

l'intègre

T_{LE}

MATHS

SPÉCIALITÉ ET EXPERTES

Cahier de calcul

Conçu par un collectif
de professeurs de lycée
et classe prépa,
sous la direction
de Colas Bardavid

DUNOD

Direction et conception graphiques de la couverture :
Nicolas Wiel - Pierre-André Gualino (graphiste)

Retrouvez nos ouvrages pour les prépas scientifiques ici



<http://dunod.link/prepassc>

Ce cahier de calcul a été écrit collectivement par une équipe composée de professeurs en classes préparatoires et de professeurs en lycée.

Conception et coordination

Colas BARDAVID

Aide à la coordination

Jérôme TROCHON

Équipe des auteurs

Mélissa BAILLÉUIL-INGLART

Romain BASSON

Ménard BOURGADE

Van Bien BUI

Alain CAMANES

Carole CHABANIER

Mathilde COLIN DE VERDIÈRE

Geneviève DAVION

Éliane GAYOUT

Christopher GOYET

Hélène GROS

Benjamin GROUX

Jason LAPEYRONNIE

François LAURENT

Blaise LE MEAUX

Steven LU

Lionel MAGNIS

Quang-Thai NGO

Anthony OLLIVIER

Alan PELLÉ

Nicolas POPOFF

Jean-Philippe SPRIET

Relecture

Rémy ALLOU, Thibaut DEHEUVELS, Anne-Lucie DELVALLEZ, Pierre CAUCHOIS, Anne FOUBERT, Jérôme GÄRTNER, Éliane GAYOUT, William GREGORY, Jonathan HARTER, Marie HÉZARD, Sandrine et Hadrien LARÔME, Landry LAVOINE, Arthur MEYER, Pedro MONTOYA, Inès NEBZRY, Sébastien PELLERIN

Illustrations

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf SCHMITZER (The Noun Project).

Le pictogramme de la roue crantée a été créé par AFY STUDIO (The Noun Project).

Le pictogramme de la calculatrice a été créé par Sita RAISITA (The Noun Project).

Le pictogramme du bateau a été créé par MELLO (The Noun Project).

Sommaire

<i>Introduction</i>	vii
<i>Conventions suivies dans ce livre</i>	ix

Limites

☐ Fiche 1. Limites de fonctions	3
☐ Fiche 2. Limites de suites	9

Logarithme

☐ Fiche 3. Propriétés algébriques du logarithme	15
☐ Fiche 4. Dérivée du logarithme	19

Fonctions trigonométriques

☐ Fiche 5. Fonctions trigonométriques	23
☐ Fiche 6. Dérivation des fonctions trigonométriques	31

Dérivation

☐ Fiche 7. Révisions sur la dérivation	35
☐ Fiche 8. Dérivée des fonctions composées	39

Primitives

☐ Fiche 9. Primitives I	44
☐ Fiche 10. Primitives II	48

Équations différentielles

☐ Fiche 11. Équations différentielles	53
--	----

Intégration

☐ Fiche 12. Intégration I	56
☐ Fiche 13. Intégration II	58
☐ Fiche 14. Intégration III	61
☐ Fiche 15. Intégration par parties I	65
☐ Fiche 16. Intégration par parties II	68
☐ Fiche 17. Intégration des fonctions trigonométriques	72

Combinatoire et dénombrement

☐	Fiche 18. Cardinaux et coefficients binomiaux.....	76
☐	Fiche 19. Dénombrement	82

Probabilités

☐	Fiche 20. Généralités sur les probabilités.....	88
☐	Fiche 21. Autour de la loi binomiale.....	95

Géométrie dans l'espace

☐	Fiche 22. Droites dans l'espace	102
☐	Fiche 23. Produit scalaire dans l'espace.....	107
☐	Fiche 24. Plans et sphères dans l'espace	114

Maths expertes : Nombres complexes

☐	Fiche 25. Calcul algébrique complexe.....	121
☐	Fiche 26. Équations de degré 2	126
☐	Fiche 27. Formes exponentielles	130
☐	Fiche 28. Formule du binôme.....	134
☐	Fiche 29. Complexes et géométrie	140

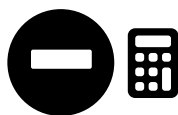
Maths expertes : Matrices

☐	Fiche 30. Calcul matriciel I.....	145
☐	Fiche 31. Calcul matriciel II.....	150
☐	Fiche 32. Matrices inversibles.....	154

Maths expertes : Arithmétique

☐	Fiche 33. Congruences.....	159
☐	Fiche 34. PGCD	163

Dans tout ce livre, l'usage de la calculatrice est strictement et formellement interdit.



