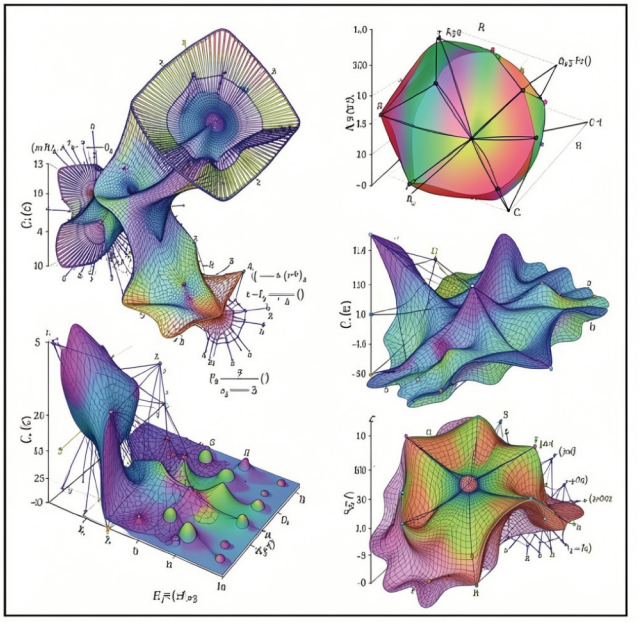
Analyse

Fondements du calcul différentiel et intégral



Lucien Sina

Analyse

Fondements du calcul différentiel et intégral

Lucien Sina

27.7.2026

Table des matières

1 Préface **1**

2 Récurrence complète et combinatoire **3**
2.1 Démonstration par récurrence complète 3
2.2 Notation sommatoire 7
2.3 Notation produit et factorielle 9
2.4 Le coefficient binomial 11
2.5 Le théorème binomial 14
2.5.1 Conséquences du théorème binomial 17
2.6 La série géométrique 19
2.7 Exercices et solutions 21

3 Les axiomes de corps des nombres réels **26**
3.1 Les axiomes de l'addition 26
3.1.1 Conséquences des axiomes de l'addition 27
3.2 Axiomes de la multiplication et loi distributive 30
3.2.1 Conséquences 31
3.3 Loi associative générale 36
3.4 Loi générale de commutativité 37
3.4.1 Sommes doubles et produits doubles 38
3.5 La loi distributive générale 39
3.6 Puissances 41
3.6.1 Règles de calcul pour les puissances 41
3.7 Généralisation et exemples 43

4 Les axiomes d'ordre **45**
4.1 Les axiomes d'ordre . . . 45
4.2 Conséquences . . . 47
4.2.1 Comparabilité et valeurs extrêmes . . . 47
4.2.2 Transitivité de l'ordre strict . . . 49
4.2.3 Invariance de l'ordre par translation . . . 50
4.2.4 Changement de signe et inversion de l'ordre . . . 51
4.2.5 Compatibilité additive de l'ordre . . . 51
4.2.6 Monotonie de la multiplication par des nombres positifs . . . 52
4.2.7 Comparaison de produits . . . 53
4.2.8 Monotonie de la multiplication par des nombres négatifs . . . 54
4.2.9 Positivité des carrés et de 1 . . . 55
4.2.10 Positivité de l'inverse multiplicatif . . . 56
4.2.11 Monotonie de l'inverse . . . 57
4.2.12 Corps ordonnés . . . 58
4.3 Les nombres naturels comme sous-ensemble des nombres réels . . . 60
4.3.1 Les axiomes de Peano . . . 60
4.3.2 Vérification des axiomes de Peano . . . 61
4.4 La valeur absolue . . . 68
4.4.1 Autres propriétés de la valeur absolue . . . 70
4.5 L'axiome d'Archimède . . . 73
4.5.1 Conséquences . . . 74
4.5.2 L'inégalité de Bernoulli . . . 77
4.5.3 Croissance et décroissance des puissances . . . 79
4.6 Exercices et solutions . . . 80

5 Suites et limites **95**
5.1 Exemples de suites . . . 96
5.2 Interprétation géométrique . . . 98
5.3 Exemples . . . 100
5.4 Bornitude des suites . . . 102
5.5 Unicité de la limite . . . 104
5.6 Règles de calcul pour les limites . . . 105
5.6.1 Sommes de suites convergentes . . . 105
5.6.2 Produits de suites convergentes . . . 106
5.6.3 Quotient de suites convergentes . . . 108

5.6.4 Comportement monotone de la limite . . . 110
5.7 Divergence vers $\pm\infty$ . . . 112
5.8 Inverses et limites . . . 113
5.9 Exercices et solutions . . . 116

