

Pierre Le Barbenchon
Sophie Pinchinat
François Schwarzenruber

Logique : fondements et applications

DUNOD

Graphisme de couverture : Elizabeth Riba
Illustration de couverture : shutterstock © Oleksandr Khalimonov

LES + EN

LIGNE



Pour aller plus loin et mettre toutes les chances de votre côté,
des ressources complémentaires sont disponibles sur le site
www.dunod.com.

Connectez-vous à la page de l'ouvrage (grâce aux menus déroulants, ou en saisissant
le titre, l'auteur ou l'ISBN dans le champ de recherche de la page d'accueil).

Sur la page de l'ouvrage, sous la couverture, cliquez sur le lien « LES + EN LIGNE ».

© Dunod, 2022

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-083951-3

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Avant-propos	7
Introduction	9
Liste des notations	17
I Logique propositionnelle	23
1 Formules	25
1.1 Syntaxe de la logique propositionnelle	25
1.1.1 Éléments de syntaxe	25
1.1.2 Arbre d'une formule	26
1.1.3 Théorème de lecture unique	27
1.1.4 Simplification de l'écriture des formules	28
1.1.5 Taille, hauteur, sous-formules d'une formule	29
1.2 Sémantique de la logique propositionnelle	30
1.2.1 Notion de valuation	30
1.2.2 Valeur de vérité d'une formule	31
1.2.3 Table de vérité	32
1.2.4 Zoom sur l'implication (connecteur $\rightarrow$)	33
1.2.5 Ensemble des modèles d'une formule	34
1.2.6 Propriétés des ensembles de modèles	34
1.2.7 Satisfaisabilité, validité	35
1.3 Équivalence de formules	36
1.4 Substitution dans les formules	39
1.5 Conséquence logique d'une formule	40
1.6 Généralisation aux ensembles de formules	41
1.7 Aller plus loin	43
1.8 Exercices	45

2	Fragments syntaxiques	49
2.1	Systèmes complets de connecteurs	49
2.2	Formes normales	52
2.2.1	Forme normale conjonctive	52
2.2.2	Mise en forme normale conjonctive	53
2.2.3	Forme normale disjonctive	54
2.3	Zoom sur les clauses (disjonctives)	56
2.3.1	Clauses de Horn	56
2.3.2	2-clauses	58
2.3.3	3-clauses	58
2.4	Transformation de Tseitin	60
2.5	Aller plus loin	62
2.6	Exercices	63
3	Problème SAT	65
3.1	Complexité	66
3.1.1	Théorème de Cook	66
3.1.2	Transformation de Tseitin	70
3.1.3	Problème 3SAT	71
3.2	Algorithmes pour le problème SAT	71
3.2.1	Problème FND SAT	72
3.2.2	Problème HORNSAT	73
3.2.3	Problème 2SAT	74
3.3	Aller plus loin	78
3.4	Exercices	79
4	Problème VALIDE	83
4.1	Pravda	85
4.2	Système de résolution	85
4.2.1	Comment se sert-on du système de résolution ?	86
4.2.2	Correction et complétude	86
4.2.3	Démonstration de la correction	87
4.2.4	Démonstration de la complétude	88
4.3	Déduction naturelle	90
4.4	Calcul des séquents	94
4.5	Aller plus loin	97
4.6	Exercices	98
5	Compacité	99
5.1	Énoncés	99
5.2	Applications	100
5.3	Aller plus loin	102

