

mini Manuel

de



Mathématiques

pour les
sciences de la vie
et de l'environnement

Driss Boularas
Daniel Fredon
Daniel Petit

➔ L1/L2
➔ PCEM 1
➔ PH 1

**Cours
+ exos
corrigés**

DUNOD

mini Manuel

de Mathématiques pour les sciences de la vie et de l'environnement

Cours + Exos corrigés

Driss Boularas

Maître de conférences en mathématiques à l'université de Limoges.

Daniel Fredon

Ancien maître de conférences en mathématiques à l'université de Limoges.

Daniel Petit

Maître de conférences en biologie des populations à l'université de Limoges.

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2009
ISBN 978-2-10-054271-0

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

1	Fonctions d'une variable réelle	3
1.1	Fonctions usuelles	3
1.2	Limites et dérivées	6
1.3	Modéliser un phénomène biologique par une fonction	10
1.4	Courbes paramétrées du plan	12
	Vitesses de croissance	17
	Mots clés	17
	Exercices	17
	Solutions	22
2	Équations différentielles	33
2.1	Un outil : le calcul de primitives	33
2.2	Généralités sur les équations différentielles	34
2.3	Équations différentielles du premier ordre	35
2.4	Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	39
	Obtenir une équation différentielle à partir d'observations	40
	Mots clés	40
	Exercices	41
	Solutions	45
3	Suites réelles	58
3.1	Généralités	58
3.2	Suites récurrentes d'ordre 1 du type $u_{n+1} = f(u_n)$	61
3.3	Suites récurrentes linéaires d'ordre 2	63
	Suites arithmétiques et suites géométriques dans l'histoire	64
	Mots clés	65
	Exercices	65
	Solutions	66
4	Fondements du calcul matriciel	74
4.1	Espaces vectoriels usuels	74
4.2	Matrices	76
4.3	Déterminants	82
	Les matrices de fabrication (pour comprendre le produit de matrices)	86

Mots clés	87
Exercices	87
Solutions	91
5 Réduction des matrices	101
5.1 Valeurs propres et vecteurs propres	102
5.2 Matrices diagonalisables	103
5.3 Retour aux matrices de Leslie	104
5.4 Systèmes différentiels linéaires	110
Équations aux différences finies	113
Mots clés	113
Exercices	114
Solutions	117
6 Fonctions de plusieurs variables	133
6.1 Motivations et exemples biologiques	133
6.2 Fonctions de deux variables réelles	134
6.3 Différentielle	136
6.4 Gradient et applications	137
6.5 Optimisation d'une fonction de deux variables	140
Exemple de courbes de niveau en biologie	144
Mots clés	144
Exercices	145
Solutions	147
7 Systèmes différentiels	155
7.1 Définitions et premiers exemples	155
7.2 Représentation des trajectoires des systèmes linéaires homogènes constants 2×2	160
7.3 Modèles biologiques de systèmes dynamiques	166
7.4 Éléments de la théorie de la stabilité	169
La théorie du chaos et l'attracteur de Lorenz (1917-2008)	172
Mots clés	175
Exercices	175
Solutions	177
Glossaire	183
Index	187

Avant-propos

Parmi les nombreux outils (informatique, chimie, statistiques ...) dont dispose la biologie pour étudier le vivant, celui des mathématiques devient chaque jour plus important.

Cela s'explique par la complexité des phénomènes observés et l'irruption de nouveaux domaines d'étude comme l'écologie, la biologie moléculaire, la climatologie, la dynamique des populations ...

Ils nécessitent tous des méthodes très élaborées de quantification et d'interprétation des résultats. Beaucoup de ces méthodes n'ont d'ailleurs été introduites qu'au siècle dernier.

À côté des caractères de description ou de classification des entités vivantes, la biologie contemporaine s'intéresse à leur naissance ou émergence, leur croissance ou évolution, leur extinction ou disparition.

Pour conduire ces études, divers modèles mathématiques, plus ou moins fiables, ont été élaborés.

Les plus célèbres sont les modèles prédateur-proie ou les matrices de Leslie.

Généralement, ces modèles se répartissent en deux catégories, ceux que l'on qualifie de discrets et qui font appel à la combinatoire, aux suites ... et ceux que l'on qualifie de continus et qui utilisent des fonctions d'une ou plusieurs variables réelles, des équations et systèmes différentiels ...

Ce livre est issu d'un enseignement transversal mathématiques-biologie de la licence de biologie de l'Université de Limoges.

Il comporte

- les exposés des contenus mathématiques choisis,
- des exemples provenant des sciences de la vie,
- les modèles les plus utilisés,
- et, bien sûr, des exercices corrigés, certains pour vous entraîner, d'autres pour étudier des situations issues de la biologie.

Nous espérons que ce livre sera un outil efficace pour vous aider dans votre travail, qui doit être bien réel et pas seulement modélisé!

