenas um ponto

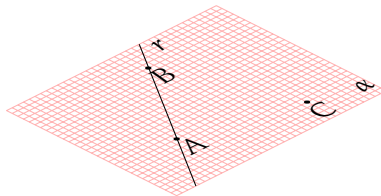
Para determinar a posição de um plano no espaço temos:

“Dados três pontos distintos, existe um único plano que os contém.”



Quando três pontos estão sobre uma mesma reta dizemos que eles são COLINEARES⁷, mas quando temos três pontos NÃO COLINEARES determinamos um único plano com eles. Assim, deve ficar claro também que

“Se dois pontos de uma reta estão em um plano então cada ponto dessa reta está nesse plano.”



⁶ Segundo o novo acordo ortográfico da Língua Portuguesa, a palavra interse⁶tar "perdeu" o "c" mudo, passando a ser escrita como interse⁶tar.

⁷ Na Língua Portuguesa existem os prefixos que são colocados antes dos radicais para mudar o seu sentido. “CO”, “CON” e “COM” é uma família de prefixos de origem latina que tem seu sentido associado a ideia de algo feito em conjunto. Por exemplo, COLINEAR significa mesma linha.

EXEMPLO

(JRAB) Os tripés são instrumentos que tem três pernas, e são usados para manter algo em posição estável. Eles estão disponíveis em tamanhos diferentes que devem ser consideradas em relação ao peso do objeto a ser realizada. Os tripés de câmera que os fotógrafos utilizam são para ajudar a tirar fotos nítidas, claras, porque não há movimento da câmera. Eles também são úteis na área de observação e experimentação. Por exemplo, são usados para a fixação de objetos a serem aquecidos em um bico de Bunsen. Outro uso científico é o de fixar telescópios.



Fonte da imagem: *Acervo pessoal.*

A melhor explicação para o uso do tripé como instrumento para estabilizar objetos é

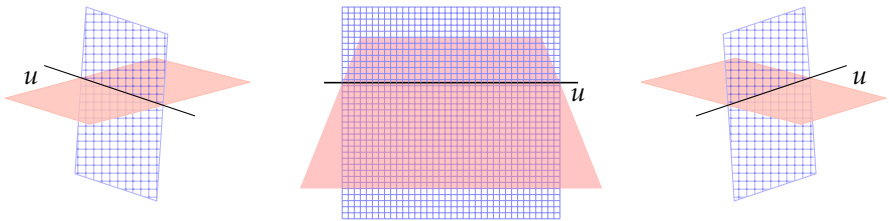
- a) que essa é a forma mais bonita.
- b) que essa é a forma mais barata mas o ideal seria ter mais de três pontos apoio.
- c) que essa é a forma mais resistente.
- d) que como três pontos determinam um plano, mesmo que as pernas do tripé tenham tamanhos diferentes ainda assim haverá estabilidade.
- e) que como três pontos determinam um plano, desde que as pernas do tripé tenham tamanhos iguais, haverá estabilidade.

Resposta:

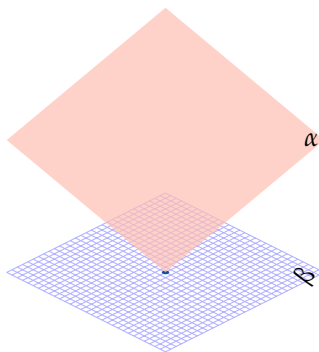
Três pontos de apoios SEMPRE estão no mesmo plano, aquele determinado por eles. Mesmo com pernas de tamanho diferente haverá estabilidade. Alternativa D.

Além disso temos que:

“Dois planos se intersectam em uma reta.”

