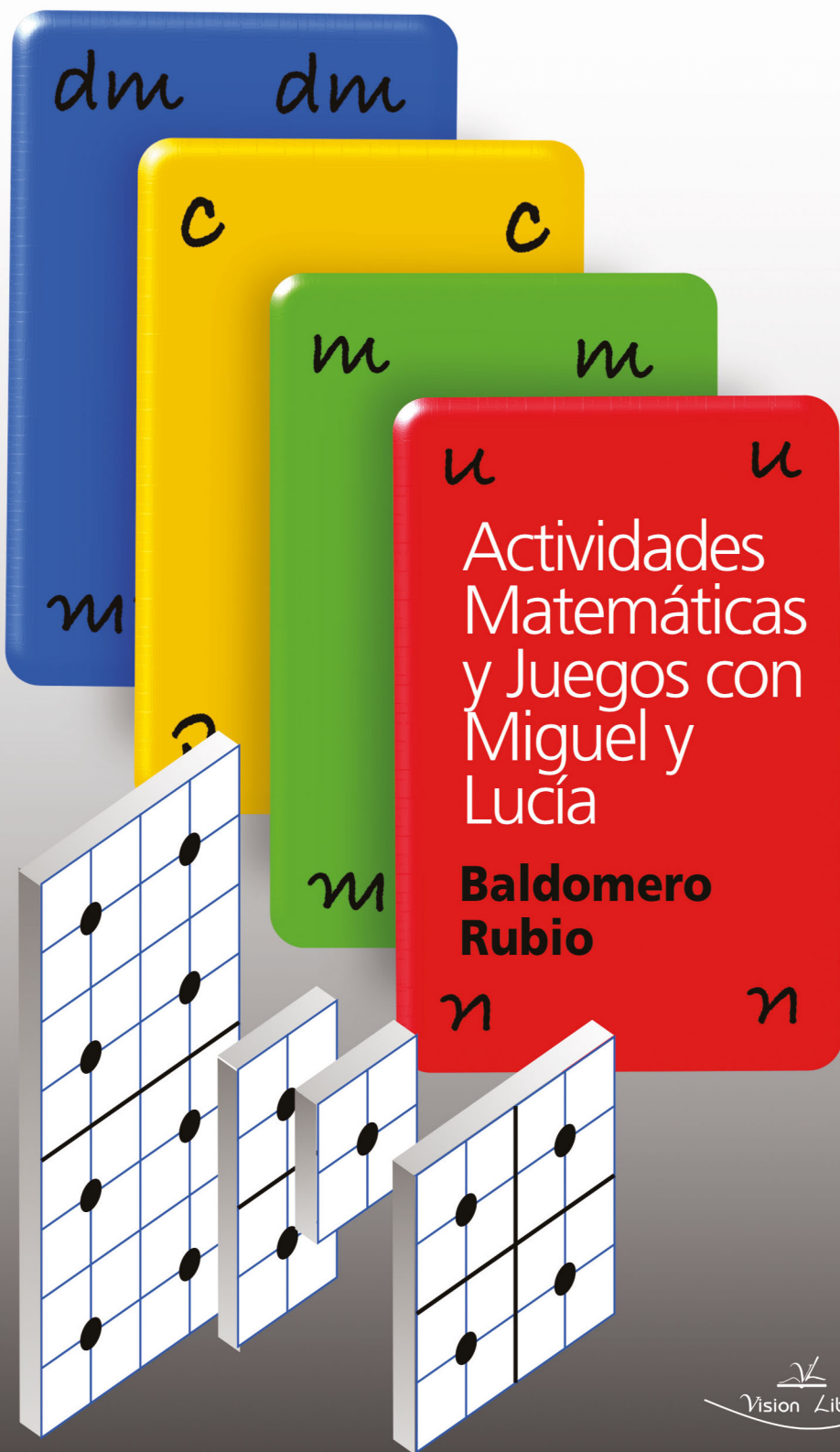




ACTIVIDADES MATEMÁTICAS Y JUEGOS CON MIGUEL Y LUCÍA

Baldomero Rubio



© Obra: ACTIVIDADES MATEMÁTICAS Y JUEGOS CON MIGUEL Y LUCÍA

Primera edición: Marzo, 2024

© Autor: Baldomero Rubio

Diseño de cubierta: La Fábrica de diseño

ISBN: 978-84-10039-50-6

© Editado por VISION LIBROS www.visionlibros.com

Gestión, promoción y distribución: Grupo Editor Vision Net S.L.

