

René Husson • Claude Iung

Jean-François Aubry • Jamal Daafouz

Didier Wolf

AUTOMATIQUE

Du cahier des charges
à la réalisation de systèmes

DUNOD

Ont également participé à cet ouvrage :
(par ordre alphabétique)

Thierry Bastogne, Maître de conférences à l'UHP, pour le chapitre 8 « Modélisations à base de composants ».

Michel Dufaut, Professeur à l'ENSEM, pour le chapitre 12 « Traitement du signal ».

Marc Gabriel, Professeur émérite à l'UHP, pour le chapitre 18 « Maintenance ».

Valérie Louis-Dorr, Maître de conférences à l'ENSEM, pour une partie du chapitre 13 « Instrumentation ».

Didier Maquin, Professeur à l'INPL, pour une partie du chapitre 16 « Surveillance et diagnostic » et une partie du chapitre 19 « Boîte à outils ».

Benoît Marx, Maître de conférences à l'ENSG pour une partie du chapitre 16 « Surveillance et diagnostic ».

José Ragot, Professeur à l'ENSG, pour une partie du chapitre 16 « Surveillance et diagnostic ».

Radu Ranta, Maître de conférences à l'ENSEM, pour une partie du chapitre 13 « Instrumentation ».

Alain Richard, Professeur à l'UHP, pour le chapitre 6 « Suites et processus aléatoires ».

Pierre Riedinger, Maître de conférence à l'ENSEM, pour le chapitre 11 « Méthodes d'optimisation ».

Illustration de couverture :
Robot soudage en usine © istockphoto.com/Olga Serdyuk

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2007, nouvelle présentation 2017

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-076300-9

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Préface

Comme le rappelle cet ouvrage, la pratique de l'automatique remonte à l'Antiquité. Héritière des modèles de la physique, s'appuyant sur les applications des mathématiques et de l'informatique, l'automatique a progressivement étendu ses méthodes à un grand nombre de champs disciplinaires. Elle est devenue progressivement une partie intégrante et incontournable des sciences de l'ingénieur. Mais peut-on parler de discipline à son sujet tant son champ d'application est vaste et varié (méthodes d'optimisation, commande des machines, diagnostic...) ? Même l'analyse financière ou la biologie peuvent recourir à ses méthodes ou contribuer à enrichir ses modèles.

Le XX^e siècle nous a éloignés de la croyance naïve en la toute puissance de la mécanique rationnelle et de quelques lois physiques simples et fondamentales dans la modélisation du monde naturel ou créé par l'Homme. C'est justement la complexité croissante des modèles et leur caractère interdisciplinaire qui placent l'automatique dans une position centrale.

La complexité des problèmes auxquels l'automatique est confrontée rend d'autant plus ardue la tâche de ceux qui veulent s'initier à ses modèles et méthodes. Même quand il veut approfondir les questions, un ouvrage de vulgarisation ne peut que survoler les problèmes. À l'inverse, un ouvrage spécialisé n'abordera qu'un champ restreint laissant le lecteur dans l'ignorance de la richesse des ressources offertes par l'automatique. Une encyclopédie peut surmonter ce type de difficulté mais au prix d'un alourdissement considérable de l'ouvrage risquant de provoquer la lassitude du lecteur. En fin de compte elle devra, elle aussi, renvoyer à des ouvrages spécialisés.

En évitant ces écueils, le présent ouvrage réalise une synthèse originale entre initiation et formation. Il propose au lecteur dans presque chaque champ de l'automatique une initiation solide qui procure une culture de base indispensable à une approche ouverte des problèmes auxquels l'ingénieur peut être confronté. La volonté de limiter le volume à un seul tome a conduit à exclure provisoirement l'informatique industrielle. Le lecteur intéressé pourra se reporter aux ouvrages spécialisés sur le temps réel, les réseaux programmables, les automates industriels...

La présentation des modèles part des applications et justifie pleinement l'effort d'abstraction nécessaire. La lecture de l'ouvrage n'est pas nécessairement linéaire. Nul doute qu'une telle approche donne au lecteur le goût de poursuivre et d'approfondir le champ qui l'intéresse. Une bibliographie récente le guide dans cette démarche. Une boîte à outils placée en fin d'ouvrage prend en compte la diversité des parcours de formation et permet au lecteur

de se remettre en mémoire quelques éléments de calcul matriciel, d'algèbre de Boole ou de théorie des graphes.

Vivant, évolutif, cet ouvrage rénove la notion traditionnelle d'ouvrage de référence. L'extrême richesse des thèmes traités donne au lecteur une représentation saisissante des outils mis à la disposition des ingénieurs pour résoudre des problèmes industriels de plus en plus complexes.

Le développement de la science et de la technologie, la complexité des problèmes abordés rendent impossible la concentration de compétences diversifiées et de haut niveau sur un tout petit nombre d'individus. L'évolution très rapide des connaissances et des méthodes fait que le temps n'est plus à la rédaction par un ou deux auteurs d'ouvrages sur le large champ de connaissances des sciences de l'ingénieur. C'est tout le mérite des enseignants de l'ENSEM (École Nationale Supérieure d'Électricité et de Mécanique de Nancy) d'avoir su mettre en place dans la durée un travail collaboratif exemplaire par sa qualité et le nombre des intervenants. Leur grande expérience pédagogique en école d'ingénieurs leur a permis de proposer une initiation aux difficultés graduées allant du concret vers l'abstrait.

La visée pédagogique de l'ouvrage le destine aux étudiants en école d'ingénieurs, aux étudiants de l'enseignement supérieur en transition vers les carrières d'ingénieurs, à tous ceux qui, engagés dans la vie active, sont amenés par la nature de leurs travaux ou la nécessité d'une évolution de carrière à enrichir leurs compétences en automatique. Les applications étant au cœur de l'ouvrage, les étudiants titulaires d'un BTS ou DUT et envisageant une poursuite d'études peuvent tester leur appétence pour les domaines abordés grâce à une transition progressive vers l'abstraction.

Les carrières de l'enseignement ne doivent pas non plus être oubliées : un candidat à l'agrégation de Physique Appliquée ou de Génie Électrique y trouvera l'occasion d'enrichir sa vision d'un champ disciplinaire. Un enseignant de classes préparatoires y puisera de précieux renseignements sur les contenus de formation actuels en école d'ingénieurs et les compétences intellectuelles auxquelles il doit préparer ses étudiants. Cet ouvrage est aussi un excellent moyen pour un enseignant en BTS Contrôle Industriel et Régulation automatique de parfaire ou d'actualiser ses connaissances.

Pierre MALLÉUS
Inspecteur Général de l'Éducation Nationale

Table des matières

PRÉFACE par Pierre Malléus

V

PREMIÈRE PARTIE

LES MODÈLES (STRUCTURE ET ANALYSE)

CHAPITRE 1 • INTRODUCTION	3
1.1 La notion de modèle	4
1.2 Les systèmes dynamiques	6
CHAPITRE 2 • LES MODÈLES D'ÉTAT	12
2.1 Introduction	12
2.2 Les modèles LTI	13
CHAPITRE 3 • LES FONCTIONS DE TRANSFERT	28
3.1 Introduction	28
3.2 Opérateur de transfert	28
3.3 Propriétés	35
3.4 Passage transfert-état	36
3.5 Associations de transferts	43
CHAPITRE 4 • SYSTÈMES NON LINÉAIRES	49
4.1 Modèles et phénomènes non linéaires	49
4.2 Stabilité d'un état d'équilibre	56
4.3 Linéarisation	58
4.4 Méthode de Lyapunov	70
4.5 Commandabilité des systèmes non linéaires	80
CHAPITRE 5 • MODÈLES SIMPLIFIÉS	84
5.1 Introduction	84
5.2 Réalisations équilibrées	84

5.3	Perturbations singulières : théorie générale	94
5.4	Perturbations singulières : le cas LTI	100
5.5	Conclusion	107
CHAPITRE 6 • SUITES ET PROCESSUS ALÉATOIRES		108
6.1	Introduction	108
6.2	Variables aléatoires	109
6.3	Suites de variables aléatoires et processus stochastiques	118
6.4	Représentation spectrale et filtrage des processus aléatoires	126
6.5	Modèles de processus aléatoires	133
CHAPITRE 7 • MODÈLES DES SYSTÈMES À ÉVÉNEMENTS DISCRETS		141
7.1	Introduction	141
7.2	Le séquençement des événements	143
7.3	Prise en compte du temps	183
7.4	Complexité et structuration	197
CHAPITRE 8 • MODÉLISATIONS À BASE DE COMPOSANTS		199
8.1	Introduction	199
8.2	Introduction au paradigme objet	200
8.3	Modélisation de la structure statique d'un système avec UML	206
8.4	Théories des analogies en ingénierie des systèmes	208
8.5	Schéma-bloc	214
8.6	Graphes de liaison énergétique	217
8.7	Méta-modélisation objet des systèmes dynamiques	221
8.8	Langage Modelica	228

DEUXIÈME PARTIE

COMMANDE DES SYSTÈMES

CHAPITRE 9 • COMMANDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES		237
9.1	Introduction	237
9.2	La commande optimale des systèmes dynamiques	240
9.3	La commande prédictive	251
9.4	La commande par retour d'état	258
9.5	Les problèmes de régulation	265
9.6	Synthèse d'une régulation	287