6 L'axiome de complétude 121
6.1 Suites de Cauchy . . . 122
6.1.1 L'irrationalité de $\sqrt{2}$ . . . 123
6.1.2 Que change l'axiome de complétude ? . . . 124
6.1.3 Existence de racines carrées des nombres réels positifs . . . 124
6.2 Le principe des intervalles emboîtés . . . 125
6.2.1 Équivalence entre l'axiome de complétude et le principe des intervalles emboîtés . . . 127
6.3 Sous-suites . . . 130
6.4 Exercices . . . 133
6.5 Monotonie des suites . . . 138
6.6 Exercices . . . 139
6.7 Les axiomes des nombres réels . . . 141
6.7.1 Perspectives . . . 142

7 Existence des racines carrées 143
7.1 Supremum et infimum . . . 143
7.2 Existence d'une racine carrée positive . . . 144
7.3 La méthode de Héron . . . 145
7.4 Convergence quadratique . . . 147

8 Critères de convergence des séries 149
8.1 Critère de Cauchy pour la convergence des séries . . . 149
8.2 La série géométrique . . . 152
8.3 Convergence des séries alternées . . . 154
8.4 Convergence absolue . . . 158
8.5 Le théorème de réarrangement des séries . . . 161
8.6 Réarrangements et convergence conditionnelle . . . 163
8.7 Exercices et solutions . . . 164

9 Ensembles de points **167**
9.1 Intervalles . . . 167
9.2 Supremum et infimum d'ensembles de points . . . 168
9.3 Limite supérieure et limite inférieure . . . 170

10 Fonctions continues **174**
10.1 Fonctions . . . 174
10.1.1 Opérations sur les fonctions . . . 177
10.1.2 Composition de fonctions . . . 178
10.2 Limites de fonctions . . . 178
10.3 Continuité d'une fonction . . . 181
10.4 Exercices et solutions . . . 185
10.5 Le théorème des valeurs intermédiaires . . . 186
10.6 Fonctions bornées et valeurs extrêmes . . . 190
10.7 Continuité uniforme . . . 195
10.7.1 Fonctions en escalier et approximation des fonctions continues . 197
10.8 Exercices et solutions . . . 199

11 Fonctions élémentaires **204**
11.1 Fonctions monotones et fonctions réciproques . . . 205
11.2 Fonctions puissances et fonctions racines . . . 208
11.3 Fonctions exponentielle et logarithme . . . 210
11.3.1 Fonction exponentielle de base a . . . 212
11.4 Limites des fonctions exponentielles et logarithmiques . . . 221
11.5 Notation de Landau . . . 224
11.6 Exercices et solutions . . . 227
11.7 Fonctions trigonométriques . . . 230
11.7.1 Le cercle unité et la mesure en radians . . . 230
11.8 Le nombre π . . . 239
11.9 Exercices et solutions . . . 248

12 Dérivation **251**
12.1 Dérivabilité des fonctions . . . 251
12.2 Interprétation géométrique . . . 253
12.3 Exemples de calcul de dérivées . . . 253
12.4 Exercices et solutions . . . 270

13 Extrema locaux et théorème des accroissements finis **274**
13.1 Extrema locaux . . . 275
13.2 Le théorème des accroissements finis . . . 277
13.3 Monotonie . . . 280
13.4 Règles de l'Hospital . . . 288
13.5 Exemples d'application des règles de l'Hospital . . . 291
13.6 Exercices et solutions . . . 293

14 Intégration **300**
14.1 Fonctions en escalier . . . 301
14.2 Intégrales inférieure et supérieure . . . 307
14.2.1 Intégrabilité . . . 309
14.2.2 Intégrabilité au sens de Riemann . . . 313
14.2.3 Théorème de la moyenne pour les intégrales . . . 325
14.3 Sommes de Riemann . . . 327
14.3.1 Partitions et finesse . . . 328
14.3.2 Sommes de Riemann et intégrale . . . 329
14.3.3 Sommes de Riemann et subdivision de l'intervalle . . . 331

15 Le théorème fondamental de l'analyse **335**
15.1 Fonctions intégrales . . . 336
15.1.1 Primitives . . . 337
15.2 Exemples de calcul d'intégrales définies . . . 340
15.3 Résumé : le théorème fondamental de l'analyse . . . 340
15.4 Méthodes d'intégration . . . 341
15.4.1 La règle de substitution . . . 341
15.4.2 Exemples d'application de la règle de substitution . . . 342
15.4.3 Intégration par parties . . . 344
15.4.4 Décomposition en éléments simples . . . 347
15.4.5 Intégrales trigonométriques . . . 350
15.5 Exercices et solutions . . . 352

16 Intégrales impropres **356**
16.1 Définition des intégrales impropres . . . 356
16.1.1 Bornes d'intégration infinies . . . 357
16.1.2 Intégrandes non définis à une borne d'intégration . . . 357

16.1.3 Le cas général . . . 358
16.2 Premiers exemples . . . 359
16.3 Perspectives . . . 360
16.4 Le critère intégral pour les séries . . . 361
16.5 Exercices et solutions . . . 363