C./ San Ildefonso 17, local, 28012 Madrid. España.

Tlf: 0034 91 3117696 // Email: pedidos@visionnet.es

www.visionnet-libros.com

Disponible en librerías físicas y online.

Las opiniones expresadas en este trabajo son exclusivas del autor. No reflejan necesariamente las opiniones del editor, que queda eximido de cualquier responsabilidad derivada de las mismas.

Queda prohibida, salvo excepción prevista por la ley cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sin contar con la autorización de los titulares de la propiedad intelectual. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.es o por teléfono 917021970) si necesita fotocopiar, escanear o utilizar algún fragmento de esta obra. Gracias por comprar una edición autorizada de esta obra y por respetar las leyes del copyright.

Índice general

Prólogo	IX
1. Material didáctico	1
1.1. Naipes decimales	1
1.2. Fichas binarias	2
1.3. Naipes binarios	3
1.4. Moldes binarios	3
2. Aritmética	5
2.1. Números naturales	5
2.2. Sumar y restar	7
2.3. Multiplicar y dividir	9
2.4. Fracciones	14
2.5. Números racionales positivos	17
2.6. Potencias de 2	18
2.7. Números primos	20
2.8. Números expresados con ceros y unos	23
2.9. Números enteros	26
3. Juegos y pasatiempos	31
3.1. Dominó binario	31
3.2. Los “chinos”	38
3.3. KITE: juego con aplicación binaria	39
3.4. Averiguo el número que has pensado	41
3.5. Barcos binarios	43
3.6. Caminos	45
4. Nuevas tecnologías	49
4.1. Informática	49
4.2. Internet	52

5. Experimentos	53
5.1. ¿Cuántas fracciones hay?	53
5.2. El método “diagonal” de Cantor	55
5.3. Raíz cuadrada de 2 y teorema de Pitágoras	59
5.4. Almacenar puntos con los naipes binarios	62
6. Actividades de aprendizaje	67
6.1. Jugando, Lucía ha aprendido a restar	67
6.2. Miguel también aprendió a restar con naipes	69
6.3. La operación de dividir con ceros y unos	73
7. Problemas	77
7.1. Los vestidos de Lucía	77
7.2. Instantes, posiciones, recorridos, duraciones, velocidad	78
7.3. Trenes por la misma vía	79
7.4. Duración de un partido de tenis	84
7.5. Trenes por vías paralelas	86
7.6. Calles paralelas en un recinto rectangular	88
8. Sobre el lenguaje	93
8.1. Dos negaciones	93
8.2. Proveer-prever y Debe-debe de	93
8.3. Tildes	94
8.4. Condición necesaria. Condición suficiente	95
9. Números racionales positivos	97
9.1. Racionales positivos menores que 1	97
9.2. Moldes binarios	99
9.3. Representación con ceros y unos	100
9.4. El período no puede ser 1	104
9.5. Trenes por la misma vía (continuación)	106
9.6. ¿Se pueden sumar infinitos números?	108
10. Geometría y Física	111
10.1. Paralelogramos, traslaciones y simetrías	115
10.2. Magnitudes: ¿qué es medir?	118
10.3. Tiempo	119
10.4. El plano y la recta	120
10.5. Movimiento de un punto en una recta	128
10.6. El espacio	129

11.Proporcionalidad	137
11.1. Cantidades de una magnitud	137
11.2. Comparación entre cantidades	138
11.3. Intereses de capitales	141
11.4. Número de Euler	143
12.Complementos	147
12.1. Combinatoria	147
12.2. Probabilidad	156
12.3. Axiomas de Peano	164
12.4. Inducción matemática	165
13.Índice alfabético	169