CHAPITRE 10 • COMMANDE DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES	297
10.1 Introduction	297
10.2 Quelques problèmes de commande non linéaire	297
10.3 Utilisation d'outils développés pour les systèmes linéaires	299
10.4 Quelques méthodes de commande non linéaire	306
10.5 Conclusion	317
CHAPITRE 11 • MÉTHODES D'OPTIMISATION	318
11.1 Introduction	318
11.2 Optimisation non contrainte	319
11.3 Optimisation contrainte	332

TROISIÈME PARTIE

MISE EN ŒUVRE DE L'AUTOMATISATION

CHAPITRE 12 • TRAITEMENT DU SIGNAL	355
12.1 Introduction et sommaire	355
12.2 Généralité sur les signaux	356
12.3 Traitements élémentaires sur les signaux	361
12.4 Transformée de Fourier	367
12.5 La Transformée en z	377
12.6 Transmittance en z d'un traitement numérique	386
12.7 Le filtrage des signaux	391
12.8 Synthèse des filtres numériques	409
CHAPITRE 13 • INSTRUMENTATION	421
13.1 Introduction	421
13.2 Les capteurs	422
13.3 Caractéristiques métrologiques de la chaîne	439
13.4 Le traitement de la mesure analogique	442
13.5 L'acquisition de données	460
CHAPITRE 14 • LA VISION ARTIFICIELLE	472
14.1 Introduction	472
14.2 Acquisition des images	473
14.3 Traitement des images	501
14.4 Conclusion	523

CHAPITRE 15 • LES ACTIONNEURS ET LES TRANSMETTEURS DE MOUVEMENT	524
15.1 Introduction	524
15.2 Les actionneurs électriques	525
15.3 Les actionneurs hydrauliques	545
15.4 Les transmetteurs de mouvements sans glissement	552

QUATRIÈME PARTIE

SURVEILLANCE, SÛRETÉ DE FONCTIONNEMENT ET MAINTENANCE

CHAPITRE 16 • SURVEILLANCE ET DIAGNOSTIC	563
16.1 Introduction générale	563
16.2 Validation de données	565
16.3 Diagnostic à base d'observateurs	586
16.4 Analyse en composantes principales et diagnostic	603
CHAPITRE 17 • SÛRETÉ DE FONCTIONNEMENT	615
17.1 Concepts et définitions	615
17.2 Composantes de la sûreté de fonctionnement d'une entité	619
17.3 Les temps caractéristiques pour la S.D.F.	622
17.4 Mesures de la fiabilité d'une entité	622
17.5 Mesures de la maintenabilité d'une entité	625
17.6 Fiabilité d'un système	627
17.7 Disponibilité des systèmes réparables représentation d'état	637
17.8 Autres modèles et outils de la SdF	656
17.9 Logiciels et ateliers logiciels dédiés aux études de SdF	658
CHAPITRE 18 • MAINTENANCE	660
18.1 Introduction	660
18.2 Les définitions, les normes	661
18.3 Outils méthodologiques	669
CHAPITRE 19 • BOÎTE À OUTILS	697
19.1 Quelques rappels d'algèbre linéaire	697
19.2 Calcul opérationnel	698
19.3 Composantes principales	698
19.4 Bref rappel sur les normes et les valeurs singulières	699
19.5 Brève présentation du filtre de Kalman	701
19.6 Dérivée et Crochets de Lie	703
19.7 Matrices de passage d'un espace colorimétrique à l'autre	704

19.8	Estimateur des moindres carrés	705
19.9	Opérations de dérivation matricielle	706
19.10	Applications du chapitre « Diagnostic »	708
19.11	Rappels d'algèbre de Boole	713
19.12	Rappels sur la théorie des graphes	719
BIBLIOGRAPHIE		735
INDEX		749

Partie I

Les Modèles (Structure et Analyse)

Chapitre 1

Introduction

L'automatique s'intéresse aux systèmes. Constitués d'ensembles naturels (bancs de harengs) ou artificiels (avions), les systèmes évoluent au cours du temps en fonction de sollicitations extérieures. Ces sollicitations sont appelées entrées. Lorsque ces entrées peuvent être créées pour piloter le système, on les appelle commandes ou entrées de commande ou encore entrées, (bruit pour diriger le banc de harengs, angle de la gouverne de profondeur de l'avion), lorsque ces entrées sont indépendantes de la volonté de l'automaticien on les appelle perturbations (présence d'un prédateur, trou d'air), les informations disponibles sur le système sont appelées sorties (information sonar, angle de piqué), figure (1.1). Le rôle de l'automaticien est de concevoir le contrôle des systèmes. Sous ce nom très général, on trouve des actions très différentes : maintien de l'avion en vol horizontal à vitesse constante (action de régulation), orientation du banc de harengs vers les filets de pêche (action de pilotage ou de commande), calcul de la trajectoire que doit suivre l'avion pour économiser le carburant tout en arrivant à l'heure (action de planification, d'optimisation), évaluation de la pression dans une canalisation en l'absence de capteur (action d'observation), dire que le fonctionnement du réacteur est parfait ou au contraire annoncer le fonctionnement défectueux d'un organe (action de diagnostic ou de surveillance). Pour mener à bien ces différentes tâches, on utilise les informations fournies par les sorties et on élabore les commandes si l'action l'exige.

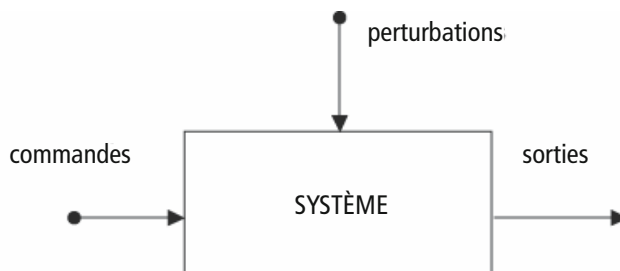


Figure 1.1 Un système et ses liaisons avec l'extérieur.

On comprend aisément que la connaissance des sorties ne permet que très rarement d'aboutir. Il est nécessaire de posséder des informations sur le comportement du système sous l'influence des commandes, des perturbations, du temps, et comment cette évolution se traduit au niveau des sorties. L'ensemble de ces informations constitue le modèle.

1.1 LA NOTION DE MODÈLE

Définition 1.1 (modèle) *Le modèle est l'ensemble des informations qui permettent de calculer l'évolution d'un système en fonction des entrées qui lui sont appliquées.*

Cette définition très générale appelle quelques commentaires :

- les modèles peuvent être de nature très variées : équations, tables, cartes, modèle linguistique.

Un modèle simple pour réguler la température :

Parmi les régulations que nous avons tous rencontrées figure sûrement celle de la température d'une pièce. La partie visible est le thermostat sur lequel on affiche la température désirée. Les modèles de thermostats les plus simples jouent à la fois les rôles de capteur et de régulateur. Pendant longtemps un thermostat a été constitué d'un système à bilame qui ouvrait un circuit électrique quand la chaleur atteignait un certain stade et fermait celui-ci dès que l'on descendait en dessous de cette même température. Cette régulation est fondée sur un modèle élémentaire de la température d'une pièce : si on chauffe, la température augmente, si on ne chauffe pas la température diminue !

- les modèles ne prétendent pas être une vérité (cf. § 1.1.1) mais un outil de représentation plus ou moins imparfait. La confusion est entretenue par l'usage. En effet, bien que le modèle ne soit pas le système, on utilise souvent le mot « système » au lieu du mot « modèle » pour parler d'une classe particulière : « système linéaire » (qui n'existent pas dans la nature) au lieu de « système à modèle linéaire ».
- un même système peut être représenté par des modèles de natures différentes.
- un modèle n'a de sens véritable que par l'utilisation que l'on en fait. Un « bon modèle » est celui qui est le mieux adapté à son utilisation.
- un modèle a en général un domaine de validité, en conséquence plusieurs modèles pourront être nécessaires pour décrire un fonctionnement.
- la simulation d'un système est la résolution de son modèle.
- l'identification est la technique utilisée pour rechercher les valeurs des paramètres d'un modèle.

1.1.1 Lois et Modèles

Le problème n'est pas simple. Il suffit de lire la première ligne de mots clés de la section 2 du CNRS qui s'intitulait « Théories physiques : méthodes, modèles et applications » pour trouver : « Lois et interactions fondamentales ». Pour une discussion sur les « lois physiques » on pourra se reporter au livre de Christian Magnan « La nature sans foi ni loi » et au condensé : <http://www.dstu.univ-montp2.fr/GRAAL/perso/magnan/Nature209.html>. Pour

une discussion sur la nécessité des modèles, citons un extrait du dossier : « Les modèles de l'Univers » <http://www.astrosurf.org/lombry/cosmos-modelesunivers.html> du projet LUXORION : « En bousculant la symbolique Kantienne, les chercheurs qui désiraient étudier l'Univers, déterminer les lois qui le gouvernent, expliquer la formation et l'évolution des galaxies, ont dû imaginer des « modèles » qui le représentaient, modèles hypothétiques qui englobaient toutes les propriétés connues de l'Univers. Ces modèles sont des conceptions abstraites, mathématiques, où les sensations sont absentes. Elles n'ont rien à voir avec la réalité... »

1.1.2 Comment classer les modèles ?

La définition (1.1) peut s'appliquer à des quantités de modèle de nature et de forme différentes. On imagine bien que les méthodes qui seront développées pour concevoir et réaliser le contrôle vont dépendre de ces modèles. Il est donc intéressant de savoir si une classification peut aider dans la recherche d'une méthode adaptée. Des critères de classement divers ont été énoncés. Considérons en quelques-uns :

Soyez vigilant : Les variables ne sont pas des constantes, ce sont des fonctions du temps (normal si on veut qu'elles varient !). Il faut distinguer la variable x de la valeur $x(t)$ qu'elle prend à un instant donné.