17 Convergence uniforme **365**
17.1 Suites de fonctions . . . 366
17.2 Convergence simple . . . 366
17.3 Convergence uniforme . . . 367
17.4 Première idée directrice . . . 367
17.5 Convergence uniforme et continuité . . . 368
17.6 Norme du supremum et convergence uniforme . . . 370
17.7 Convergence uniforme et intégration . . . 373
17.8 Convergence uniforme et dérivation . . . 377
17.9 Séries entières . . . 379
17.9.1 Définition et premiers exemples . . . 380
17.9.2 Un premier théorème de convergence . . . 380
17.9.3 Le rayon de convergence . . . 382
17.9.4 Première orientation . . . 383
17.9.5 Convergence uniforme à l'intérieur du rayon de convergence . . . 383
17.9.6 Dérivation terme à terme des séries entières . . . 384
17.9.7 Corollaire : intégration terme à terme . . . 387
17.9.8 Exemples . . . 388
17.10Exercices corrigés . . . 392

18 Séries de Taylor **401**
18.1 Motivation et premiers repères . . . 401
18.1.1 Une première conséquence de la formule de Taylor . . . 403
18.2 Le reste de Lagrange . . . 404
18.3 Polynômes de Taylor . . . 405
18.4 Une conséquence du reste de Lagrange . . . 406
18.5 Exemples de développements de Taylor . . . 407
18.6 Les séries entières comme séries de Taylor . . . 411
18.7 Le théorème d'Abel . . . 412
18.8 Exercices corrigés . . . 415

19 Remarques finales **424**
19.1 Résumé 424
19.2 Perspectives 426
19.3 Recommandations de lecture 428
19.4 La collection 430

20 Mentions légales **433**

Chapitre 1

Préface

L'analyse fait partie des domaines fondamentaux des mathématiques et occupe également une place centrale dans de nombreuses filières à orientation mathématique. Elle constitue en particulier une base indispensable pour la poursuite des études en mathématiques, en informatique, en physique et dans les sciences de l'ingénieur.

Ce livre s'adresse avant tout aux étudiantes et étudiants des deux premiers semestres, en particulier à celles et ceux qui abordent l'analyse de manière systématique pour la première fois au début de leurs études. L'accent est mis sur une introduction rigoureuse aux notions et aux méthodes centrales de l'analyse. Parmi celles-ci figurent notamment le raisonnement par récurrence, les propriétés des nombres réels, les suites et les séries, la continuité, la dérivation, l'intégration ainsi que des thèmes plus avancés tels que la convergence uniforme, les séries entières et les séries de Taylor.

Dans la présentation, une attention particulière est accordée à la précision mathématique. Les notions sont introduites avec exactitude, les liens sont développés avec soin et les énoncés sont démontrés de manière conséquente. En même temps, on a veillé à présenter les différents contenus non seulement de façon formelle, mais aussi de manière intuitive et compréhensible. De nombreux exemples, remarques et exercices doivent aider à ne pas seulement lire la matière, mais à la comprendre véritablement.

L'ouvrage est conçu de telle sorte qu'il puisse être utilisé aussi bien en accompagnement d'un cours magistral que pour l'étude autonome. Des développements détaillés ainsi que de nombreux exercices accompagnés de solutions doivent faciliter l'accès à l'analyse et permettre aux lectrices et lecteurs d'assimiler et de consolider la matière de façon systématique.

Mon objectif était d'écrire un manuel qui prenne le contenu mathématique au sérieux sans paraître inutilement intimidant. Pour de nombreuses étudiantes et de nombreux étudiants, l'analyse est d'abord un domaine exigeant, mais elle gagne en clarté et en structure à mesure que la compréhension progresse. Si ce livre contribue à faciliter cet accès et peut-être même à transmettre un peu de plaisir pour les mathématiques, il aura atteint son but.

Lucien Sina

Chapitre 2

Récurrence complète et combinatoire

L'analyse s'intéresse aux variations continues, aux processus de passage à la limite, aux séries, aux suites, aux fonctions et à la question de savoir comment une loi générale valable pour une infinité de cas peut naître d'un nombre fini d'étapes. C'est précisément pourquoi il est utile de commencer l'étude de l'analyse par un principe de démonstration qui formalise exactement cette manière de raisonner pas à pas : la récurrence complète.

Grâce à elle, on peut démontrer des assertions portant sur tous les entiers naturels en établissant d'abord le premier cas, puis en montrant que la validité d'un cas quelconque entraîne celle du cas suivant. Ainsi, à partir d'un seul point de départ assuré, on obtient une conclusion générale. Ce principe apparaît sans cesse en analyse, par exemple dans les formules de somme, les inégalités, les récurrences, les estimations de suites et de nombreuses autres assertions faisant intervenir un entier naturel comme paramètre.

La récurrence complète n'est donc pas seulement un outil technique, mais aussi un instrument de pensée central en mathématiques. La maîtriser avec assurance constitue une base importante pour comprendre et construire l'analyse.