5.4	Exercices	103
II	Logique du premier ordre	105
6	Termes	107
6.1	Syntaxe des termes	107
6.2	Substitution	109
6.3	$\mathcal{F}$ -algèbre	110
6.4	Zoom sur l'algèbre des termes	111
6.5	Sémantique des termes	112
6.6	Classes équationnelles de $\mathcal{F}$ -algèbres	114
6.6.1	Problème d'unification	115
6.6.2	Logique équationnelle	118
6.7	Aller plus loin	118
6.8	Exercices	119
7	Formules	121
7.1	Syntaxe	121
7.1.1	Signature	122
7.1.2	Formules atomiques	122
7.1.3	Formules du premier ordre	123
7.1.4	Variables libres ou liées	124
7.2	Sémantique	126
7.2.1	Modèles	126
7.2.2	Sémantique « à la Tarski »	128
7.2.3	Zoom sur la notation $\models$	130
7.3	Ordre des quantificateurs dans une formule	131
7.4	Équivalences classiques en logique du premier ordre	131
7.5	Forme prénexe	136
7.6	Conséquence logique	136
7.7	Substitution de variables dans les formules	137
7.8	Sémantique relationnelle	140
7.9	Aller plus loin	142
7.10	Exercices	143
8	Cardinalité des modèles	145
8.1	Forme universelle et skolémisation	146
8.1.1	Une explication intuitive	147
8.1.2	Forme de Skolem	148
8.1.3	Équisatisfaisabilité avec la forme de Skolem	149
8.2	Forme clausale	151

8.3	Théorème de Herbrand	153
8.4	Instances de Herbrand et logique propositionnelle	156
8.5	Théorème de compacité	158
8.6	Théorème de Lowenheim-Skolem descendant	159
8.7	Théorème de Lowenheim-Skolem ascendant	160
8.8	Causalité entre les théorèmes	160
8.9	Aller plus loin	161
8.10	Exercices	162
9	Problème VALIDE	163
9.1	Système de résolution	163
9.1.1	Règles	164
9.1.2	Correction	165
9.1.3	Complétude	166
9.1.4	Bilan sur la résolution	168
9.2	Indécidabilité du problème VALIDE	169
9.3	Aller plus loin	173
9.4	Exercices	175
10	Systèmes de preuves	177
10.1	Déduction naturelle	177
10.1.1	Correction de la déduction naturelle	180
10.1.2	Complétude de la déduction naturelle	181
10.2	Calcul des séquents	186
10.3	Aller plus loin	188
10.4	Exercices	189
11	Théories du premier ordre	191
11.1	Notion de théorie	191
11.2	Théorie complète	193
11.3	Axiomatisation	195
11.4	Théories récursive et récursivement énumérable	197
11.5	Élimination des quantificateurs	200
11.6	Théories axiomatisées particulières	201
11.6.1	Théorie de l'égalité	201
11.6.2	Arithmétique de Presburger	202
11.6.3	Arithmétique de Peano	203
11.6.4	Arithmétique vraie	203
11.6.5	Théorie des ordres denses	204
11.7	Aller plus loin	206
11.8	Exercices	208

III	Pour aller plus loin en logique du premier ordre	211
12	Théorie des modèles finis et Jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé	213
12.1	Limites du théorème de compacité	214
12.2	Notions préliminaires et rappels	215
12.2.1	Rang d'une formule	215
12.2.2	Isomorphisme	216
12.2.3	Sous-structures d'une structure	217
12.2.4	Isomorphisme partiel	218
12.3	Jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé	218
12.3.1	Description des jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé	219
12.3.2	Exemples de jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé	221
12.3.3	Théorème d'Ehrenfeucht-Fraïssé	223
12.4	Application des jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé	223
12.4.1	Méthode pour des preuves d'inexprimabilité	223
12.4.2	Quelques exemples d'inexprimabilité	225
12.5	Aller plus loin	226
13	Automates et logique	227
13.1	Automates et expressions régulières sur Σ	228
13.2	Structures automatiques et logique du premier ordre	233
13.2.1	Présentations automatiques et structures automatiques	233
13.2.2	Théorie du premier ordre des structures automatiques	235
13.3	Logique du temps linéaire sur les traces finies	236
13.3.1	Logique du premier ordre sur les mots finis	237
13.3.2	Logique temporelle du temps linéaire $LTL_{\mathbb{F}}$	238
13.3.3	Automates pour la logique du temps linéaire	239
13.3.4	Logique $LTL_{\mathbb{F}}$ et logique du premier ordre, théorème de Kamp	240
13.4	Aller plus loin	241
14	Bases de données et logique	243
14.1	Voir une base de données comme un modèle	244
14.1.1	Domaine	244
14.1.2	Signature	244
14.1.3	Tuple	245
14.1.4	Base de données	246
14.2	Calcul relationnel	246
14.2.1	Requête du calcul relationnel	247
14.2.2	Le domaine est-il important ?	248
14.2.3	Indépendance au domaine	249
14.2.4	Domaine actif	249
14.2.5	Calcul conjonctif	250