1. Nature des variables qui interviennent pour décrire le fonctionnement du système, ses entrées et ses sorties :
 - variables réelles ($\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$) : systèmes continus.
 - variables logiques $\{0; 1\}^n$: systèmes séquentiels ou à événements discrets.
 - variables réelles et variables logiques : systèmes hybrides.
 - variables aléatoires : systèmes stochastiques.
2. Nature de la variable temps :
 - variable réelle : $\mathbb{R}$: systèmes à temps continu.
 - variable discrète : $\mathbb{N}$: systèmes à temps discret, systèmes échantillonnés.
3. Nature des équations :
 - équations différentielles : systèmes différentiels, systèmes à constantes localisées.
 - équations aux dérivées partielles : systèmes à constantes réparties.
 - équations aux différences : systèmes discrets.
 - équations linéaires : systèmes linéaires.
 - équations non linéaires : systèmes non linéaires.
4. Manière d'obtenir le modèle :
 - à partir de lois physiques : modèle de connaissance.
 - *a priori* (on ne se préoccupe pas de la réalité physique du système, mais on cherche la représentation qui nous convient le mieux pour décrire le phénomène) : modèle de représentation.

5. Nature des informations fournies par le modèle :

- information sur la relation entre les entrées et les sorties : modèle entrée-sortie.
- information sur les variables internes (pas forcément mesurables) : modèle d'état.

Vous retrouvez ces classes de modèles en titre de livre ou en tête de chapitre comme dans cet ouvrage, en tout cas comme mots-clés en automatique. Comme ces classes sont faites sur des critères différents, rien n'empêche d'en associer plusieurs : systèmes linéaires échantillonnés. La conception du contrôle est presque toujours faite en utilisant un modèle, il faudra donc s'assurer, de préférence avant de mettre en route, que ce contrôle fonctionnera encore correctement sur le système dont le comportement n'est pas exactement celui prévu par le modèle. C'est le problème de la robustesse qui doit être un souci constant de l'automaticien. Certaines conceptions, très performantes sur le papier, ont connu des échecs retentissants par défaut de robustesse.

1.2 LES SYSTÈMES DYNAMIQUES

1.2.1 Définitions

Malgré la diversité des modèles, on s'aperçoit assez rapidement d'analogies de comportement entre des systèmes de natures très différentes : systèmes à événements discrets et systèmes continus par exemple. Existe-t-il une théorie générale ? Nous n'avons pas la réponse à cette question, mais une notion assez générale permet de réunir des modèles très différents et de découvrir que la même méthode (la programmation dynamique) peut s'appliquer aussi bien à la recherche d'un chemin dans un graphe que dans le problème de la commande optimale de systèmes continus. C'est la notion de systèmes dynamiques.

Cette notion est malheureusement très souvent donnée de manière très restrictive (par les mécaniciens) et se limite aux systèmes différentiels, lui faisant perdre ainsi l'essentiel de son intérêt.

La notion de système dynamique repose sur la notion d'état. On fait l'hypothèse qu'il existe un ensemble de variables dont la connaissance à un instant donné permet le calcul de l'évolution future, si on connaît les entrées. Cette notion est naturelle pour les modèles différentiels ; on sait que la solution d'une équation différentielle d'ordre n dépend de n conditions initiales. Lorsque ces conditions initiales sont connues, la solution de l'équation différentielle est complètement déterminée. Elle est aussi valable pour bien d'autres systèmes dont nous donnerons quelques exemples. Elle n'exclut ni les systèmes chaotiques, ni les systèmes stochastiques.

Remarque : Le chaos est cartésien. Un système chaotique est un système dynamique régi par des équations différentielles dont les solutions sont extrêmement sensibles aux variations des conditions initiales, au point qu'elles en deviennent imprévisibles.

On appellera X , l'ensemble des valeurs prises par ces variables, cet ensemble peut être fini : $\{0; 1\}$ pour des variables booléennes, infini : intervalle de $\mathbb{R}$, de dimension finie : $\mathbb{R}^n$ et même de dimension infinie.

Il faut aussi :

- préciser l'ensemble des instants pendant lesquels on s'intéresse au système. C'est un ensemble ordonné de réels que l'on notera T . Cela signifie que lorsqu'on a deux instants t_1 et t_2 , on est capable de dire lequel suit ou précède l'autre.
- indiquer les valeurs des entrées du système, on notera U l'ensemble qui les contient ; exemple : l'intervalle $[-10 \text{ volts}, +10 \text{ volts}]$ pour une tension d'entrée.
- définir les entrées admissibles groupées dans l'ensemble noté Ω . Ce sont les fonctions de T dans U acceptables pour le système ; exemple : les fonctions constantes sur les intervalles $[kT_e, (k+1)T_e[$ pour une régulation numérique de période T_e .
- définir les valeurs des sorties : ensemble Y .
- définir les fonctions de sorties $\gamma(x, t, u)$: c'est-à-dire comment calculer les sorties avec l'état, le temps et la commande.
- exprimer la phrase « on peut calculer l'évolution future... ». C'est la clé du système dynamique : il est caractérisé par sa fonction de transition d'état $\varphi(t, t_0, x(t_0), \omega)$, fonction qui fournit la valeur de l'état à tout instant t qui suit un instant t_0 pour lequel on connaît la valeur de l'état $x(t_0)$ et la commande ω appliquée sur l'intervalle $[t_0, t]$. Cette fonction ne peut pas toujours être écrite de manière simple : on ne sait pas, en général, écrire analytiquement la solution d'une équation différentielle non linéaire, mais on sait que moyennant quelques hypothèses, cette solution existe et est unique pour des conditions initiales données. On remarque que seules les valeurs de l'entrée entre t_0 et t ont une importance ; il est inutile de connaître ces valeurs avant t_0 (notion d'état), ni après t (notion de causalité). L'ensemble des valeurs $\{t, \varphi(t, \cdot, \cdot, \cdot)\}$ constitue un ensemble appelé trajectoire du système.

1.2.2 Quelques exemples

Selon les ensembles que nous venons de définir, on obtient différents types de modèles

Ensembles	Systèmes différentiels	Systèmes séquentiels	Systèmes échantillonnés
T	$\mathbb{R}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$
X	$\mathbb{R}^n$	$\{0, 1\}^n$	$\mathbb{R}^n$
U	$\mathbb{R}^m$	$\{0, 1\}^m$	$\mathbb{R}^m$
Ω	$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$	$\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^m$	suites : $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$
Y	$\mathbb{R}^q$	$\{0, 1\}^q$	$\mathbb{R}^q$

auxquels on peut apporter quelques précisions :

- Système à temps continu $T = \mathbb{R}$
- Système à temps discret $T = \mathbb{N}$
- Système de dimension finie X est un espace de dimension finie
- Systèmes à états finis X est fini
- Système fini X, U, Y , sont des ensembles finis

Le système dynamique Σ est dit *libre* si Ω a un seul élément.

Nous allons illustrer ces notions par quelques exemples concrets très simples :

a) Systèmes différentiels

L'évolution des systèmes décrits par une équation différentielle est complètement définie par un nombre de variables égal à l'ordre de l'équation différentielle. On dit que la solution dépend de n constantes d'intégration. Nous prendrons comme exemple un dispositif classique qui nous servira pour illustrer les notions que nous présenterons aux chapitres 1 et 2.

Il s'agit d'un mélangeur parfait illustré par la figure (1.2) : on suppose que le mélange des produits s'effectue de manière instantanée et que la concentration C du produit dissout dans le bac est homogène. L'objectif du contrôle est de régler le niveau H et la concentration C du soluté. Le bac est cylindrique de section S . Il est alimenté par deux sources de concentration C_1 et C_2 dont on contrôle les débits D_1 et D_2 grâce à deux vannes. On étudiera deux modes de fonctionnement :

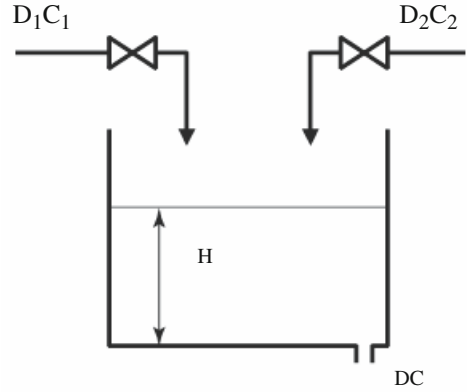


Figure 1.2 Schéma d'un mélangeur idéalisé.

Mode 1 : V1. On admettra que le débit de sortie est $D(t) = k\sqrt{H(t)}$.

Mode 2 : V2. On considère que le débit de sortie est une perturbation.

Pour V1 les entrées de commande sont D_1 et D_2 (ouverture des vannes, ou commande des vannes...) et les sorties sont : H et C .

Pour V2 les entrées de commande sont D_1 et D_2 , l'entrée de perturbation est D et les sorties sont H et C .