2.1 Démonstration par récurrence complète

Le principe de la récurrence complète repose sur une propriété fondamentale des entiers naturels : chaque entier naturel est soit le début de la suite, soit obtenu à partir d'un entier naturel plus petit par l'ajout de 1. C'est précisément cette structure qui

permet de déduire des assertions valables pour tous les entiers naturels à partir d'un cas initial et d'une étape de transmission.

Définition 1 (Principe de récurrence complète)**.** *Soit $M \subseteq \mathbb{N}_0$. Si*

1. *$0 \in M$ et*
2. *pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a : si $n \in M$, alors $n+1 \in M$,*

alors $M = \mathbb{N}_0$.

Ce principe peut également être formulé sous la forme d'un énoncé général portant sur des propriétés :

Définition 2 (Principe de récurrence sous forme d'énoncé)**.** *Soit $P(n)$ une assertion portant sur $n \in \mathbb{N}_0$. Si*

1. *$P(0)$ est vraie et*
2. *pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, la validité de $P(n)$ entraîne la validité de $P(n+1)$,*

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Une démonstration par récurrence complète se compose donc toujours de deux parties essentielles :

1. **Initialisation :** on montre que l'assertion est vraie pour la première valeur pertinente de l'entier naturel.
2. **Hérédité :** on suppose que l'assertion est vraie pour un n quelconque, mais fixé, puis on montre qu'elle est également vraie pour $n+1$.

L'étape d'hérédité constitue ici le passage décisif. Elle ne montre pas seulement qu'un cas particulier est vrai, mais que la vérité de l'assertion se transmet le long des entiers naturels. Une fois l'initialisation établie, tous les cas suivants sont ainsi automatiquement couverts.

On parle de récurrence *complète*, parce qu'il ne s'agit pas de vérifier isolément certains nombres, mais de saisir tout le système infini des entiers naturels au moyen d'une structure logique générale. En analyse, cette méthode est particulièrement importante, car de nombreuses assertions doivent être démontrées pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Remarque 3. *Selon la convention adoptée, on fait commencer les entiers naturels à 0 ou à 1. La notation utilisée ici, $\mathbb{N}_0$, contient le 0. Si, dans un chapitre ultérieur, on travaille avec $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, seul le cas initial de la récurrence change, et non le principe fondamental.*

Le principe de récurrence complète révèle particulièrement sa force lorsqu'on l'applique à un énoncé concret. Un exemple classique est la somme des n premiers entiers naturels. Cet exemple permet de voir très clairement comment se construit une démonstration par récurrence et pourquoi le passage de n à $n+1$ constitue le cœur même de la méthode.

Exemple 4 (Petite formule de sommation de Gauss)**.** *L'une des premières applications, et en même temps l'une des plus connues, de la récurrence complète est la formule de sommation*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Elle décrit la somme des n premiers entiers naturels et est donc souvent appelée petite formule de sommation de Gauss*.*

À première vue, le membre de gauche semble exiger un nouveau calcul pour chaque nouvelle valeur de n. La formule montre cependant que cette somme peut être exprimée sous une forme fermée simple. De tels énoncés sont typiques de l'analyse : à partir d'une suite de valeurs particulières naît une loi générale.

Démonstration. Nous démontrons la formule par récurrence complète sur n.

Pour plus de clarté, nous désignons la somme des n premiers entiers naturels par

$$S_n := 1 + 2 + \cdots + n.$$

Il s'agit donc de montrer que

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Initialisation. Pour $n = 1$, on a

$$S_1 = 1.$$

D'autre part, le membre de droite donne

$$\frac{1 \cdot 2}{2} = 1.$$

L'assertion est donc vraie pour la valeur initiale $n = 1$.

2. Étape d'hérédité. Supposons maintenant que la formule soit déjà valable pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, mais arbitraire. Cela signifie que

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Cette hypothèse s'appelle l'*hypothèse de récurrence*. Elle ne signifie pas que nous voulons démontrer l'assertion seulement pour ce seul n, mais que nous la supposons déjà connue afin d'en déduire le cas suivant.

Considérons maintenant la somme jusqu'à $n+1$:

$$S_{n+1} = 1 + 2 + \cdots + n + (n+1).$$

Comme $1 + 2 + \cdots + n = S_n$, l'hypothèse de récurrence donne

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

On met alors $n+1$ en facteur :

$$S_{n+1} = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = (n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right).$$

Il s'ensuit que

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

C'est précisément la formule souhaitée pour le cas $n+1$.

Comme l'initialisation a été établie et que la validité pour n entraîne toujours la validité pour $n+1$, l'assertion est démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Cet exemple illustre particulièrement clairement le schéma fondamental de la récurrence complète : on établit d'abord un point de départ, puis on montre que chaque cas entraîne le suivant. De cette manière, une assertion peut être démontrée non seulement pour quelques nombres, mais pour tous les entiers naturels.