Toutes vos remarques, vos commentaires, vos critiques, et même vos encouragements, seront accueillis avec plaisir.

daniel.fredon@laposte.net

driss.boularas@unilim.fr

daniel.petit@unilim.fr



Fonctions d'une variable réelle

PLAN

- 1.1 Fonctions usuelles
- 1.2 Limites et dérivées
- 1.3 Modéliser un phénomène biologique par une fonction
- 1.4 Étude de quelques situations biologiques
- 1.5 Courbes paramétrées du plan

OBJECTIFS

- Décrire un phénomène par une fonction (observation en continu).
- Revoir les fonctions les plus utilisées en biologie.
- Savoir calculer, utiliser et interpréter une dérivée.
- Étudier divers éléments d'une courbe (tangentes, extrémums, branches infinies).
- Savoir construire une courbe paramétrée.

1.1 FONCTIONS USUELLES

1.1.1 Introduction

La biologie ne s'intéresse pas seulement aux descriptions et classifications des différents organismes ; mais aussi aux dépendances entre les différentes propriétés de ces organismes.

Ces dépendances peuvent être qualitatives (couleur, sexe, état solide, liquide ou gazeux) ou quantitatives. À la base des dépendances quantitatives, se trouvent les fonctions.

De façon générale, une fonction est la donnée de deux ensembles A et B (non vides) et d'une relation f , qui à tout élément x de A , associe un et un seul élément, noté $f(x)$, de B .

Les éléments de A sont appelés des objets, antécédents ou variables et ceux de B , des images ou valeurs de f .

Notations : $f : A \rightarrow B$ ou, lorsque A et B sont sous-entendus, $x \mapsto f(x)$.

Dans la première partie, nous nous intéresserons exclusivement aux fonctions réelles de variable réelle, c'est-à-dire à celles dont la variable x et l'image $f(x)$ sont des nombres réels. Nous en rappelons ici les plus importantes.

1.1.2 Fonctions polynomiales

Elles sont définies sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p \quad \text{avec } a_p \neq 0.$$

où $a_0, a_1, \dots, a_p$ sont des nombres fixés.

Le nombre entier p est appelé degré de la fonction polynomiale f .

Les représentations graphiques des fonctions polynomiales de degré 2 sont des paraboles.

1.1.3 Valeur absolue

Il s'agit de la fonction qui à tout réel x associe le nombre, noté $|x|$, défini par :

$$|x| = x \quad \text{si } x \geq 0 \quad \text{et} \quad |x| = -x \quad \text{si } x \leq 0.$$

Ainsi, par exemple, la fonction $x \mapsto |x-1|$ prend la valeur :

$$|x-1| = x-1 \quad \text{si } x \geq 1 \quad \text{et} \quad |x-1| = -(x-1) = -x+1 \quad \text{si } x \leq 1.$$

1.1.4 Fonctions rationnelles

Elles sont de la forme $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ où les fonctions f et g sont polynomiales. Le domaine de définition d'une telle fonction est l'ensemble des x tels que $g(x) \neq 0$.

Par exemple, les fonctions rationnelles définies par :

$$\frac{2x-1}{x^2+1}, \quad \frac{x^2+2}{x^2-3x+2}, \quad \frac{2x-1}{x^2-2x+1}$$

sont définies respectivement sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ et $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1.1.5 Fonctions exponentielles et logarithmiques

• Fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien est notée $\ln$. Elle est définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 ; \\ \forall x > 0 \quad (\ln x)' = \frac{1}{x} . \end{cases}$$

Cette fonction est strictement croissante et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty .$$

L'unique solution de l'équation $\ln x = 1$ est notée e ($e \approx 2,718$).

En outre, la fonction logarithme népérien vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall a > 0 \quad \forall b > 0 \quad \forall r \in \mathbb{Q}$$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b ; \quad \ln(a^r) = r \ln a .$$

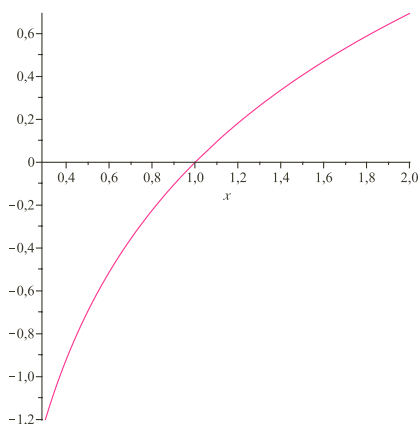


Figure 1.1 Fonction logarithme népérien.

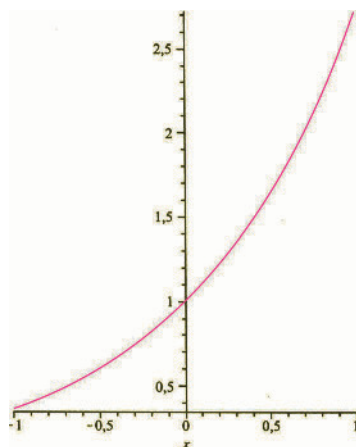


Figure 1.2 Fonction exponentielle.

• Fonction exponentielle

C'est la fonction réciproque de la fonction $\ln$. Elle est notée $\exp$, ou $x \rightarrow e^x$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0, +\infty[$ et vérifie les