14.3 Algèbre relationnelle	251
14.3.1 Opérations	251
14.3.2 Syntaxe	251
14.3.3 Sémantique	254
14.3.4 Jointure naturelle	255
14.3.5 Requête satisfaisable	256
14.3.6 Algèbre SPC	256
14.4 Théorèmes de Codd	256
14.4.1 Calcul conjonctif $\Leftrightarrow$ Algèbre SPC satisfaisable	256
14.4.2 Logique du premier ordre $\Leftrightarrow$ Algèbre relationnelle	261
14.5 Aller plus loin	263
IV Annexe	265
15 Calculabilité et complexité	267
15.1 Calculabilité	267
15.1.1 Problème de décision	267
15.1.2 Décidabilité, indécidabilité	267
15.1.3 Ensemble récursif et récursivement énumérable	268
15.2 Théorie de la complexité	269
15.2.1 Classe P	269
15.2.2 Classe NP	270
15.2.3 NP-complétude	271
15.3 Machine de Turing	271
Dictionnaire des synonymes	274
Bibliographie	275
Index	281

Avant-propos

Ce livre est le fruit de plusieurs années passées à enseigner la logique à l'Université de Rennes 1 et à l'ENS Rennes, au niveau L3 informatique et en préparation à l'agrégation de mathématiques, option informatique.

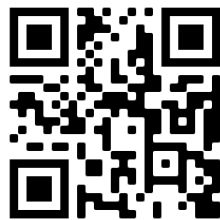
Il s'impose comme un manuel très attendu par les enseignants, mais surtout par les étudiants qui souvent rencontrent des difficultés à consulter profitablement les nombreux ouvrages principalement en anglais et dont l'ambition dépasse souvent celle d'une connaissance mûre, mais non experte, de la logique classique.

Ainsi cet ouvrage se veut-il sans prétention mais, comme nous, auteurs, l'espérons, un document de référence pour comprendre les fondements de la logique mathématique. Il est conçu pour être utilisé dans les universités francophones et dans les classes préparatoires MP2I et MPI, du niveau L2 jusqu'à la préparation à l'agrégation d'informatique.

Nous avons élaboré le contenu de ce livre sur la base d'une vaste littérature sur le sujet, tels que des ouvrages déjà publiés (voir Bibliographie), des polycopiés de collègues, et notamment celui d'Hubert Comon de l'ENS Paris-Saclay, ainsi que sous l'éclairage de notre expérience d'enseignants.

Nous proposons des exercices à la fin de chaque chapitre pour permettre aux lecteurs et lectrices de s'approprier les notions.

En flashant le QR-code ci-contre ou en allant sur le site <http://livrelogique.github.io/>, on pourra trouver des documents en lien avec ce livre. Notamment il y a un lien pour accéder à *Pravda*, assistant de preuves logiques développé pour ce livre (voir Chapitres 4 et 10). On pourra trouver sur ce site les solutions des exercices proposés à chaque fin de chapitre ainsi qu'une liste des potentielles corrections à apporter au livre pour sa bonne compréhension.



D'ailleurs, il ne faut pas hésiter à nous prévenir d'erreurs présentes dans ce livre en nous envoyant un mail à l'adresse suivante :

livrelogique@gmail.com

Dans tout le livre, nous utilisons les pictogrammes suivants dans les marges afin de donner des précisions aux lectrices et lecteurs :



un savoir-faire pour l'agrégation



un exercice portant sur la notion étudiée



un passage difficile mais optionnel



un passage difficile qu'il faut maîtriser

Agrégation d'informatique Le livre offre aux candidats préparant l'agrégation d'informatique une solide connaissance en logique. Concernant la première épreuve orale (d'admission), appelée *leçon d'informatique*, la leçon de logique de cette épreuve est :

28. Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

Les pictogrammes de savoir-faire seront ainsi utiles. Cependant, d'autres savoir-faire que nous proposons peuvent trouver leur place dans d'autres leçons. Par exemple, la décidabilité de l'arithmétique de Presburger (page 202) qui clairement ne convient pas à la leçon 28, serait tout à fait pertinente pour les leçons 27 *Décidabilité et indécidabilité. Exemples* et 29 *Langages rationnels et automates finis. Exemples et applications*. Les pictogrammes de savoir-faire recensent aussi des aspects techniques utiles aux candidates et candidats préparant l'épreuve écrite (d'admissibilité) 3b : *fondements de l'informatique*. Ces remarques s'appuient sur la version 2022 de l'agrégation, il faudra les adapter en fonction de son évolution.