Utiliser une calculatrice pour les exercices serait tout simplement absurde : le but même de ce livre est de fournir à l'étudiant un outil pour s'entraîner au calcul.

Introduction

Le calcul

Le calcul a parfois été délaissé par l'école.

On lui reprochait son côté rébarbatif, on disait que les calculatrices pouvaient s'en charger.

On lui préférait les activités de recherche, plus ludiques, plus intéressantes.

On déconseillait de donner aux élèves des fiches de calcul.

Ce faisant, on a formé des élèves à qui il manquait quelque chose d'essentiel.

Les vertus du calcul

Le calcul a de nombreuses qualités, de nombreuses vertus.

- Le calcul est indispensable aux mathématiques.

Sans calcul, les mathématiques seraient un paysage inerte, sans mouvement.

C'est le calcul qui permet de transformer une expression $A(x)$ en une autre expression $B(x)$.

C'est le calcul qui permet de montrer que deux quantités sont égales, que deux choses sont identiques.

Quand on explore une situation mathématique, l'intuition est la boussole, c'est elle qui nous indique la direction à prendre. Mais c'est le calcul qui permet d'avancer, de passer d'une étape à la suivante.

- Le calcul permet de se familiariser avec les objets mathématiques compliqués.

Certains objets mathématiques sont difficiles à appréhender. Qu'on pense par exemple aux vecteurs. On peut être dérouté la première fois qu'on doit raisonner avec les vecteurs. Dans ce cas, il est conseillé de beaucoup calculer avec les vecteurs. À force d'en faire, on s'y habitue ; à la fin, on n'est plus dérouté.

- Le calcul donne des idées.

Face à un problème mathématique, être fort en calcul est très utile. On imagine rapidement ce qui va se passer, on peut prévoir « de tête » la direction globale du calcul et donc prendre une bonne direction.

- Le calcul est comme un échauffement mathématique.

- Le calcul est *a priori* une activité sans piège.

Il suffit de suivre les règles méthodiquement.

- Le calcul peut même être ludique !

L'intérêt du calcul

C'est très simple.

Si vous voulez bien comprendre les mathématiques, le calcul est indispensable.

Quand on apprend à jouer au piano, faire des gammes est, de même, indispensable. Elles permettent de délier les doigts, elles permettent d'ancrer dans les mains des habitudes, des réflexes. Sans gamme, certains morceaux sont inabordables.

De même, la pratique du calcul permet de mieux comprendre les mathématiques.

Le cahier de calcul

Le cahier de calcul est l'outil idéal pour vous entraîner au calcul, en toute autonomie.

Il a été conçu par une large équipe de professeurs de mathématiques, en lycée et en classes préparatoires, tous soucieux de vous apporter l'aide et les outils pour réussir.

Comment est-il organisé ?

Trois parties pour chaque fiche

Chaque fiche du cahier de calcul est divisée en trois parties :

- une première partie de calculs généraux, destinée à **vous entraîner sur les fondamentaux** ;
- la partie principale, qui porte sur le thème de **la fiche en question** ;
- une dernière partie, composée de **calculs plus avancés**, qui est prévue pour ceux qui veulent aller plus loin.

Des pictogrammes

Le temps de résolution de chaque calcul (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par :

- des bateaux  pour les exercices de calculs généraux ;
- des horloges  pour les exercices de la partie principale ;
- des roues crantées  pour les exercices plus avancés.

Des cadres pour les réponses

Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à nous écrire à l'adresse cahierdecacul@gmail.com. Merci en nous contactant de donner l'identifiant de la fiche, écrit en gris clair en haut à gauche de chaque fiche.

Conventions suivies dans ce livre

Polynômes

Dans ce cahier de calcul, nous avons choisi de noter les polynômes avec la lettre « X ».

- Ainsi, au lieu de considérer, par exemple, la fonction

$$t \mapsto 5t^4 - 3t^3 + 25t^2 + 10t - 1,$$

on considérera le polynôme

$$5X^4 - 3X^3 + 25X^2 + 10X - 1.$$

- On notera généralement les polynômes P ou Q . Par exemple, on peut poser $P = 5X^2 - 3X - 2$.
- Les polynômes peuvent être évalués en un nombre, comme les fonctions. Ainsi, pour $t \in \mathbb{R}$, on peut considérer $P(t)$. En reprenant l'exemple précédent, on a

$$P(1) = 5 \times 1^2 - 3 \times 1 - 2 = 0.$$

On dit alors que 1 *est une racine de* P .