2.2 Notation sommatoire

Lorsque, en analyse, un grand nombre de termes doivent être additionnés, il serait peu pratique d'écrire chaque somme intégralement. On utilise donc un symbole particulier pour les sommes, appelé *symbole de sommation*. Il permet de noter des additions longues de manière claire et générale.

Définition 5 (Notation sommatoire)**.** *Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Le nombre i s'appelle indice courant *ou* indice de sommation*. Il sert uniquement à parcourir les différents termes de la somme et n'est pas considéré comme une variable indépendante en dehors de cette somme.*

À l'aide du symbole de sommation, de nombreux énoncés peuvent être formulés de façon très compacte. On rencontre particulièrement souvent des sommes dont les termes dépendent d'un entier naturel. C'est précisément dans de telles situations que la récurrence complète constitue une méthode de démonstration particulièrement appropriée.

Nous démontrons maintenant un exemple classique, qui joue en même temps un rôle important dans le maniement des sommes.

Exemple 6 (Somme des premiers nombres impairs)**.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2.$$

Autrement dit, la somme des n premiers nombres impairs est toujours égale au carré de n.

Démonstration. Nous démontrons l'énoncé par récurrence complète sur n.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a

$$\sum_{i=1}^{1} (2i - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

et en même temps

$$1^2 = 1.$$

L'assertion est donc vraie pour $n = 1$.

Hypothèse de récurrence : Supposons que, pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé mais arbitraire, on ait déjà

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2.$$

Étape de récurrence : Montrons alors que l'énoncé est également vrai pour $n+1$. Pour cela, considérons

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1).$$

Nous séparons le dernier terme :

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) + \big(2(n+1)-1\big).$$

À l'aide de l'hypothèse de récurrence, il vient

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = n^2 + 2n + 1.$$

Comme

$$n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

on obtient

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = (n+1)^2.$$

L'étape de récurrence est ainsi démontrée.

Par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

La récurrence complète et bon nombre des exemples précédents reposent sur les nombres naturels. Nous introduisons donc maintenant les ensembles de nombres les plus importants, qui seront constamment utilisés dans la suite de l'analyse.

Définition 7 (Nombres naturels)**.** *L'ensemble des nombres naturels est*

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Si l'on y ajoute le nombre 0*, on obtient l'ensemble*

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Les nombres naturels servent en particulier à compter et à ordonner. En raison de leur structure progressive, ils constituent la base de la récurrence complète.

Afin de pouvoir former sans restriction des différences de nombres naturels, on élargit les nombres naturels aux nombres entiers.

Définition 8 (Nombres entiers)**.** *L'ensemble des nombres entiers est*

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Il contient donc aussi bien les entiers positifs que les entiers négatifs, ainsi que 0*.*

Remarque 9. *La récurrence complète est une méthode de démonstration et non une définition des nombres naturels. Elle est toutefois étroitement liée aux nombres naturels, car ceux-ci sont ordonnés selon une structure séquentielle continue. C'est précisément cette structure qui permet le passage de n à $n+1$ dans l'étape de récurrence.*

Dans la suite, d'autres ensembles de nombres seront encore introduits, notamment les nombres rationnels $\mathbb{Q}$, les nombres réels $\mathbb{R}$ et les nombres complexes $\mathbb{C}$. Pour les bases de la récurrence complète, les nombres naturels suffisent toutefois dans un premier temps.

2.3 Notation produit et factorielle

La notation produit et la factorielle ne sont pas seulement des abréviations utiles pour des multiplications répétées ; elles sont aussi des notions centrales de la combinatoire. Dans ce domaine des mathématiques, on étudie combien de possibilités admettent certains arrangements et certains procédés de sélection. La factorielle y apparaît

naturellement, car elle décrit le nombre de tous les ordres possibles d'un ensemble fini. De même que le symbole de somme permet d'écrire de longues additions sous une forme compacte, le *symbole de produit* sert à noter de façon claire des multiplications plus longues. Il joue un rôle important aussi bien en analyse qu'en combinatoire.

Définition 10 (Notation produit)**.** *Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Le nombre i est appelé, comme précédemment, indice muet *ou* indice de multiplication*. Il sert uniquement à ordonner les facteurs les uns après les autres.*

Par analogie avec la somme, on considère aussi le produit vide. Il est naturel de le définir comme étant égal à 1, puisque 1 est l'élément neutre de la multiplication.

Remarque 11 (Produit vide)**.** *Pour $n = 0$, on pose*

$$\prod_{i=1}^{0} a_i := 1.$$

Cette convention n'est pas arbitraire ; elle permet de formuler de nombreuses identités de manière uniforme, sans avoir à traiter de cas particuliers.

Une application particulièrement importante de la notation produit est la *factorielle*.

Définition 12 (Factorielle)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}_0$, on définit la factorielle par*

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k.$$

On a donc en particulier

$$1! = 1, \qquad 2! = 1 \cdot 2, \qquad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3, \qquad \ldots$$

et, en raison de la convention sur le produit vide, également

$$0! = 1.$$

En combinatoire, la factorielle compte le nombre de tous les arrangements possibles de n éléments distincts.