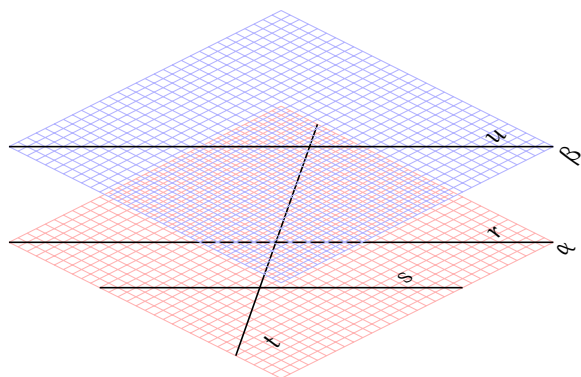


A medida que vamos avançando no estudo dos axiomas novas relações vão se estabelecendo e novos conceitos vão sendo construídos para fundamentar nossos estudos sem a necessidade de recorrer aos desenhos que as vezes são muito complexos ou que não passam a correta ideia. Por exemplo, a figura abaixo pode nos dar a falsa ilusão de que dois planos podem se encontrar em um ponto, o que, já sabemos, não é verdade.

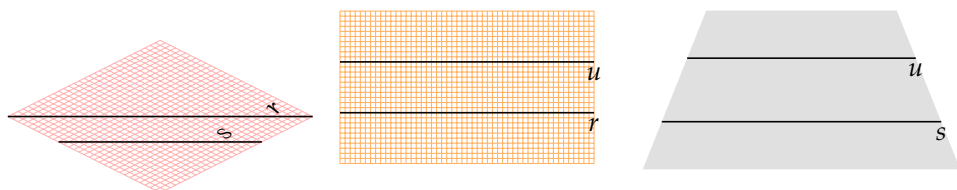


Não é que os modelos reais e as ilustrações não possam nos ajudar. Eles podem e devem ser usados mas é necessário ter em mente que estes modelos e ilustrações tem suas limitações (lembre do mito da caverna e das sombras). É preciso mais do que modelos. Será necessário uma boa dose de imaginação e de conhecimento teórico.

Observe a figura a seguir:



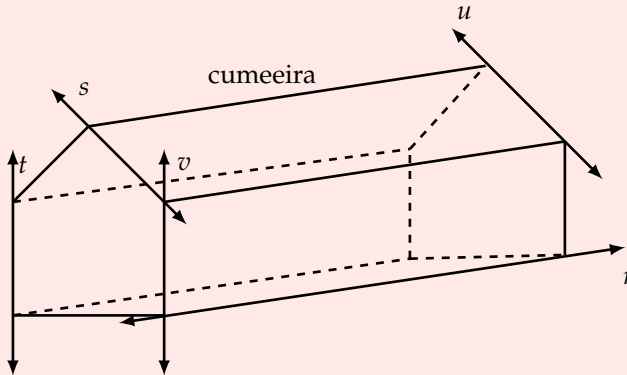
As retas r e s ou r e u ou s e u são tais que podemos garantir que há um plano que contém todos os pontos do par em questão e por isso serão chamadas de COPLANARES. Como elas são coplanares e não se intersectam diremos que são retas PARALELAS.



Entretanto, é impossível que um único plano contenha todos os pontos das retas u e t . As retas u e t são NÃO COPLANARES OU REVERSAS.

EXEMPLO

(Faap) O galpão da figura a seguir está no prumo e a cumeeira está “bem no meio” da parede.



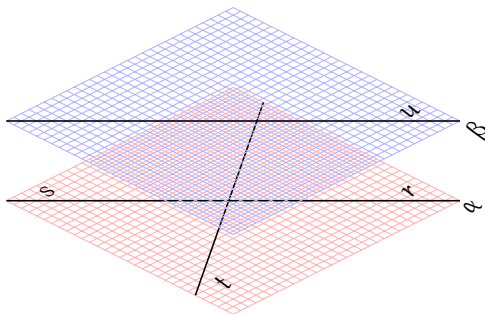
Das retas assinaladas podemos afirmar que:

- t e u são reversas
- s e u são reversas
- t e u são concorrentes
- s e r são concorrentes
- t e u são perpendiculares

Resposta:

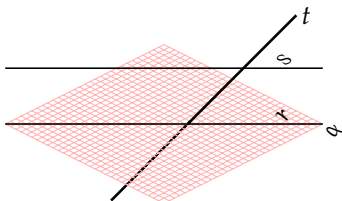
As retas t e u são reversas. As retas s e u são coplanares e determinam o plano que passa em parte do teto do galpão. As retas s e r são reversas. Alternativa A.