Remerciements Nous remercions l'équipe éditoriale de Dunod, en particulier Vanessa Beunèche et Laetitia Jammet, ainsi que Jean-Baptiste Gugès pour sa relecture. Nous tenons à remercier Pierre Le Scornet pour son aide sur les exercices, Rémi Moreau, Mathias Déhais, Léo Ackermann, Jean-Michel Gorius, Alexandre Terefenko, Ocan Sankur et Grégory Gobin pour leurs relectures tant sur le fond que sur la forme. Merci à François Ernoul pour son aide sur les pictogrammes. Nous remercions également David Gross-Amblard pour la relecture du chapitre sur la théorie des bases de données, Hubert Comon pour ses excellentes notes de cours, Julien Grange pour les discussions, et enfin et surtout les étudiants de L3 du département informatique de l'ENS Rennes, de la L3 informatique de l'Université Rennes 1, et de la préparation à l'agrégation de mathématiques (option informatique) à l'ENS Rennes.

Pierre Le Barbenchon, Sophie Pinchinat et François Schwarzentruher

Introduction

La logique est aux mathématiques ce que le solfège est à la musique, ce que la grammaire est au langage, ce que l'architecture est à la construction d'édifice, ou encore ce que le fil d'Ariane est au labyrinthe...

Elle est un champ interdisciplinaire qui traite des principes formels du raisonnement, c'est-à-dire des inférences et des démonstrations que l'on peut mener en partant d'énoncés.

Il existe de nombreuses branches de la logique, dont la nature est guidée par les concepts que l'on veut exprimer et par le type de raisonnement que l'on veut pouvoir mener. Pour une première approche, comme dans ce livre, c'est la logique dite *classique*, une théorie de la vérité, qui offre un spectre large de notions et dont les fondements restent assez simples puisqu'elle repose sur des postulats : le *tiers exclu* qui considère qu'un énoncé est soit vrai soit faux, le *raisonnement par l'absurde*, la *contraposition*,... Dans toute logique, les énoncés sont appelés des *formules* qui s'interprètent dans un *modèle*, de manière à définir leur *valeur de vérité* ; c'est ce qu'on appelle leur *sémantique*.

Pour comprendre la logique classique, il est conseillé de commencer par une logique simple, la *logique propositionnelle* (que nous traitons en Partie I), puis d'ajouter de l'expressivité à celle-ci en considérant la *logique du premier ordre* (étudiée en Partie II).

En logique propositionnelle, les formules sont obtenues à partir de variables propositionnelles de base qui décrivent des faits, de connecteurs qui reflètent les conjonctions de coordination de la langue naturelle (en langue française *mais*, *ou*, *et*, *donc*, *or*, *ni*, *car*) et de la forme négative d'une phrase (en langue française *ne pas*). Un modèle est une *valuation* qui fixe la valeur de vérité des variables propositionnelles.

La Partie I sur la logique propositionnelle se décompose en cinq chapitres, avec la progression suivante.

Chapitre 1 - Formules Dans ce chapitre, on définit la logique propositionnelle pour un ensemble fixé *Prop* de variables propositionnelles. La syntaxe des formules s'appuie sur les variables propositionnelles de *Prop* pour les énoncés élémentaires, et sur l'ensemble de *connecteurs* $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ permettant de combiner ces énoncés ;

par exemple, le connecteur $\wedge$ reflète la conjonction de coordination « et ». La valeur de vérité d'une formule dépend uniquement de la valeur de vérité des variables propositionnelles qui la composent. La donnée d'une valeur pour chaque variable propositionnelle s'appelle une *valuation*. La sémantique d'une formule repose sur l'ensemble de ses modèles que sont les valuations.