A

MIGUEL DE GUZMÁN Y ADRIÁN PAENZA

y a

Lucía y Miguel

Gonzalo, María Laura Belén, Nuria

Sixto, Violeta Lola, Andrés

Julen, Natalia Adise

Rocío, Nicolás Marina Marcos, Aimar Lucía, Inés Naia

Natalia, Mar Diego Anastasia, Patricia Miguel, Ana

Erik Clara Alejandro, Patricia Carla Karin Julia Elisa

Sayoa, Kwami José Guillermo Mini, Mina Patricia

Mara Olivia Sol, Antón Lucía, Nicolás Diego, Javier

Pedro, Miguel Beti, Antonio Ricardo, Fernando Blanca

Javier, María Ana, Elena Mónica, María Candela

Prólogo

Cuando a mediados de los años 60 inicié las tareas como profesor de matemáticas en Instituto de Bachillerato, utilicé como libros de texto los escritos por los prestigiosos matemáticos españoles Julio Rey Pastor y Pedro Puig Adam. El bachillerato de entonces atendía la educación para infancia y adolescencia, de 11 a 17 años. Estos libros tenían un estilo muy diferente al de los actuales cuadernos para la educación infantil, de figuras a colores con instrucciones simplistas, repetitivas, que parecen querer huir de la cultura de la palabra, la frase... en fin, de la cultura tradicional del libro. Por contra, Rey Pastor y Puig Adam escribían con frases bien construidas asequibles a quienes estaban dedicadas. En 1969 se publicó *Iniciación a la matemática superior* editado por Alhambra, S.A. Era mi primer libro y con él pretendía hacer una aportación a la educación matemática.

Ahora, terminadas mis tareas universitarias en activo, he querido retomar las de mi primera etapa. ¿Con qué objetivos? Por supuesto, dentro de la cultura del libro, de imágenes sugeridas con palabras y frases escritas adaptadas a quienes son los destinatarios. Significa aproximarse lo más posible a lo que es hablar pensando en la persona que te escucha.

¿A quién está dirigido? Aquí se ofrecen cosas diferentes posiblemente adaptables a distintos tipos de personas. Intento en primer lugar hacer una aportación a la educación infantil. Así, el capítulo 2 describe la aritmética básica, (sumar, restar, multiplicar y dividir), de los números *naturales* 1, 2, 3, 4... Siguen las *fracciones*, que representan números *racionales positivos*, y finalmente están los números *enteros*: 0, positivos y negativos. Está pensado para infancia y adolescencia, con lenguaje coloquial que intenta adaptarse a este fin. Esta aritmética básica del capítulo 2 está aderezada de material didáctico, experimentos, juegos, pasatiempos, problemas, anécdotas... que no están en este capítulo para no romper su unidad. Quien lee está invitado a salir de él para encontrarlas en otros capítulos del libro: son cosas más divertidas que le permitirán interpretar mejor la aritmética que está aprendiendo, poco atractiva si no se le ofrece así. Se ha huido de

plantear situaciones y problemas que no interesan ahora y pueden distraer del objetivo principal.

Hay que dar un salto al capítulo 9 para desarrollar más la aritmética de los números *racionales positivos*. Aquí la materia corresponde más bien a la etapa de adolescencia, cambia en algún sentido el estilo de presentación, que intenta seguir siendo fluido y coloquial.

El capítulo 10 utiliza los recursos del 2 y del 9 para entrar en Geometría y matemáticas de la Física (coordenadas en el espacio, movimiento, velocidad, gravedad, peso y masa...), lo cual puede adaptarse bien a la adolescencia.

El capítulo 11 contiene temas de la primera etapa no tratadas en el 2, como la antigua “regla de 3”, el crecimiento de un capital y cantidades proporcionales. Se llega hasta el número e y el crecimiento biológico. Todo con lenguaje sencillo, sin tecnicismos innecesarios. Finalmente, en el 12 hay temas que rozan con otros capítulos, o que pueden interesar a algunos lectores, pero prescindibles para el objetivo que se pretende.

Los párrafos anteriores se refieren a cinco capítulos de los doce que hay. Son los cinco que definen el estilo y la intención del proyecto. Los otros siete se describen simplemente mirando el índice general.

Pienso ahora ¿podría interesar esto a quienes siendo ya mayores no tuvieron ocasión de aprender antes estas cosas y no han perdido definitivamente el deseo de hacerlo? ¿y a profesores, o personas interesadas en la educación, que podrían encontrar aquí imágenes y motivación convenientes? Para mayores que no aprendieron la aritmética elemental o la han olvidado, y para alguna persona “de letras” no interesada en principio en estas cosas, podría quizás resultar agradable y asequible leer lo que escribo, porque carece de obstáculos técnicos y proporciona un conocimiento estimable del significado de la matemática en la ciencia y la cultura.