On obtient aisément les équations de ce système en écrivant les deux équations de conservation de la masse :

- conservation de la masse totale

$$S \frac{dH}{dt} = D_1 + D_2 - D \quad (1.1)$$

- conservation de la masse du produit dissout

$$\frac{d(SHC)}{dt} = SH \frac{dC}{dt} + SC \frac{dH}{dt} = C_1 D_1 + C_2 D_2 - CD \quad (1.2)$$

ou encore en remplaçant dans (1.2) $\frac{dH}{dt}$ par sa valeur tirée de (1.1) :

$$SH \frac{dC}{dt} = C_1 D_1 + C_2 D_2 - CD_1 - CD_2 \quad (1.3)$$

Ces équations nous indiquent que deux variables sont nécessaires et suffisantes pour calculer l'évolution des sorties (les entrées sont supposées connues). Donc l'espace d'état est $\mathbb{R}^2$ et deux variables d'état naturelles sont H et C .

De nombreux systèmes physiques sont modélisés par des modèles différentiels. Des techniques fondées sur les échanges d'énergie permettent de construire les modèles de systèmes physiques complexes constitués de sous systèmes interconnectés (chapitre 8)

b) Systèmes à temps discret

Considérons un compte d'épargne. On supposera que la période de calcul est la quinzaine et que le taux de rapport par quinzaine est fixe soit a .

$$M_n = M_{n-1}(1 + a) + s_n \quad (1.4)$$

À la quinzaine numéro n , on est donc capable de calculer le montant disponible sur le compte (M_n), si on connaît la somme initiale (M_0) à la quinzaine 0 (date d'ouverture du compte) et la suite des sommes déposées, $s_1, s_2, \dots, s_n$.

$T = \mathbb{N}$ est l'ensemble des numéros de quinzaines.

s_i sont les valeurs de l'entrée $U = \mathbb{Z}$.

Ω est l'ensemble des suites $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$.

On voit sur l'équation (1.4) que pour calculer la valeur du compte à une date donnée il faut connaître cette valeur à la quinzaine précédente. Cette valeur est nécessaire et suffisante. L'espace d'état est de dimension 1, $X = \mathbb{Z}$.

Lorsque la commande d'un système est réalisée par ordinateur (figure 1.3), les commandes élaborées par un algorithme sont appliquées par l'intermédiaire d'un convertisseur numérique-analogique et sont maintenues constantes pendant la période d'échantillonnage T . Les fonctions $u(\cdot)$ ont une forme particulière : fonctions en escalier, constantes sur l'intervalle d'échantillonnage.

$$u(t) = u_k; \forall t \in [kT, (k+1)T] \quad (1.5)$$

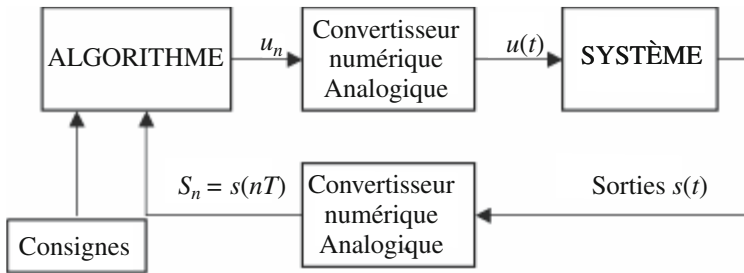


Figure 1.3 Schéma d'une régulation numérique.

L'état du système et les sorties sont des variables continues, mais au niveau de l'algorithme on ne manipule que des suites. On utilisera alors une équation d'état discrète faisant intervenir les valeurs de l'état aux instants d'échantillonnage $x_n = x(nT)$. Elle prendra la forme (1.6) :

$$x_{n+1} = f(x_n, u_n) \quad (1.6)$$

c) Systèmes à événements discrets

Pour contrôler le patinage d'une roue ou pour commander le mécanisme d'entraînement d'une bande magnétique il est indispensable de connaître le sens du mouvement. Ceci se réalise de manière très simple, de la façon suivante : un disque dont une moitié est opaque (figure 1.4), est solidaire de l'arbre du moteur d'entraînement et tourne devant deux cellules photo-électriques c_1 et c_2 . Ces cellules seront éclairées ou non selon qu'elles sont devant la partie transparente ou la partie opaque du disque. Quand elles sont éclairées $c_i = 1$ et 0 sinon.

Il est évident que la seule connaissance des états des deux cellules, éclairées ou non, ne suffit pas à déterminer le sens de rotation. La séquence des signaux intervient.

$$T = \mathbb{R}$$

Les entrées sont c_1 et c_2 , ces variables sont binaires et ne prennent que deux valeurs : éclairées ou non éclairées.

$$\Omega = \{\mathbb{R} \rightarrow [0; 1]^2\}$$

La sortie S est le sens de rotation. On ne pourra savoir le nombre de variables d'état qu'après avoir fait la synthèse de l'automate qui détermine le sens de rotation.

Le système comporte 4 états par sens de rotation. On montre que deux variables d'état (x_1, x_2) suffisent pour décrire l'évolution du système. Les futures valeurs (x_1^+, x_2^+) prises par l'état quand les entrées changent, sont exprimées en fonction des valeurs, à l'instant présent, de ces mêmes variables d'état et des entrées. La sortie S à l'instant présent est donnée par l'état et les entrées, à l'instant présent. Les équations du système sont :

$$\begin{aligned} x_1^+ &= c_2 x_1 + c_1 c_2 + c_1 x_1 \\ x_2^+ &= \overline{c_1} x_2 + \overline{c_1} c_2 + c_2 x_2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$S = \overline{x_1 x_2 c_1} + \overline{x_1} x_2 c_2 + x_1 x_2 c_1 + x_1 \overline{x_2 c_2} \quad (1.8)$$

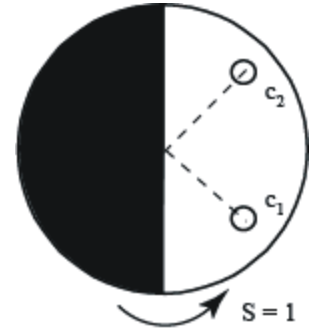


Figure 1.4 Détecteur de sens de rotation.

d) Systèmes Dynamiques Hybrides

La description du fonctionnement de certains systèmes nécessite l'utilisation de variables continues et de variables booléennes. Ces systèmes sont appelés systèmes dynamiques hybrides. On les rencontre dans tous les secteurs industriels. Donnons un exemple élémentaire.

On considère la commande du remplissage d'un réservoir (figure 1.5). Le débit d'entrée d_e est commandé par la vanne V de type tout ou rien.

Le débit de sortie d_s est inconnu, il dépend des utilisateurs. On supposera : $d_s < d_e$.

La commande se fait de la manière suivante :

- la vanne V est fermée lorsque la hauteur d'eau dans le réservoir atteint le niveau haut N_h , détecté par le capteur C_h .
- la vanne est ouverte lorsque le niveau atteint son seuil bas N_b , détecté par le capteur C_b .

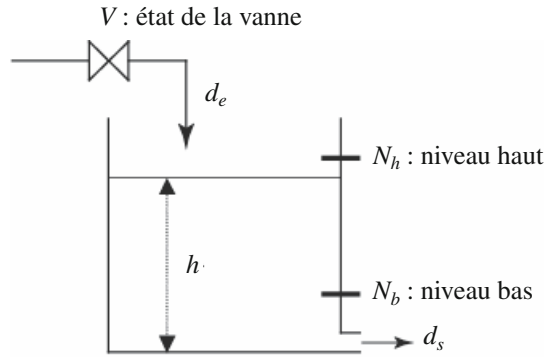


Figure 1.5 Commande de remplissage d'un réservoir.

Deux types d'équations décrivent le système :

1) Les équations de la partie continue (loi de conservation de la masse) :

$$S \frac{dh}{dt} = V d_e - d_s \quad (1.9)$$

où $V = 0$ si la vanne est fermée et $V = 1$ si la vanne est ouverte.

2) Les équations Booléennes de la partie discrète :

$$V^+ = C_b + \bar{C}_h V \quad (1.10)$$

avec

$$C_b = 1 \text{ si } h \leq N_b \quad C_h = 1 \text{ si } h \geq N_h \quad (1.11)$$

C'est l'ensemble des équations (1.9, 1.10) et des conditions de transition des variables C_b et C_h (1.11) qui définit le fonctionnement du système et permet de simuler son évolution.

$$T = \mathbb{R}$$

La sortie est h . Les entrées sont d_e entrée réelle de commande, d_s entrée réelle de perturbation. L'état contient des variables binaires : C_b et C_h , et une variable réelle : h .

Chapitre 2

Les modèles d'état

2.1 INTRODUCTION

La notion de systèmes dynamiques nous montre que la modélisation la plus riche est celle qui utilise la notion d'état puisqu'elle représente un ensemble de variables *a priori* plus grand que celui constitué par les entrées et les sorties. Nous commencerons donc par étudier les modèles qui l'utilisent et que l'on nomme classiquement : « modèles d'état » en opposition avec les modèles « entrées-sorties » qui peuvent paraître plus naturels puisqu'ils ne concernent que les variables « visibles » de l'extérieur. Nous verrons que s'il est toujours possible de trouver un modèle « entrées-sorties » à partir d'un modèle d'état, la réciproque n'est pas toujours vraie et nécessite des hypothèses supplémentaires.

Nous commencerons par les modèles linéaires, non pas parce que ce sont les plus simples, mais parce qu'ils permettent d'introduire de nombreuses notions indispensables à l'automatique et que bien souvent leur utilisation pour concevoir le contrôle est suffisante. On utilise très souvent un modèle obtenu par linéarisation d'un modèle non linéaire, autour d'un point d'équilibre ou autour d'une trajectoire (chapitre 4). C'est en tout cas, et à juste raison, la démarche normale de l'ingénieur avant de mettre en oeuvre les techniques non linéaires. Nous traiterons essentiellement les systèmes linéaires à paramètres constants. En effet, même si certaines propriétés restent vraies dans le cas où les paramètres varieraient en fonction du temps, les résultats pratiques sont peu nombreux. Quant aux systèmes dits « à paramètres variants », leurs méthodes d'étude relèvent clairement des méthodes non linéaires. Il reste à choisir entre les modèles à temps continu et les modèles à temps discret. Il y a des arguments en faveur des uns ou des autres.