Chapitre 2 - Fragments syntaxiques Notre choix d'utiliser les connecteurs $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ est questionnable, mais il est surtout lié à une volonté de proposer un cadre où toutes les conjonctions de coordinations de la langue naturelle sont représentées explicitement. Toutefois, comme nous l'étudions dans ce chapitre, il est possible de restreindre l'ensemble des connecteurs sans pour autant perdre en expressivité, c'est-à-dire renoncer à certains énoncés. Ensuite, nous étudions d'autres types de restrictions syntaxiques, dont certaines qui préservent l'expressivité, alors que d'autres l'amoindrissent mais ont l'avantage de se prêter plus efficacement aux traitements automatiques (comme établi dans le chapitre suivant). Parmi les restrictions qui n'attachent pas l'expressivité, la *forme normale conjonctive* joue un rôle central.

Chapitre 3 - Problème SAT Ce chapitre traite le problème de satisfaisabilité d'une formule de la logique propositionnelle, c'est-à-dire de l'existence d'un modèle. En parcourant l'ensemble fini des valuations, il est facile de chercher un candidat. Cet algorithme naïf est coûteux puisque l'espace des candidats est vaste, mais nous montrons que cette inefficacité est intrinsèque au problème. En revanche, certaines restrictions syntaxiques décrites au chapitre précédent, qui amoindrissent l'expressivité, offrent de bons algorithmes.

Chapitre 4 - Problème VALIDE Ce chapitre traite le problème de validité d'une formule, c'est-à-dire le fait qu'elle correspond à un énoncé infalsifiable. Il est clair que ce problème est le dual du problème de satisfaisabilité, puisque la négation d'une formule vraie dans tous les modèles est insatisfaisable. Ainsi pouvons-nous tirer parti de nombreux développements du chapitre précédent. Néanmoins, ce chapitre nous offre l'opportunité de découvrir l'univers des *systèmes de preuves*. Ces systèmes formels reposent sur des règles de déduction qui reflètent les démonstrations mathématiques. Nous présentons en détail le cas particulier du *système de résolution* dont la philosophie repose sur une démonstration par *réfutation*. Nous terminons le chapitre en explorant d'autres systèmes de preuves qui décrivent des démonstrations par allégation, c'est-à-dire par argumentation directe comme couramment en mathématiques.

Chapitre 5 - Compacité Dans ce chapitre, nous utilisons un ensemble infini de variables propositionnelles, de manière à considérer des ensembles infinis de formules non équivalentes deux à deux. De tels ensembles de formules permettent de

décrire les propriétés d'une structure mathématique infinie, telle que la grille du plan, ou plus généralement un graphe infini. Nous établissons le théorème de compacité qui énonce que l'on peut indifféremment aborder le problème de satisfaisabilité d'un ensemble donné infini de formules, ou aborder celui de la satisfaisabilité de chacun de ses sous-ensembles finis. Nous montrons une application de ce théorème sur les graphes infinis et revenons sur celui-ci dans la Partie II, puisqu'il est la clé de voûte d'un second théorème de compacité pour la logique du premier ordre.

La logique propositionnelle est très limitée puisqu'elle ne permet pas de décrire certaines situations réelles mettant en jeu des individus ou des objets, comme par exemple l'énoncé générique « Si x est le père de y et si z est le père de x alors z est un grand-père de y », ou l'énoncé universel « Toute personne a un père », ou encore une propriété mathématique telle que « une relation est réflexive et euclidienne si, et seulement si, elle est une relation d'équivalence ».

Pour pallier cette limitation de la logique propositionnelle, on introduit la logique du premier ordre, dont les énoncés se rapprochent encore plus de la langue naturelle. On utilise alors des *termes* pour dénoter les objets, des *symboles de relation* pour les énoncés de base qui relient des objets, et enfin, pour construire des énoncés élaborés, et en plus des connecteurs déjà introduits en logique propositionnelle, les *quantificateurs*, « pour tout » et « il existe », classiques en mathématiques. La syntaxe des formules de la logique du premier ordre se veut donc plus complexe que celle de la logique propositionnelle, et il en est de même pour leur sémantique : en logique du premier ordre, un modèle d'une formule est une *structure* (au sens mathématique, comme un groupe, un anneau, etc.).