Théorème 13 (Arrangements d'un ensemble à n éléments)**.** *Soit M un ensemble ayant exactement n éléments. Alors il existe exactement $n!$ arrangements différents des éléments de M.*

Démonstration. Nous justifions l'énoncé étape par étape.

Pour le premier élément d'un arrangement, il y a n possibilités, car chacun des n éléments peut occuper la première place. Une fois ce premier élément choisi, il reste encore $n-1$ éléments, donc $n-1$ possibilités pour la deuxième place. Pour la troisième place, il reste alors $n-2$ possibilités, et ainsi de suite.

En poursuivant ce raisonnement jusqu'à la dernière place, on obtient au total

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!.$$

Ainsi, un ensemble à n éléments possède exactement $n!$ arrangements différents. □

Exemple 14. *Un ensemble à trois éléments possède exactement*

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

arrangements différents. Si les éléments sont par exemple a, b, c, ces arrangements sont :

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Remarque 15. *La factorielle croît très rapidement. Déjà pour $n = 5$, on a $5! = 120$, et pour des valeurs plus grandes les nombres deviennent vite très élevés. C'est précisément pour cette raison que la factorielle joue un rôle important en analyse, par exemple dans les séries, les estimations et, plus tard, dans le développement de Taylor.*

2.4 Le coefficient binomial

En combinatoire, une même question revient sans cesse : combien y a-t-il de façons de choisir certains éléments dans un ensemble fini, sans tenir compte de leur ordre ? C'est précisément pour de tels problèmes de dénombrement que le coefficient binomial a été introduit. Il est l'une des notions numériques les plus importantes de la combinatoire élémentaire et joue également un rôle central plus tard en analyse, par exemple dans la formule du binôme et dans les développements en séries.

Définition 16 (Coefficient binomial)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}_0$ et $k \in \mathbb{N}_0$ avec $k \leq n$, on définit le* coefficient binomial *par*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Pour $k > n$, on pose en outre

$$\binom{n}{k} := 0.$$

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ se lit « n parmi k ». Il compte le nombre de façons de choisir exactement k éléments dans un ensemble à n éléments, lorsque l'ordre du choix ne joue aucun rôle.

Théorème 17 (Formule de récurrence de Pascal)**.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Démonstration. Nous donnons une démonstration combinatoire.

Considérons un ensemble M à n éléments et fixons un élément particulier $x \in M$. On cherche le nombre de toutes les parties à k éléments de M. Par définition, ce nombre est précisément $\binom{n}{k}$.

Nous répartissons maintenant toutes les parties à k éléments de M en deux cas disjoints :

1. La partie contient l'élément x.
2. La partie ne contient pas l'élément x.

Dans le premier cas, il faut choisir, en plus de x, encore $k-1$ éléments parmi les $n-1$ éléments restants. Cela est possible de $\binom{n-1}{k-1}$ façons.

Dans le second cas, x n'est pas choisi ; les k éléments doivent donc tous provenir des $n-1$ éléments restants. Cela est possible de $\binom{n-1}{k}$ façons.

Comme les deux cas s'excluent mutuellement et couvrent ensemble toutes les possibilités, le nombre total de parties à k éléments est égal à

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

D'autre part, ce nombre total est, par définition, $\binom{n}{k}$. On obtient donc

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

La proposition est ainsi démontrée. □

Remarque 18. *La formule de Pascal est une formule de récurrence : elle exprime un coefficient binomial à l'aide de deux coefficients binomiaux voisins. Elle est donc particulièrement utile pour construire pas à pas des tableaux de coefficients binomiaux.*

La signification combinatoire du coefficient binomial est donnée par le théorème fondamental suivant. Il explique pourquoi l'expression

$$\binom{n}{k}$$

décrit précisément le nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble à n éléments.

Théorème 19 (Nombre de sous-ensembles à k éléments)**.** *Soit M un ensemble ayant exactement n éléments, et soit $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Alors il existe exactement*

$$\binom{n}{k}$$

sous-ensembles distincts de M à k éléments.

Démonstration. Nous comptons les sous-ensembles de M à k éléments.

Commençons par considérer non pas les sous-ensembles eux-mêmes, mais les choix ordonnés de k éléments distincts de M. Pour le premier élément, il y a n possibilités ; pour le deuxième, il en reste $n-1$; puis $n-2$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il reste $n-k+1$ possibilités pour le k-ième élément. Au total, il y a donc

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

choix ordonnés de ce type.

Cependant, chaque sous-ensemble à k éléments est alors compté plusieurs fois, exactement autant de fois qu'il existe d'ordres possibles pour ses k éléments. Il y a $k!$ tels ordres distincts.