- Si le temps est continu les systèmes à contrôler ne le sont pas forcément (cf. le compte d'épargne) et la vision que l'on en a actuellement avec les commandes numériques est clairement à temps discret.
- Bien qu'elles soient plus étudiées dans les cours de mathématiques, les équations différentielles ne sont pas plus simples que les équations de récurrence.

- Il est vrai que les performances, en particulier les réponses temporelles, sont plus simples à interpréter en temps continu.
- Les démonstrations sont plus simples en temps discret, car il suffit en général de compter les équations.

Il serait préférable de commencer par les modèles à temps discret, ne serait-ce que pour habituer tout de suite les lecteurs à travailler avec les équations de récurrence, car ce sont elles qui seront programmées *in fine* pour réaliser le contrôle. Cependant, pour garder le lien avec les équations différentielles qui sont bien connues des étudiants, tout en simplifiant les démonstrations, les deux études seront menées en parallèle.

2.2 LES MODÈLES LTI

Les systèmes dont le fonctionnement est décrit par des équations différentielles ou des équations de récurrence linéaires à coefficients constants sont appelés communément « systèmes LTI » pour systèmes Linéaires à Temps Invariant ou *Linear Time Invariant Systems*. Les notions structurelles fondamentales pour le contrôle seront introduites sur ces modèles : la stabilité, la commandabilité et l'observabilité. Lorsque ces propriétés ne sont pas vérifiées, la première préoccupation de l'automaticien est soit de les obtenir, soit d'évaluer avec quel niveau de dégradation un contrôle peut encore être fait.

2.2.1 Forme canonique

Pour de nombreux systèmes physiques, l'écriture des équations en utilisant des variables d'état est naturelle et couramment employée. Lorsqu'on écrit les équations qui représentent le fonctionnement d'un moteur à courant continu, on écrit l'équation électrique (L, R, i, U, k, ω sont respectivement l'inductance, la résistance et le courant d'induit, la tension d'alimentation, le coefficient de force contre-électromotrice et la vitesse de rotation du rotor)

$$L((di)/(dt)) = U - Ri - k\omega$$

et l'équation mécanique (J, f, Γ_c sont respectivement l'inertie des parties tournantes, le coefficient de frottement visqueux, le couple de charge)

$$J((d\omega)/(dt)) = ki - f\omega - \Gamma_c$$

le courant d'induit et la vitesse de rotation sont les deux variables d'état « naturelles » du moteur.

Nous écrivons les équations différentielles, comme les équations de récurrence, sous la forme de plusieurs équations du premier ordre couplées entre elles. Pour ces systèmes, l'espace d'état est $\mathbb{R}^n$, nous supposons qu'il y a p sorties et m entrées. Les variables d'état, de sorties et d'entrées sont regroupées respectivement dans le vecteur d'état x , le vecteur de sorties y et le vecteur d'entrées u . Les relations sont linéaires et peuvent donc s'écrire sous forme matricielle.

Définition 2.1 (Forme canonique LTI) $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^m$

Cas continu : L'équation d'état d'un système LTI sous forme canonique s'écrit (2.1a) et (2.1b) :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.1a)$$

$$y = Cx + Du \quad (2.1b)$$

Cas discret : Dans le cas discret on utilisera les mêmes notations : matrices A, B, C, D . La forme canonique est (2.2a) et (2.2b) :

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (2.2a)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \quad (2.2b)$$

On rencontrera ces équations chaque fois que le système est commandé par un ordinateur : x_k, y_k, u_k sont les valeurs du vecteur d'état, des sorties et des commandes au $k^{i\text{ème}}$ instant d'échantillonnage.

Dans les deux cas, continu et discret, on parlera du système (A, B, C, D) avec $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^m$ et où :

$A [n \times n]$ est la *matrice d'état*

$B [n \times m]$ est la *matrice d'entrée*

$C [p \times n]$ est la *matrice de sortie*

$D [p \times m]$ est le *transfert direct entrée/sortie*.

Les équations (2.1) et (2.2) sont représentées par les schémas de la figure 2.1

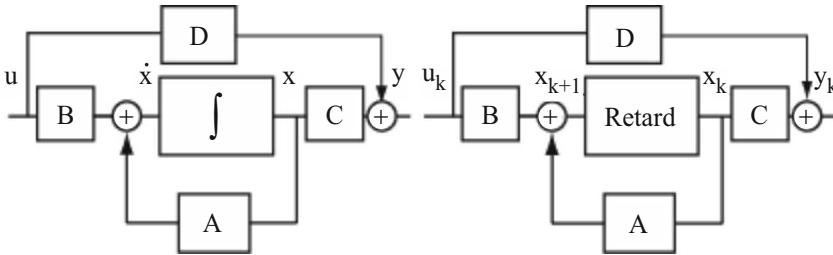


Figure 2.1 Schéma standard pour la forme canonique.

2.2.2 Représentations équivalentes

À partir de la représentation d'état précédente (A, B, C, D) il est possible d'obtenir d'autres formes d'état en effectuant une transformation sur x . Soit P une matrice régulière (P de rang n). On construit un nouveau vecteur d'état z par la transformation

$$z = Px \quad (2.3)$$

Le vecteur z vérifie l'équation (2.4a) et les sorties y peuvent s'écrire en fonction de z et de u par l'équation (2.4b).

$$\dot{z} = A_1 z + B_1 u \quad (2.4a)$$

$$y = C_1 z + D_1 u \quad (2.4b)$$

Les matrices (A_1, B_1, C_1, D_1) vérifient les relations (2.5). Il suffit de remplacer x par $P^{-1}z$ dans (2.1a et 2.1b) pour le démontrer

$$A_1 = PAP^{-1} \quad (2.5a)$$

$$B_1 = PB \quad (2.5b)$$

$$C_1 = CP^{-1} \quad (2.5c)$$

$$D_1 = D \quad (2.5d)$$

Définition 2.2 (représentations équivalentes) Deux représentations (A, B, C, D) et (A_1, B_1, C_1, D_1) sont dites équivalentes, s'il existe une matrice P inversible telle que les équations (2.5) soient vérifiées.

On peut comprendre aisément que les deux ensembles (A, B, C, D) et (A_1, B_1, C_1, D_1) représentent bien le même système. En effet la transformation (2.3) peut être interprétée comme un changement de base dans l'espace d'état et les matrices A , B et C sont respectivement transformées :

- comme la matrice représentant un endomorphisme de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ par le changement de base P^{-1} .
- comme la matrice représentant un endomorphisme de $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec un changement de base dans l'espace de $\mathbb{R}^n$.
- comme la matrice représentant un endomorphisme de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ avec un changement de base dans l'espace de $\mathbb{R}^n$.

On pourra donc considérer ces matrices comme les matrices représentant ces trois endomorphismes. Ces endomorphismes sont les éléments invariants du système, indépendants des bases choisies dans les différents espaces vectoriels. Cette remarque sera utile pour les formes canoniques et pour étudier les réalisations minimales.

2.2.3 La fonction de transition d'état

Pour les systèmes LTI, on sait calculer explicitement la fonction de transition d'état. On l'obtient en intégrant l'équation différentielle ou l'équation de récurrence.

a) Cas continu

La solution générale de l'équation

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.6)$$

est donnée par la théorie des équations différentielles :

$$x(t) = \exp.(A(t - t_0))x(t_0) + \int_{t_0}^t \exp.(A(t - s))Bu(s)ds \quad (2.7)$$

Définition 2.3 (matrice de transition) L'opérateur $\exp(At)$ est souvent appelé matrice de transition du système linéaire.

Rappelons que

$$\exp(At) = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^n t^n}{n!} + \dots \quad (2.8)$$

Pour calculer $\exp(At)$ explicitement on diagonalise A . Soit $\Lambda = P^{-1}AP$ où P est la matrice des vecteurs propres, alors :

$$\exp(At) = P \exp(\Lambda t) P^{-1} \quad (2.9)$$

$$\text{et } \exp(\Lambda t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \text{ où les } \lambda_i \text{ sont les valeurs propres de } A.$$

Cette méthode n'est possible que lorsque A est diagonalisable (voir chapitre 19, Calcul de $\exp(At)$).

b) Cas discret

La solution de l'équation

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (2.10)$$

est immédiate

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=1}^{i=k} A^{i-1} Bu_{k-i} \quad (2.11)$$

Les quantités $\exp.(A(t - t_0))x(t_0)$ et $A^k x_0$ s'appellent les régimes libres. C'est l'évolution du système sur ses conditions initiales.