Además, conviene saber que el libro no requiere una lectura de principio a fin. Puede iniciarse en cualquier capítulo y en él se indicará cómo puede completarse en otro para una mejor interpretación.

Algo más deseo advertir que puede ser novedad en la enseñanza elemental: lo *binario*. ¿Qué es esto? Los números que encontramos en el capítulo 2 se pueden interpretar como colecciones de puntos que se almacenan de forma conveniente. Hay dos sistemas básicos para hacerlo: *decimal* y *binario*. El sistema decimal significa que diez puntos se almacenan para obtener la *decena*; diez decenas son la *centena*... Se requiere un progresivo aumento del tamaño para figuras que representen *decena*, *centena*, *millar*... El sistema binario es análogo, pero distinto porque solamente dos puntos se almacenan en una nueva unidad: *par*. *Par* es análogo a *decena* pero de “tamaño” bastante menor. Y dos pares hacen la siguiente unidad: *par de pares*, que no

tiene una denominación más simple; y así sucesivamente. Ya verá quien lee esto que no es difícil. Lo experimenté con niños y niñas. Hay muchas ventajas en lo binario, como la de ser muy fácil hacer las prácticas de repartir o dividir.

Una observación metodológica importante es el uso de los números enteros como referencia y aproximación (expresable en papel cuadriculado) al continuo de Geometría y Física. Ha sido la base para presentar mediante SWP (Scientific Work Place, el soporte informático con el que he trabajado) todo lo que contiene este libro, incluidas las figuras.

A muchas personas quiero expresar aquí mi agradecimiento:

José María Martínez Ansemil, mi compañero en la facultad, asesor imprescindible para el tratamiento informático de este y anteriores libros. No hay una duda mía que no tenga inmediata respuesta por su parte. O que estudie con interés y urgencia de requerirse así. Siempre disponible para ayudar en lo que sea. Persona polifacética: investigación, música, telecomunicación, deportista... interesado y activo en todo.

Carlos Fernández Pérez, mi buen amigo y compañero, inseparable en tareas del decanato durante cuatro años. Me inició en el uso de SWP a principios de este siglo en un momento crucial para mí en que por razones de salud yo creía haber terminado mi trabajo profesional. Su ayuda contribuyó a que no sucediera así: escribí nuevos libros gracias al SWP que él me había enseñado con mucha paciencia y, conocedor de técnicas informáticas avanzadas, hizo y me regaló las figuras.

José Luis González Llavona, antiguo alumno y gran amigo desde entonces. Imprescindible en tareas del decanato compartidas. Compañero de camping. En actividad permanente (investigación, navegación a vela, cultivador de viñedo, elaborador de excelente vino, organizador de reuniones científicas...).

Ildefonso Díaz Díaz, también mi alumno y gran amigo desde entonces, compañero de facultad. Mi asesor para preparar con *power point* algunas conferencias. Investigador incansable, excelente educador, imaginativo, en actividad permanente. Fue divertida y generosa su intervención en el acto de homenaje que recibí al término de mi etapa activa en la facultad. Compañero de camping. Prolongado ya en su nieto Erik de sangre polaca y española, cuyo nombre está en la dedicatoria de este libro.

Abraham Rodríguez López, también mi compañero en la facultad, que ha dedicado muchas horas de generoso y eficaz trabajo para variados tipos de ayuda con mis estudiantes y libros: *preprints*, fotocopias, encuadernación...

Fernando Bombal, Francisco Hernández, Socorro Ponte, Javier Gómez Gil, José Mendoza, Pilar Cembranos, Angelines Prieto, Fernando Cobos,

José Luis Caramés, Miguel Ángel Gómez Villegas, Alfonso Casal, Ángel Miguel Amores, Ricardo Moreno, Joaquín Hernández... Varios de ellos han aceptado también mi invitación para colaborar en el decanato. Con todos ellos sigo teniendo muy cordial relación.