On obtient donc le nombre de sous-ensembles à k éléments en divisant le nombre de choix ordonnés par $k!$:

$$\frac{1}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

D'après la définition du coefficient binomial, ce nombre est précisément

$$\binom{n}{k}.$$

Ainsi, un ensemble à n éléments possède exactement $\binom{n}{k}$ sous-ensembles distincts à k éléments. □

2.5 Le théorème binomial

Lorsque l'on développe des puissances d'un binôme $(a+b)$, on obtient des expressions de plus en plus longues à mesure que l'exposant augmente. Il est toutefois remarquable que ces expressions se construisent selon un motif très régulier. C'est précisément ce motif que décrit le théorème binomial. Il compte parmi les formules les plus importantes de l'algèbre et joue également un rôle central en analyse, par exemple dans les développements en séries et dans les estimations.

Si l'on dispose les coefficients correspondants ligne par ligne, on obtient le *triangle de Pascal*. Chaque ligne contient les coefficients binomiaux, et chaque entrée intérieure s'obtient comme la somme des deux entrées situées au-dessus d'elle. La formule de récurrence de Pascal exprime exactement cette règle.

Remarque 20 (Triangle de Pascal)**.** *Les coefficients binomiaux peuvent être disposés de la manière suivante :*

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

et ainsi de suite.

Sur les bords, on a toujours

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

et, pour les entrées intérieures, la formule de récurrence

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad (1 \leq k \leq n-1).$$

Ces deux propriétés décrivent entièrement le triangle de Pascal.

Après avoir introduit les coefficients binomiaux comme nombres de dénombrement, apparaît maintenant leur deuxième signification fondamentale : ce sont exactement les coefficients qui interviennent dans le développement d'une puissance de $(a+b)$. Le théorème suivant décrit ce lien.

Théorème 21 (Théorème du binôme)**.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Démonstration. Nous démontrons l'énoncé par récurrence complète sur n.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a

$$(a+b)^1 = a + b.$$

D'autre part, le membre de droite donne

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b.$$

L'énoncé est donc vrai pour $n = 1$.

Hypothèse de récurrence : Supposons que, pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé mais arbitraire, on ait

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Étape d'hérédité : Nous montrons maintenant l'assertion pour $n+1$. Pour cela, écrivons

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b).$$

À l'aide de l'hypothèse de récurrence, il vient

$$(a+b)^{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) (a+b).$$

En développant, on obtient

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}.$$

Dans la deuxième somme, nous effectuons le changement d'indice $k \mapsto k-1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k.$$

Nous obtenons ainsi

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}.$$

Avec la formule de récurrence de Pascal, il s'ensuit, pour $1 \leq k \leq n$, que

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

De plus,

$$a^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 \quad \text{et} \quad b^{n+1} = \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1}.$$

Par conséquent,

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

L'étape d'hérédité est donc également établie.

Ainsi, la formule est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Remarque 22. *Le théorème binomial explique en même temps pourquoi les coefficients binomiaux figurant dans le triangle de Pascal sont précisément les coefficients appropriés pour le développement de $(a+b)^n$. La structure du triangle reflète donc directement l'algèbre du développement des puissances.*

2.5.1 Conséquences du théorème binomial

Du théorème binomial, on peut déduire immédiatement, par un choix judicieux des paramètres, des identités importantes pour les coefficients binomiaux. Deux formules particulièrement connues apparaissent lorsque l'on choisit pour a et b les valeurs 1 et 1, respectivement 1 et -1. Cela montre en même temps à quel point l'algèbre et la combinatoire sont étroitement liées.

Le théorème binomial ne fournit pas seulement une formule pour développer $(a+b)^n$, mais donne aussi immédiatement plusieurs identités importantes concernant les coefficients binomiaux. Celles-ci apparaissent de manière particulièrement élégante lorsque l'on attribue à a et à b des valeurs particulières. Avec l'interprétation combinatoire des coefficients binomiaux, on obtient ainsi deux formules de sommation fondamentales.

Théorème 23. *Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Démonstration. Nous appliquons le théorème binomial.

En remplaçant, dans

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

les valeurs $a = 1$ et $b = 1$, on obtient

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k.$$

Comme $1^{n-k} = 1$ et $1^k = 1$, il s'ensuit que

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

La première assertion est donc démontrée.

En remplaçant maintenant a par 1 et b par -1, il vient

$$(1+(-1))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k.$$

On a donc

$$0^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $0^n = 0$, donc

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

La seconde assertion est ainsi également démontrée. □

Remarque 24 (Interprétation combinatoire de la première identité)**.** *L'égalité*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

peut également être comprise directement d'un point de vue combinatoire. D'après le théorème donnant le nombre de sous-ensembles à k éléments, le coefficient $\binom{n}{k}$ indique combien de sous-ensembles ayant exactement k éléments possède un ensemble à n

éléments. En sommant sur toutes les valeurs possibles de k, on compte donc tous les sous-ensembles d'un ensemble à n éléments.

Comme chacun des n éléments est soit contenu dans un sous-ensemble, soit ne l'est pas, il existe exactement deux possibilités pour chaque élément. Au total, un ensemble à n éléments possède donc exactement

$$2^n$$

sous-ensembles. Ainsi, l'identité

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

est également immédiatement claire du point de vue combinatoire.