Les quantités $\int_{t_0}^t \exp.(A(t - s))Bu(s)ds$ et $\sum_{i=1}^{i=k} A^{i-1} Bu_{k-i}$ sont les régimes forcés par les entrées.

c) Passage continu-discret

Lorsqu'un système continu (2.6) est commandé au moyen d'un ordinateur, l'algorithme de commande est activé périodiquement avec une période T : et la commande u est maintenue constante entre deux rafraîchissements ; on a donc

$$u(t) = u(kT) = u_k \quad t \in [kT, (k+1)T[\quad (2.12)$$

il suffit d'utiliser la solution de l'équation différentielle (2.7) avec $t_0 = kT$ et $t = (k+1)T$ pour obtenir le résultat :

$$\begin{aligned} x((k+1)T) &= \exp(A((k+1)T - kT))x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \exp(A((k+1)T - s))Bu_k ds \\ &= \exp(AT)x(kT) + \left(\int_0^T \exp[A(T - s)] B ds \right) u_k \end{aligned}$$

ou

$$x_{k+1} = \exp(AT)x_k + \int_0^T \exp[A(T-s)] Bu_k ds = Ax_k + Bu_k \quad (2.13)$$

2.2.4 La stabilité

Définition 2.4 (point d'équilibre) Soit le système $\dot{x} = f(x)$, on dit que x_e est un point d'équilibre si $f(x_e) = 0$. Soit le système $x_{k+1} = f(x_k)$, on dit que x_e est un point d'équilibre si $x_e = f(x_e)$.

Il est évident qu'au point d'équilibre, comme la dérivée est nulle, le système ne bouge pas. Une trajectoire ayant comme origine un point d'équilibre est réduite à ce point.

On sait parfaitement que cette propriété peut être physiquement complètement illusoire : une pyramide en équilibre sur la pointe a peu de chances d'y rester longtemps. La vraie question est de savoir si :

- le système a tendance à rester à proximité du point d'équilibre.
- à se diriger vers lui.
- à s'en éloigner.

Ces notions s'appellent respectivement :

- stabilité ;
- stabilité asymptotique (globale si la condition initiale n'importe pas) ;
- instabilité.

Elles sont illustrées par les schémas de la figure 2.2

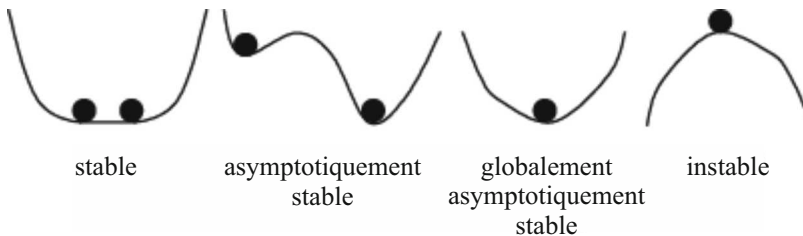


Figure 2.2 Différents types d'équilibre.

En l'absence d'entrée, l'état d'équilibre pour les systèmes LTI continu et discret est l'état nul ($x = 0$).

Exemple 2.1 (mélangeur)

On a l'équilibre lorsque $\frac{dH}{dt} = \frac{dC}{dt} = 0$ D'où les deux équations 1.1 et 1.2 : $D_{10} + D_{20} - D_0 = 0$ et $C_1 D_{10} + C_2 D_{20} - C_0 D_0 = 0$ avec V1 : $D_0 = k\sqrt{H_0}$ ou V2 : $D_0 =$ donnée constante.

Dans la suite nous utiliserons les valeurs numériques suivantes pour développer les calculs : $S = 1, C_1 = 50, C_2 = 10, H_0 = 1, C_0 = 30, k = 0,001$.

Le point d'équilibre est obtenu :

V1 : en résolvant les équations précédentes $D_0 = 0,01$ $D_{10} = D_{20} = 0,005$.

V2 : en donnant la valeur de la constante D_0 . Nous choisirons la valeur trouvée pour l'équilibre dans le mode 1 soit $D_0 = 0,01$.

On trouve alors le même point d'équilibre : $D_{10} = D_{20} = 0,005$

Stabilité et énergie sont liées. L'état d'équilibre d'un système, correspond à un état où son énergie est minimale. Par exemple pour un système mécanique, l'équilibre est atteint quand les énergies cinétique et potentielle sont minimales : c'est à dire : à l'arrêt et au point le plus bas.

Nous étudierons les modèles obtenus par linéarisation autour du point d'équilibre.

On écrit alors les écarts entre les variables et leur position d'équilibre : $X = X_0 + x$ pour obtenir le modèle linéarisé autour du point de fonctionnement.

► V1

$$S \frac{dh}{dt} = d_1 + d_2 - d$$

$$S \left(H_0 \frac{dc}{dt} + C_0 \frac{dh}{dt} \right) = C_1 d_1 + C_2 d_2 - C_0 d - D_0 c$$

En réécrivant ces équations sous la forme canonique :

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{D_0}{2V_0} h + \frac{d_1 + d_2}{S}$$

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{D_0}{V_0} c + \frac{C_1 - C_0}{V_0} d_1 + \frac{C_2 - C_0}{V_0} d_2$$

En posant $\tau = \frac{V_0}{D_0}$ on a le système :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\tau} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{S} & \frac{1}{S} \\ \frac{C_1 - C_0}{V_0} & \frac{C_2 - C_0}{V_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

► V2

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d_1 + d_2 - d}{S} \quad (2.15)$$

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{D_0}{V_0} c + \frac{C_1 - C_0}{V_0} d_1 + \frac{C_2 - C_0}{V_0} d_2 \quad (2.16)$$

Sous la forme matricielle on obtient :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{S} & \frac{1}{S} \\ \frac{C_1 - C_0}{V_0} & \frac{C_2 - C_0}{V_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{S} \\ 0 \end{bmatrix} d \quad (2.17)$$

Application numérique

$$\tau = 100\text{s}$$

$$C_1 - C_0 = 20$$

$$C_2 - C_0 = -20$$

► V1

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.005 & 0 \\ 0 & -0.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 20 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

► V2

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 20 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d \quad (2.19)$$

Définition 2.5 (système LTI stable) On dira qu'un système LTI est (asymptotiquement) stable si l'état $x = 0$ est (asymptotiquement) stable.

Comme on dispose de la solution explicite :

$$x(t) = \exp(At)x_0 \quad (2.20a)$$

$$x_k = A^k x_0 \quad (2.20b)$$

les résultats sont immédiats.

Proposition 2.6 (stabilité) Un système LTI continu est stable si les valeurs propres de la matrice d'état sont à parties réelles négatives. Un système LTI discret est stable si les valeurs propres de la matrice d'état ont un module inférieur ou égal à un.

Proposition 2.7 (stabilité asymptotique) Un système LTI continu est asymptotiquement stable si les valeurs propres de la matrice d'état sont à parties réelles strictement négatives. Un système LTI discret est asymptotiquement stable si les valeurs propres de la matrice d'état ont un module strictement inférieur à un.

Proposition 2.8 Un système LTI asymptotiquement stable est globalement asymptotiquement stable.

■ **Démonstration.** Ces résultats découlent directement des équations (2.20)

Exemple 2.2

V1 L'équilibre est asymptotiquement stable puisque les valeurs propres de la matrice d'état ($-\frac{1}{2\tau}$ et $-\frac{1}{\tau}$) (2.14) sont des nombres négatifs.

V2 L'équilibre est seulement stable puisqu'une valeur propre vaut zéro (2.17).

L'explication physique est simple. Dans cette modélisation le débit de fuite est considéré comme une perturbation, donc indépendant de la hauteur de liquide dans la cuve. Si le débit d'entrée est égal à ce débit de fuite, toute hauteur est un point d'équilibre.

Remarque : Il est important de remarquer que **les matrices d'état sont différentes.**

Il est toujours hasardeux de modéliser un comportement inconnu (ici par exemple, on peut imaginer qu'on ignore la loi qui lie le débit à la hauteur) par une perturbation indépendante. La dynamique interne du système, reflétée par la matrice d'état, est modifiée puisque le débit de fuite n'est plus lié à la hauteur.

La matrice C dépendra des capteurs utilisés.

2.2.5 La commandabilité

Cette propriété donne la réponse au problème suivant : étant donnés un état initial x_0 imposé et un état final x_f désiré, existe-t-il au moins une commande qui amène le système d'un état vers l'autre ? Par exemple, est-il possible d'amener un avion parallèlement à l'axe de la piste d'atterrissage alors qu'il vole à une altitude de 3000 m, avec une vitesse de 600 km/h ?

On comprend l'intérêt de pouvoir répondre à cette question avant de lancer une étude pour rechercher la meilleure commande. Mais il y a plus : si un système possède cette propriété, on est assuré de pouvoir au moins le stabiliser avec une structure de commande simple. *A contrario*, si la commandabilité n'est pas vérifiée sur le système à commander, on peut même être incapable d'arriver à stabiliser le système ; et ceci quelle que soit l'habileté de l'automaticien ! C'est la structure du système qui est à modifier avant de pouvoir entreprendre son contrôle.

Remarquons que cette propriété est très exigeante : avec les entrées, il ne s'agit pas uniquement de faire évoluer les sorties, mais d'amener toutes les composantes du vecteur d'état **à des valeurs prédéfinies**. Est-il évident, par exemple (figure 2.3), que l'on puisse imposer une valeur arbitraire du courant i et de la tension V_s dans le circuit électrique lorsqu'on dispose de la seule source de tension V_e comme commande ?

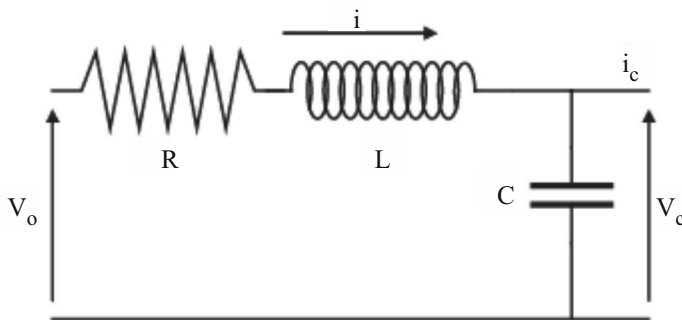


Figure 2.3 Circuit passif (R, L, C).