Y fuera de la facultad:

Mariajo y Fernando, ella alumna común para Carmen y para mí, él joven profesor universitario de Derecho Constitucional, con gran actividad y proyección. De ellos han venido al mundo Lucía y Miguel, imprescindibles para este libro. Son los protagonistas de escenas, reales o imaginadas. Son fuente de experiencia, motivación y esperanza.

And last but no least, Carmen. Nos conocimos en 1960 como estudiantes próximos en la facultad. Hemos estado juntos desde entonces. Ella me acompañó todo lo posible en mis desplazamientos por razón de trabajo. Primero, en una salida a Málaga; después en Portugal, París, Princeton, Buenos Aires, Chile... Incontables viajes veraniegos de camping en Europa acompañados de nuestras mascotas Blacko y Boro, además de muchos amigos. Prolongable quizás todo ello ahora con Lula, nueva y prometedor mascota. A Carmen le he restado muchas horas de convivencia por mi trabajo, lo cual es más significativo ahora por la jubilación de ambos. Por ello me siento culpable, pero ella entiende mi interés. Siempre, y especialmente en algún momento difícil de mi vida, ha sido para mí una excelente ayuda.

Dedico esta obra al entrañable amigo Miguel de Guzmán, compañero en tareas universitarias de un largo período, autor de tantos excelentes libros para la educación matemática, co-autor conmigo de varios textos universitarios. También al profesor universitario de matemáticas y periodista Adrián Paenza, mi buen amigo argentino desde 1981. Ambos representan motivación, ideas y objetivos de este libro. Miguel ha estimulado siempre mi trabajo con fértiles ideas y me ha transmitido su pasión por la educación matemática. Adrián, autor de imaginativos libros de éxito para extender la cultura matemática, es persona de gran generosidad, trabajador incansable, con mucho ingenio y simpatía.

Dedico también este libro a Miguel y a Lucía, protagonistas de varias escenas de aprendizaje presentadas aquí. A ellos quiero asociar las parejas de ascendientes Mariajo y Fernando, Lourdes y Pepe, Felipe y Mari. Asimismo, he unido a la dedicatoria una amplia colección de personas recién iniciadas en la aventura de las matemáticas, o que deben esperar para hacerlo. Pertenecen a la familia muy próxima a Carmen y a mí, o bien son hijos o nietos de buenos amigos.

Madrid, otoño de 2012.

Capítulo 1

Material didáctico

1.1. Naipes decimales

Expresar mediante cuadros de puntos la unidad, la decena, la centena, el millar... del sistema decimal tiene el grave inconveniente del enorme tamaño que se necesita al ir avanzando en la escala. Sin embargo, se puede salvar esta dificultad utilizando cartulinas en las que se recortan piezas de un tamaño como el de las tarjetas de banco. Todas las piezas, *naipes decimales*, tienen el mismo tamaño, pero se distinguen unas de otras porque en las cuatro esquinas de una de las dos caras se escribe de forma bien visible la letra o letras que identifican cada eslabón de la cadena.

Los siete primeros eslabones son

unidad: u

decena: d

centena; c

millar: m

decena de millar: dm

centena de millar: cm

millón: M.

La tabla de equivalencias es

$$1d = 10u, \quad 1c = 10d, \quad 1m = 10c, \quad 1dm = 10m, \quad 1cm = 10dm, \quad 1M = 10cm.$$

Para una mejor identificación de estos siete naipes distintos se pueden elegir los siete colores siguientes

rosa, naranja, amarillo, verde, azul, rojo, morado,

en el orden creciente: *rosa* para u , *naranja* para d , *amarillo* para c , *verde* para m , *azul* para dm , *rojo* para cm , *morado* para M .

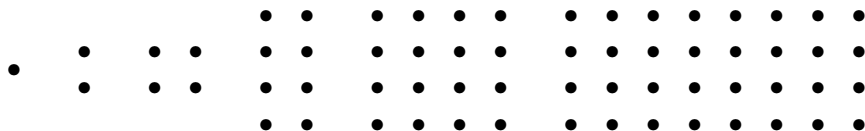
Naturalmente, la escala continúa en sentido creciente: para expresar números mayores que $1M$ se utilizan

diez M, *cien M*, *mil M*, *diez mil M*, *cien mil M*, *billón*.

El *billón* es 1 *millón* de *millones*. Afortunadamente, no vamos a utilizar mucho estas cantidades en nuestras prácticas aritméticas.