Il faut noter que la logique propositionnelle est un fragment de la logique du premier ordre, dans le cas particulier où les symboles de relation utilisés dans les formules s'interprètent comme des relations dégénérées d'arité nulle. D'ailleurs, certains ouvrages comme [End72], ne présentent essentiellement que la logique du premier ordre avant d'en dégager le fragment plus faible inhérent à la logique propositionnelle.

Aussi, il existe une différence importante entre les deux logiques. Alors que la classe des modèles d'une formule de la logique propositionnelle est finie, celle d'une formule du premier ordre est infinie. Cet état de fait a des répercussions sévères au niveau algorithmique. En particulier, il n'existe pas d'algorithme pour répondre à la question de la *validité*, c'est-à-dire « étant donné une formule de logique du premier ordre, est-elle vraie dans tous les modèles ? », alors que c'est le cas pour la logique propositionnelle. On dit succinctement que *la logique du premier ordre est indécidable*.

La Partie II, consacrée à la logique du premier ordre, est composée des chapitres suivants.

Chapitre 6 - Termes Ce chapitre explique comment dénoter des éléments d'une structure mathématique, sur la base d'objets syntaxiques appelés *termes*. Les termes sont obtenus en partant de *symboles de variables* et de *symboles de fonctions*; les derniers étant piochés dans un ensemble fixé $\mathcal{F}$. Les structures mathématiques obtenues sont les $\mathcal{F}$ -algèbres. On aborde à la fin de ce chapitre un fragment naturel de la logique du premier ordre, appelé *logique équationnelle*, qui repose uniquement sur des énoncés d'égalité entre termes.

Chapitre 7 - Formules Pour obtenir des énoncés plus généraux que ceux de la logique équationnelle du chapitre précédent, on équipe les $\mathcal{F}$ -algèbres de relations entre les éléments. Ainsi, en plus des symboles de fonction, on se fixe un ensemble $\mathcal{R}$ de *symboles de relations*. Chaque paire $\mathcal{S} = (\mathcal{F}, \mathcal{R})$, appelée *signature*, induit la classe des $\mathcal{S}$ -structures. Pour former les formules, on part des formules *atomiques* fondées sur les symboles de relations, puis on s'autorise les connecteurs de la logique propositionnelle et les *quantificateurs*. Les modèles d'une formule sur la signature $\mathcal{S}$ sont les $\mathcal{S}$ -structures.

Ce chapitre et le précédent terminent la syntaxe et la sémantique de la logique du premier ordre, qu'on rappelle dans le tableau ci-dessous.

	Syntaxe	Sémantique
Chapitre 6	Terme	$\mathcal{F}$ -algèbre
Chapitre 7	Formule	$\mathcal{S}$ -structure

Chapitre 8 - Cardinalité des modèles Dans ce chapitre, nous montrons une grande proximité entre la logique du premier ordre et la logique propositionnelle; une proximité dont on peut tirer parti à de nombreux égards. Une étape importante pour y parvenir consiste à considérer les *formes normales de Skolem* qui sont des formules sans quantificateur existentiel. La *skolémisation* est la transformation des formules pour obtenir des formes de Skolem. Elle se base sur une explicitation, dans la signature, d'une relation fonctionnelle entre éléments, et est induite par les alternances de quantificateurs des formules. La forme de Skolem obtenue est en général non équivalente à la formule dont on part, mais les deux formules sont équisatisfaisables – elles ont toutes deux au moins un modèle ou aucun modèle – avec des modèles de même cardinal.

Pour les formes de Skolem, nous exhibons des modèles particuliers dits *de Herbrand*, d'une nature très syntaxique, qui suffisent à statuer sur la satisfaisabilité des formes de Skolem. Ces modèles établissent un lien explicite entre les modèles d'une forme de Skolem et ceux d'un ensemble infini de formules de la logique propositionnelle. C'est d'ailleurs par ce biais que nous établissons le théorème de *compacité* et la complétude du système de preuves de résolution pour la logique du premier ordre.