Il n'est pas facile de répondre à cette question de manière intuitive. Heureusement, la vérification de cette propriété est immédiate dans le cas mono-entrée, elle ne présente de difficulté que dans le cas multivariable.

Pour désigner indifféremment les systèmes continus (2.6) et discrets (2.10), on utilisera l'appellation « système (A, B) ».

a) Définitions

Définition 2.9 (système commandable) *Un système discret est commandable si : quel que soit x_0 l'état initial et quel que soit x_f l'état final désiré, il est possible de trouver une suite finie de commandes $u_0, u_1, \dots, u_{k-1}$ telle que $x_k = x_f$. Un système continu est commandable si : quel que soit x_0 l'état initial et quel que soit x_f l'état final désiré il est possible de trouver une commande u et un temps t_f fini tels que $x(t_f) = x_f$.*

Pour obtenir le critère de commandabilité, nous utiliserons l'approche dite « géométrique » fondée sur les propriétés du sous-espace commandable. L'idée fondamentale (qui pourra s'étendre aux problèmes non linéaires) est la suivante : si on peut trouver une partie D de l'espace d'état telle que, quelle que soit la commande appliquée, toute trajectoire issue de D y reste, alors il est évident que si D n'est pas l'espace d'état tout entier, il y a des points que l'on ne pourra jamais atteindre.

Définition 2.10 (sous-espace commandable) *L'ensemble des états qui peuvent être atteints à partir de l'état initial $x(0) = 0$ par une suite finie de commandes (une commande en temps fini) forme un sous espace vectoriel de l'espace d'état appelé sous-espace commandable (S.E.C.).*

La forme de la solution (2.11) permet de vérifier qu'il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel.

b) Propriétés du SEC

Théorème 2.11 (continu et discret) *Le sous-espace commandable est engendré par les colonnes de la matrice $\mathcal{C}(A, B) = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ où n est la dimension de X .*

Démonstration. (cas discret) D'après la forme de la fonction de transition d'état (2.11) il est clair que tout élément du SEC peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs colonnes extraits des matrices $A^m B$. Le théorème de Cayley-Hamilton montre qu'il suffit de s'arrêter à $m = n - 1$ puisque pour $m \geq n - 1$, A^m est combinaison linéaire des A^i pour i de 0 à $n - 1$.

De ce théorème découlent les propriétés suivantes :

- Le sous-espace commandable est stable (invariant) par A . En effet, si x est un vecteur du SEC, x est combinaison linéaire des colonnes de $\mathcal{C}(A, B)$, Ax aussi puisque, toujours d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $A^n B$ est fonction linéaire des $A^i B$, $i \leq n - 1$.
- Le sous-espace commandable est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par A et contenant l'image de B . Tout point x_1 du sous-espace commandable peut être transféré en un autre point x_2 du sous-espace commandable. En effet, soit la suite de commandes c_i qui permet d'aller de $x_0 = 0$ à $x_f = x_2 - A^n x_1$ (cette suite existe puisque le SEC est stable par A donc $x_2 - A^n x_1 \in A$) ; cette suite c_i transfère x_1 en x_2 .

Remarque : Les démonstrations sont plus compliquées dans le cas continu, mais l'idée est que si pour tout point x_0 qui appartient au SEC, la dérivée $Ax_0 + Bu$ est un vecteur qui appartient aussi au SEC quelle que soit la valeur de la commande u , alors il n'est pas possible de sortir de ce sous-espace.

c) Critère de commandabilité

Théorème 2.12 (critère de commandabilité) (*continu et discret*) Un système (A, B) est commandable si et seulement si la matrice $\mathcal{C}(A, B) = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ est de rang n .

Cette matrice est appelée *matrice de commandabilité* du système.

Ce théorème est évident compte tenu de ce qui précède.

On peut remarquer que lorsque le système est mono entrée, la matrice $\mathcal{C}(A, B)$ est carrée $n \times n$, il faut et il suffit que le déterminant de cette matrice soit non nul pour que le système soit commandable.

Lorsque le système est multi-entrées (m) la matrice $\mathcal{C}(A, B)$ contient n lignes et $n \times m$ colonnes, il suffit alors de trouver un déterminant $n \times n$ non nul pour que la commandabilité soit assurée.

D'après l'équation d'évolution (2.11), si le système est commandable, il faudra au plus n commandes pour le faire évoluer d'un état initial quelconque x_0 à un état final quelconque x_f .

Plus le nombre d'entrées (m) est grand, « plus on a de chance » d'extraire un déterminant $n \times n$ non nul, donc moins il faudra de commandes pour acheminer le système d'un endroit à un autre.

Les propriétés du sous-espace commandable vont nous permettre de mettre en évidence une forme canonique.

d) Décomposition canonique de l'espace d'état

La notion de commandabilité pourrait apparaître comme une « clause de style » car elle se traduit par une condition qui semble avoir peu de chance de ne pas être réalisée : $\det \mathcal{C}(A, B) \neq 0$ ou $\text{rang } \mathcal{C}(A, B) = n$. En effet, on peut imaginer que si le déterminant est nul, il suffit de modifier légèrement n'importe quel coefficient de la matrice pour quelle devienne régulière. En réalité, sauf « cas d'école », il n'en est rien, la non-commandabilité d'un système est une propriété structurelle, elle est due au fait que les entrées n'agissent pas sur tel ou tel état du système. Ceci n'apparaît pas de manière évidente sur A et B qui peuvent être des matrices pleines, mais dont les coefficients peuvent être liés. On voit apparaître cet aspect structurel en effectuant un changement de base dans l'espace d'état qui mettra en évidence les composantes non accessibles. C'est l'objet de la décomposition canonique.

Supposons le système non complètement commandable. $\mathcal{C}(A, B)$ est de rang $m < n$.

On cherche une base dans X , de la manière suivante :

$e_1, e_2 \dots e_m \dots$ une base du SEC

$e_{m+1} \dots e_n \dots$ une base supplémentaire

En utilisant la propriété d'invariance du SEC par A et le fait que la i^{eme} colonne d'une matrice soit formée des composantes du i^{eme} vecteur de base sur la base choisie, on en déduit que les images de $e_1, e_2 \dots e_m$ n'auront pas de composantes sur $e_{m+1} \dots e_n$ de même que les colonnes de B puisque $B \in \text{SEC}$

Les équations d'état dans cette base prennent donc la forme suivante (2.21a, 2.21b) :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2.21a)$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + Du \quad (2.21b)$$

On voit que les composantes du vecteur d'état regroupées dans z_2 ne peuvent être influencées par la commande, elles évoluent uniquement sur le mode libre : $z_2(t) = \exp(A_{22}t)z_2(0)$

Ceci n'est pas très grave si ces variables ne nous intéressent pas particulièrement et si elles sont stables.

Si par contre la matrice A_{22} est instable, le système finira par sortir du domaine de linéarité sans qu'aucune action ne soit possible.

Exemple 2.3 (mélangeur)

► **V 1** : La matrice de commandabilité est :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{S} & \frac{1}{S} & -\frac{1}{2\tau S} & -\frac{1}{2\tau S} \\ \frac{C_1 - C_0}{V_0} & \frac{C_2 - C_0}{V_0} & -\frac{1}{\tau} \frac{C_1 - C_0}{V_0} & -\frac{1}{\tau} \frac{C_2 - C_0}{V_0} \end{bmatrix}$$

Le rang de cette matrice est évidemment 2 si $C_1 \neq C_0 \neq C_2$. En revanche si $C_1 = C_2$ alors ces valeurs sont aussi égales à C_0 par l'équation d'équilibre. La matrice a alors une ligne nulle, elle est de rang 1.

Dans ce cas le sous espace commandable est engendré par $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

On peut piloter la hauteur, mais il devient impossible de piloter la concentration avec les débits si les deux concentrations sont égales.

► **V 2** La matrice de commandabilité est :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{S} & \frac{1}{S} & 0 & 0 \\ \frac{C_1 - C_0}{V_0} & \frac{C_2 - C_0}{V_0} & -\frac{1}{\tau} \frac{C_1 - C_0}{V_0} & -\frac{1}{\tau} \frac{C_2 - C_0}{V_0} \end{bmatrix}$$

Les résultats sont identiques à ceux du premier modèle.

2.2.6 Observabilité

On cherche à reconstituer la valeur de l'état avec la seule connaissance des sorties, c'est-à-dire avec les capteurs dont on dispose.

Cette propriété peut, elle aussi, sembler naturelle ; c'est loin d'être évident car on cherche **toutes** les variables d'état avec la seule connaissance des sorties et en général il y a moins de capteurs que de variables d'état.

La connaissance de l'état, ou son estimation est importante pour deux applications très différentes :

- la commande : on calcule la commande u en fonction de l'état x (retour d'état) mais ceci n'est possible que si on connaît effectivement l'état.
- le diagnostic : un moyen de vérifier la cohérence des informations données par un ensemble de q capteurs est de n'en utiliser que $q - 1$ et de comparer l'estimation de la $q^{ième}$ valeur avec sa mesure.