1.2. Fichas binarias

No es difícil expresar 1, 2, 4, 8, 16 y 32 mediante cuadros de puntos:



Los cuadros que expresan estos números se pueden construir de una manera muy sencilla usando cartulinas y papel cuadriculado. A tal efecto, se debe elegir un modelo de papel cuadriculado en el que la separación entre rayas contiguas es 8 milímetros. Juntando cuatro cuadrados mínimos del papel se obtiene un cuadrado *básico* cuyo lado mide 16 milímetros. En el centro de cada cuadrado *básico* se señala un punto. De esta forma, cada cuadro para representar los números indicados está constituido por tantos cuadrados *básicos* como puntos tiene el cuadro.

Los seis cuadros anteriores se designan U, A, B, C, D, E . Se distinguen perfectamente unos de otros por su tamaño. Para reforzar sus dibujos en papel cuadriculado será conveniente pegarlos a cartulinas. Se pueden pegar también a unas láminas rectangulares blancas que se obtienen en las papelerías, de 50 y 65 centímetros de lados y un grosor de 4 milímetros. De esta forma, los cuadros que se van a construir tienen cierto parecido a las fichas del dominó clásico.

Se recortan los cuadros dibujados sobre el papel cuadriculado. Cada uno de ellos se pega sobre una cartulina, o sobre la lámina blanca antes referida. Después se recorta con una tijera el trozo de cartulina con el papel pegado. Si se utiliza la lámina blanca, entonces no vale la tijera: es necesario un instrumento para cortar provisto de una cuchilla extensible, denominado con la palabra inglesa “cutter”, (pronunciado cúter), que se encuentra también en papelerías. Finalmente, en A , C y E se señala una raya que lo divide en

dos partes iguales que U , B y D respectivamente; en B y D se señalan dos rayas cruzadas para indicar las dos posibles divisiones en dos partes iguales que A y C respectivamente.

Observa que A y C son similares, aunque a distinto tamaño, a las fichas del dominó “1 *doble*” y “4 *doble*”. Por esta razón, puede ser adecuado bautizar estas piezas con el nombre de “*fichas binarias*”.

El adjetivo *binario* hace referencia al número *dos*, de la misma forma que *decimal* se refiere a *diez*.

1.3. Naipes binarios

Las seis *fichas binarias* U, A, B, C, D, E se construyen también con cartulinas amarillas. Entonces se obtienen los *naipes binarios amarillos*.

Pero ahora repetimos la operación para construir más naipes

- Rojos:* $F, G, H, I, J, K,$
- Verdes:* L, M, N, P, Q, R
- Azules:* $S, T, V, X, Y, Z.$

Estos nos servirán para manejar números mayores. El criterio es que al pasar de un color al siguiente va aumentando la capacidad de puntos que tiene el naipe. Por ejemplo, el primer naipe rojo F tiene capacidad doble que el mayor amarillo E .

1.4. Moldes binarios

Son piezas como



y vamos a llegar hasta



¿Para qué sirven? Es para expresar números de una manera muy sencilla. Por ejemplo,



significan lo mismo que



Es la razón por la que estos siete números se pueden expresar utilizando solamente las cifras 0 y 1 de la forma siguiente

10 11 100 101 110 111 1000

No te preocupes ahora del porqué; lo estoy anunciando sin explicarlo.

Trabajar solamente con 0 y 1 es muy sencillo cuando ya se han entendido estas cosas. Parecen extrañas y al principio se tarda un poco entenderlas, pero solo es el miedo a lo desconocido. Sin embargo, enseguida se encuentran las grandes ventajas obtenidas para hacer cálculos y para más cosas. Además, esto es la base de la Informática, del funcionamiento de ordenadores, máquinas fotográficas, cine, televisión, Internet... de todo lo *digital*, o *binario*, que se refiere al uso exclusivo de 0 y 1. *Decimal* se asocia a *diez*, y de forma paralela *binario* se asocia a *dos*. En lo digital el número *dos* juega el mismo papel que *diez* en el sistema de numeración usual. Ya lo he anunciado antes: lo que normalmente escribimos 2 es exactamente lo mismo que escribir en binario 10 (que ahora debe leerse *uno-cero* para no confundirlo con *diez*).