Définition des variables

Dans certains exercices, nous avons choisi, par souci de clarté et de concision, de ne pas préciser à quel ensemble appartiennent les variables.

- Par exemple, on pourra demander de simplifier l'expression

$$\frac{2-x}{x+3} - \frac{1-x}{5-x}$$

sans préciser qui est la variable x .

- Dans ce cas, il faudra toujours considérer que la variable x est implicitement définie et appartient au bon ensemble.
- Dans l'exemple précédent, il est sous-entendu que x est un nombre réel différent de -3 et 5 .

Bons calculs à vous !

Énoncés

Limites de fonctions

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1



Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\frac{x^3 + x^2}{x}$

c) $\frac{x^3 + x^2 + x^4}{x^2}$

b) $x^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right)$

Calcul 1.2



Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes.

a) $e^{2x} \times e^{-x}$

c) $\frac{e^{2x+1}}{e^{-x}}$

b) $\frac{e^{3x}}{e^x}$

d) $e^{x^2+x+1} \times e^{-x^2+3x}$

Fractions, polynômes et racines

Calcul 1.3 — Détection de forme indéterminée (I).



Pour chaque expression suivante, dire s'il s'agit d'une forme indéterminée, auquel cas on ne cherchera pas à calculer la limite et on écrira « FI » dans le cadre-réponse ; s'il ne s'agit pas d'une forme indéterminée, on donnera la limite en question.

a) $e^x - x$, en $+\infty$

c) $\frac{\ln(x)}{x}$, en $+\infty$

b) $e^x - x$, en $-\infty$

d) $\frac{\ln(x)}{x}$, en 0^+

Calcul 1.4 — Détection de forme indéterminée (II).



Même exercice.

a) $\frac{\cos(x)}{x}$, en 0^+

c) $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, en $\frac{\pi}{2}^-$

b) $\frac{\sin(x)}{x}$, en 0^+

d) $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, en $\frac{\pi}{2}^+$

Calcul 1.5



Déterminer les limites suivantes.

On mettra en facteur des termes dominants pour lever l'indétermination.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2}{x^2 + x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 - x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3}{x^2 + x + 1}$

Calcul 1.6



Même exercice.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 3x^3}}{-2x^2 + 7}$

Calcul 1.7



Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x+2)^2 - x^2)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 - x(x+1) \right)$

Calcul 1.8



Chercher des facteurs communs afin de simplifier la fraction, pour lever l'indétermination, puis donner la limite des expressions suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x - 1}{4x^2 - 1}$

Calcul 1.9



Même exercice.

On cherchera au préalable à factoriser les polynômes au numérateur et au dénominateur.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 2x}$

Calcul 1.10 — Une identité remarquable de degré 3.

En utilisant la formule

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

valable pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, déterminer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$

Calcul 1.11 — En utilisant la quantité conjuguée (I).

On souhaite déterminer la limite de $\sqrt{x^2 + 1} - x$ en $+\infty$.

a) A-t-on $\sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$?

b) Développer $(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)$

c) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

Calcul 1.12 — En utilisant la quantité conjuguée (II).

En adaptant la technique précédente pour lever l'indétermination, calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x} - x}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x})$

Croissances comparées**Calcul 1.13 — En factorisant (I).**

Calculer :

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^x$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-7} + 3e^x}{e^x + x}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x^8}{x + 1}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{2x}}{e^x + x}$

Calcul 1.14

En posant $X = \frac{1}{x}$, déterminer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}$

Calcul 1.15 — En factorisant (II).



Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \ln(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln(x)}{x - \ln(x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^2 - 7}{3 + 2\ln(x)}$

Calcul 1.16 — Une limite classique.



Quelle est la limite de $x \mapsto x \ln(x)$ en 0^+ ?

(a) $+\infty$

(b) $-\infty$

(c) 0

(d) 1

.....

Calcul 1.17 — Une puissance de puissance.



Pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on définit $a^b = e^{b \ln(a)}$.

a) Que vaut x^x pour $x = \frac{1}{2}$?

b) Que vaut x^x pour $x = \frac{1}{4}$?

c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

Calcul 1.18



En mettant en facteur l'exponentielle, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x + 4x) - x)$

Calcul 1.19



a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{\ln(x)} - \ln(x))$

b) En écrivant $x = e^{\ln(x)}$, en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{\ln(x)}}}{x}$