Comme pour la commandabilité, nous envisagerons le cas des systèmes discrets :

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (2.22)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \quad (2.23)$$

et des systèmes continus écrits sous la forme canonique habituelle :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.24)$$

$$y = Cx + Du \quad (2.25)$$

Nous utiliserons : « système (A, C) » pour désigner indifféremment les deux types de système. Les termes Bu et Du ne jouent aucun rôle dans ce problème lorsque les entrées sont connues. Il suffit de considérer les formes autonomes :

$$x_{k+1} = Ax_k; \quad y_k = Cx_k \quad (2.26)$$

$$\dot{x} = Ax; \quad y = Cx \quad (2.27)$$

Le nombre de sorties dont on dispose (variables mesurées par des capteurs) est inférieur au nombre de variables d'état. La matrice $C : y = Cx$ est de rang $p < m$, il n'est donc pas possible de l'inverser pour trouver x . Souvent, par contre, il est possible de reconstituer la valeur de x_0 en observant une séquence plus ou moins longue de sorties $Y : y_1 \cdots y_k$, ou en observant l'évolution de la sortie y sur un intervalle de temps $[t_0, t_1]$: c'est la notion d'observabilité.

Définition 2.13 (système observable) *Un système est observable si quel que soit x il existe un nombre i fini tel que la connaissance de $Y = \{y_1 \cdots y_i\}$ permette le calcul de x . Un système est observable si quel que soit x_0 il existe un temps fini t_f tel que la connaissance de y sur $[t_0, t_f]$ permette le calcul de x_0 .*

L'idée ici est qu'il sera impossible de distinguer deux états qui produisent la même sortie, ou de manière équivalente, il sera impossible de reconstruire un état qui n'a pas d'influence sur l'évolution de la sortie.

Définition 2.14 (sous-espace non reconstituable) *L'ensemble des états qui engendrent une sortie nulle, forme un sous-espace vectoriel de X , stable par A , appelé sous-espace non observable ou non reconstituable.*

On imagine bien qu'il sera impossible de distinguer deux états qui produisent la même sortie, ou de manière équivalente, il sera impossible de reconstruire un état qui n'a pas d'influence sur l'évolution de la sortie.

Exemple 2.4 (masse en rotation)

Un moteur entraînant une charge inertielle est muni d'un capteur de position ou de vitesse. Les équations sont :

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0$$

ou sous une forme d'état en prenant la position et la vitesse comme variables :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega; \frac{d\omega}{dt} = 0$$

Si on dispose d'un capteur de position : $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ on peut aussi retrouver la vitesse. Il suffit de mesurer deux positions θ_1 et θ_2 à des instants $t_1 \neq t_2$ pour calculer cette vitesse constante ω :

$$\omega = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

Si on ne dispose que d'un capteur de vitesse : $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, il est impossible de retrouver la position. Dans ce cas, le sous espace non reconstituable est engendré par le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Théorème 2.15 *Le sous-espace non observable est le noyau de la matrice d'observabilité : $\mathcal{O}(A, C)$ telle que $\mathcal{O}(A, C)^T = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}$*

Démonstration. Le système d'équation que l'on obtient en écrivant une suite de sorties est le suivant :

$$y_0 = Cx_0 \quad (2.28a)$$

$$y_1 = CAx_0 \quad (2.28b)$$

$$\vdots \quad (2.28c)$$

$$y_i = CA^i x_0, \forall i \quad (2.28d)$$

Si toutes les sorties sont nulles, alors $y_0 = y_1 = \dots = y_n = 0 \Rightarrow Cx_0 = 0, CAx_0 = 0, \dots, CA^i x_0 = 0 \forall i$ donc $\mathcal{O}(A, C)x_0 = 0 \Rightarrow x_0 \in \text{Ker } \mathcal{O}(A, C)$

Théorème 2.16 (critère d'observabilité) *(continu et discret) Un système (A, C) est observable si et seulement si la matrice $\mathcal{O}(A, C)$ telle que $\mathcal{O}(A, C)^T = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}$ est de rang n .*

Démonstration. Il suffit de démontrer la réciproque du théorème précédent, ce qui est évident : si le sous-espace non reconstituable, donc le noyau de la matrice d'observabilité, est réduit à zéro, alors cette matrice est de rang n et la connaissance des n sorties permet de déterminer l'état x_0 de manière unique. Le théorème de Cayley-Hamilton montre qu'il suffit de s'arrêter à $m = n - 1$ puisque pour

$m \geq n - 1$, A^m est combinaison linéaire des A^i pour i de 0 à $n-1$. Le système d'équations 2.28 admet une solution unique x_0 ssi la matrice $\mathcal{O}(A, C)$ est de rang n , son noyau est réduit à zéro.

On peut remarquer que, lorsque le système est mono sortie, la matrice $\mathcal{O}(A, C)$ est carrée $n \times n$, il faut que le déterminant de cette matrice soit non nul pour que le système soit observable.

Exemple 2.5 (mélangeur)

Le problème se pose lorsqu'on ne dispose que d'une mesure : concentration ou hauteur.

• Mesure de la concentration : $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$; $CA = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}$.

La hauteur n'est pas observable.

• Mesure de la hauteur : $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$; $CA = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\tau} & 0 \end{bmatrix}$.

La concentration n'est pas observable.

Pour observer les deux variables d'état il est donc nécessaire d'avoir deux capteurs.

Les méthodes pour calculer effectivement les variables d'état à partir des données fournies par les capteurs seront détaillées dans les chapitres commande et diagnostic. On parle d'observateur, de reconstituteur d'état ou de capteur logiciel.

2.2.7 Dualité - Décomposition canonique

Les résultats obtenus sur la commandabilité et l'observabilité prouvent que ces deux propriétés sont duales : l'observabilité du système $\dot{x} = Ax$; $y = Cx$ est équivalente à la commandabilité du système $\dot{x} = A^T x + C^T u$.

On en déduit la décomposition canonique lorsque le système n'est pas totalement observable ($\text{rang } \mathcal{O}(A, C) < n$). On choisit un changement de base qui met en évidence la structure particulière. Il suffit de choisir une base contenant les vecteurs du noyau de $\mathcal{O}(A, C)$. On arrive alors aux équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

z_2 n'agit pas sur les sorties ni directement, ni indirectement par l'intermédiaire de z_1 , il sera donc impossible de reconstituer z_2 en observant les sorties.

De manière plus générale, on peut décomposer un système donné en quatre parties (dont certaines peuvent être vides) comme sur la figure 2.4 :

- partie non commandable et non observable
- partie commandable non observable
- partie commandable et observable
- partie observable non commandable

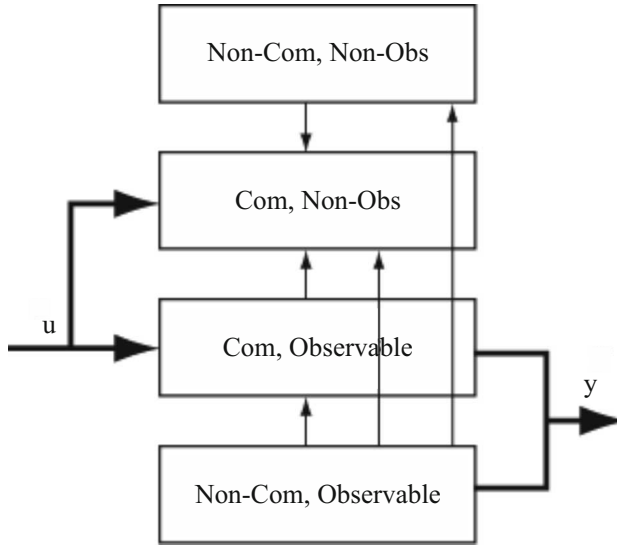


Figure 2.4 Décomposition canonique.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & A_{14} \\ A_{21} & A_2 & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_3 & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \\ B_3 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2.29a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_3 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \quad (2.29b)$$

Chapitre 3

Les fonctions de transfert

3.1 INTRODUCTION

La représentation d'état est une vue interne des systèmes. La matrice d'état A représente les échanges d'énergie entre les différents constituants du système. La matrice d'entrée B représente l'action des entrées sur le système et C indique où sont les capteurs qui définiront les sorties. (cf. Chapitre 8).

Il existe de nombreux cas où cette représentation est impossible à obtenir (trop complexe) et où les seules informations dont on dispose sont des relations entre les entrées et les sorties. On dit que l'on a une représentation de *type transfert*.

L'utilisateur d'un moteur électrique s'intéressa souvent à la relation qui existe entre la tension d'alimentation (l'entrée) et la vitesse (la sortie).

Comme la représentation de type transfert donne moins d'information que la représentation d'état, on doit pouvoir la trouver à partir de la représentation d'état.

Le problème inverse est évidemment plus difficile : à partir d'une représentation de type transfert est-il possible de trouver une représentation d'état (une seule ou la plus simple possible) ? Ces problèmes sont regroupés sous le vocable : *problème de réalisation*.

Dans le cas LTI, la représentation de type transfert se fait en utilisant le calcul symbolique et les fonctions de transfert ou de manière plus générale les matrices de transfert.

3.2 OPÉRATEUR DE TRANSFERT

3.2.1 Calcul opérationnel

Au lieu de connaître l'ensemble des équations différentielles qui relient les différentes variables d'état entre elles et aux entrées, puis les relations qui donnent les sorties, nous disposons maintenant d'une équation différentielle entre chaque entrée u_i et chaque sortie y_j . Pour ne pas alourdir le texte par les variables indicées, nous appellerons u l'entrée (scalaire) à laquelle nous nous intéressons et y la sortie.