Como já dissemos antes, um grande desafio quando estudamos geometria é o correto entendimento dos modelos planos e os modelos espaciais e a relação entre eles. Apesar de estarmos cercados de estruturas tridimensionais, o computador em que digito o texto ou o livro que você está lendo, vários fatores dificultam o entendimento de alguns conceitos, como a limitação dos desenhos de objetos tridimensional em uma folha de papel ou em uma tela de computador, que é bidimensional. Sobre as POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETAS temos, de forma sucinta, que:

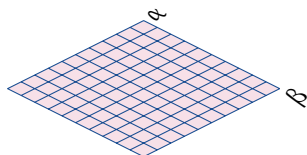


Coplanares		Não coplanares	
Distintas		Coincidentes	
Paralelas Ex.: r e u	Concorrentes Ex.: r e t	Reversas Ex.: t e u	

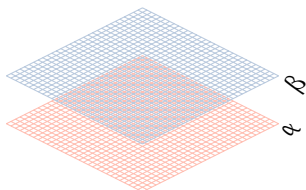
Se pensarmos sobre o posicionamento de uma reta em relação a um plano teremos que uma reta pode ser PARALELA AO PLANO, se não intersesta o plano, (Ex.: s), SECANTE AO PLANO, se intersesta o plano em um só ponto, (Ex.: t) ou CONTIDA NO PLANO, se todos os seus pontos estão no plano, (Ex.: r).



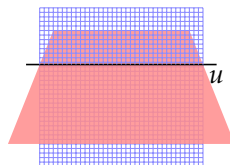
Precisamos ainda pensar sobre as POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE PLANOS. Dados dois planos α e β , eles poderão ser:



Planos coincidentes

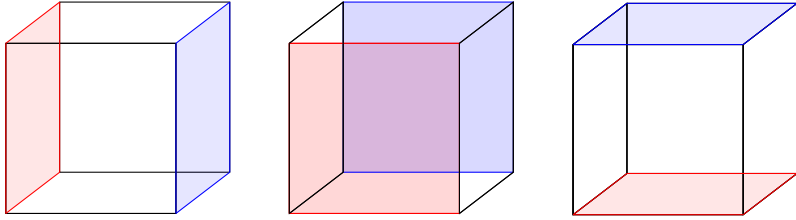


Planos paralelos

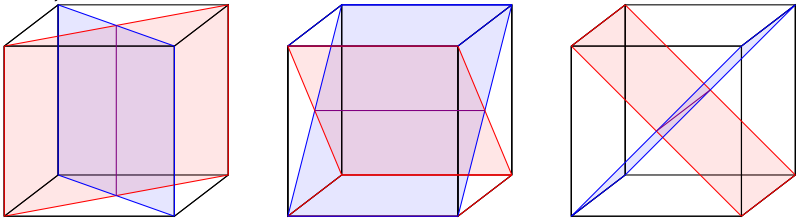


Planos secantes

Outra forma de apresentar planos paralelos e secantes usando um cubo como referência da posição dos mesmos:



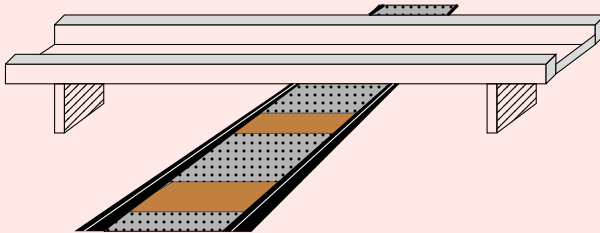
Planos paralelos



Planos secantes

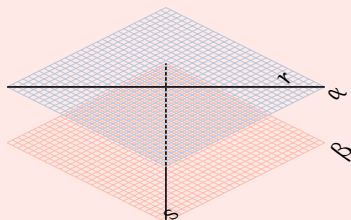
EXEMPLO

O desenho abaixo representa uma ponte sobre uma estrada de ferro. Sejam α e β , respectivamente, os planos da pista, da ponte e do leito da estrada de ferro e sejam r e s as retas que representam o eixo da pista e um dos trilhos. Quais as posições relativas entre α , β , r e s ?



Resposta:

Um modelo matemático para a situação proposta pressupõe que a linha férrea e a pista da ponte estão em planos horizontais, sem inclinações:



Podemos afirmar que: a reta r está contida no plano α , a reta s está contida no plano β , as retas r e s são reversas e os planos α e β são paralelos.

1.2.2 *Axiomas de Ordem*

Com os axiomas de ordem é possível investigar novos elementos. Vejamos:

“Se A, B e C são pontos de uma reta e se C está entre A e B então C está entre B e A.”

além disso:

“Para cada dois pontos em uma reta há sempre pelo menos um terceiro ponto sobre a reta tal que ele esteja entre A e B.”

e também:

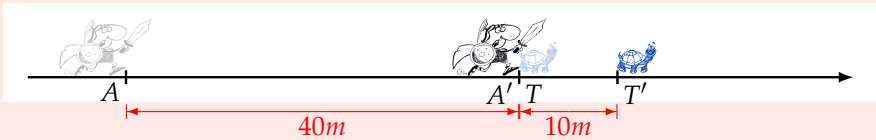
“Dados três pontos colineares, não existe mais do que um entre eles.”

Quando trabalhamos com esses conceitos estamos fazendo uma idealização, que destoa da forma como a maioria das pessoas entende a realidade física. Do ponto de vista ideal nós levitamos pois nossos pés nunca tocam o solo, um corredor nunca alcança uma tartaruga se der a ela uma pequena vantagem (leia o texto sobre o paradoxo de zenão), dois objetos nunca se chocam, etc.

CURIOSIDADE

O Paradoxo de Zenão

O filósofo Zenão de Eléia foi um discípulo de Parmênides. Ele ficou bastante conhecido por construir uma série de argumentos contra a possibilidade de movimento, que julgava ser uma ilusão dos nossos sentidos. Ele afirmava por exemplo que se o movimento existisse *“o lerdo jamais será ultrapassado pelo ágil, pois quando o perseguidor chegar ao ponto de onde o fugitivo partiu, esse já estará necessariamente a sua frente.”*.

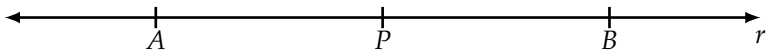


Supondo que Aquiles corra quatro vezes mais rápido que a tartaruga, por exemplo, e que se dê à tartaruga uma vantagem de quarenta metros no início de uma disputa. Segundo o argumento de Zenão, no momento em que atingir a marca de quarenta metros, a tartaruga já estará dez metros à frente. Assim que percorrer estes dez metros, a tartaruga estará dois metros e meio à frente. E a cada vez que Aquiles cumprir uma distância, a tartaruga abrirá uma nova vantagem, de forma que ele jamais a ultrapassará.

No entanto, sabemos que esta forma de entender o movimento foi resolvida com a física newtoniana, que relaciona a condição de movimento a um referencial.

Para continuar iremos definir novos termos que serão usados para entendermos os próximos conceitos. Vejamos quais são eles:

SEMI RETA: para dividir uma reta r em duas semi retas, basta um ponto P :



SEMI PLANO: para dividir um plano α em dois semi planos, basta uma reta r :