2.6 La série géométrique

Un cas particulier particulièrement important de sommes apparaît lorsque les termes sont obtenus par multiplication répétée par un même nombre. De telles séries s'appellent des *séries géométriques*. Elles interviennent dans de nombreux domaines des mathématiques, par exemple dans les estimations, dans l'étude des limites, dans le calcul des intérêts et, plus tard, dans les séries entières.

Théorème 25 (Formule de la série géométrique)**.** *Soient $a \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}_0$. Alors*

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Démonstration. Nous démontrons l'assertion par récurrence complète sur n.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{0} a^k = a^0 = 1.$$

D'autre part,

$$\frac{1 - a^{0+1}}{1 - a} = \frac{1 - a}{1 - a} = 1.$$

L'assertion est donc vraie pour $n = 0$.

Hypothèse de récurrence : Supposons que, pour un $n \in \mathbb{N}_0$ fixé mais arbitraire, on ait déjà

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Étape d'hérédité : Nous montrons maintenant la formule pour $n+1$. On a

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1}.$$

Nous mettons alors au même dénominateur :

$$\frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}+a^{n+1}(1-a)}{1-a}.$$

Après développement, on obtient

$$\frac{1-a^{n+1}+a^{n+1}-a^{n+2}}{1-a} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}.$$

L'assertion est donc également démontrée pour $n+1$.

Par conséquent, la formule est valable pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. □

Remarque 26. *Pour $a = 1$, la formule n'est pas définie sous cette forme. Dans ce cas, on a cependant immédiatement*

$$\sum_{k=0}^{n} 1^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1.$$

La formule générale montre de manière particulièrement claire comment une structure répétitive simple peut donner naissance à une expression fermée.

Plus tard, la série géométrique jouera notamment un rôle important dans l'étude des limites, des séries et des estimations. Elle fait donc partie des outils fondamentaux de l'analyse.

La série géométrique constitue une conclusion appropriée pour ce chapitre. Elle montre une fois encore l'efficacité de la récurrence complète comme principe de démonstration et le lien étroit qu'elle entretient avec le dénombrement, la sommation et la structure algébrique des nombres naturels. Les bases essentielles sur lesquelles reposera la suite de l'analyse sont ainsi posées.

2.7 Exercices et solutions

Les exercices suivants reprennent les contenus centraux de ce chapitre. Chaque sous-section contient exactement un exercice, suivi directement de sa solution. De cette manière, les notions et les idées de preuve peuvent être reprises étape par étape.

1.1 Démonstration par récurrence complète

Exercice 27. *Montrer par récurrence complète que :*

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Solution 28. *Nous démontrons l'assertion par récurrence complète sur n.*

Pour $n = 1$, on a

$$1 = 1^2.$$

L'assertion est donc vraie pour la valeur initiale.

Supposons maintenant que l'assertion soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, c'est-à-dire que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Alors, pour le cas suivant, il vient :

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1).$$

Comme

$$n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

on obtient

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

L'assertion est ainsi démontrée pour $n + 1$. Par conséquent, la formule est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.2 Notation sommatoire

Exercice 29. *Écrire explicitement la somme*

$$\sum_{k=1}^{4}(2k - 1)$$

et calculer sa valeur.

Solution 30. *Le symbole de sommation signifie que l'on additionne les termes pour $k = 1, 2, 3, 4$:*

$$\sum_{k=1}^{4}(2k - 1) = 1 + 3 + 5 + 7.$$

En additionnant ces nombres, on obtient

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{4}(2k - 1) = 16.$$

Cela correspond aussi à la formule générale

$$\sum_{k=1}^{n}(2k - 1) = n^2,$$

car, pour $n = 4$, on a $4^2 = 16$.

1.3 Symbole de produit et factorielle

Exercice 31. *Calculer*

$$\prod_{k=1}^{5} k$$

et expliquer le lien avec la factorielle.

Solution 32. *Le symbole de produit signifie que l'on multiplie les facteurs pour* $k = 1, 2, 3, 4, 5$ *:*

$$\prod_{k=1}^{5} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Cette expression est précisément, par définition, la factorielle de 5 *:*

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Par conséquent,

$$\prod_{k=1}^{5} k = 5!.$$

1.4 Le coefficient binomial

Exercice 33. *Calculer*

$$\binom{5}{2}.$$

Expliquer ensuite brièvement la signification combinatoire du résultat.

Solution 34. *Avec la définition du coefficient binomial, nous obtenons*

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!}.$$

Or

$$5! = 120, \qquad 2! = 2, \qquad 3! = 6,$$

donc

$$\binom{5}{2} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10.$$

Cela signifie que, dans un ensemble à 5 éléments, on peut choisir exactement 10 sous-ensembles différents à 2 éléments lorsque l'ordre ne joue aucun rôle.

1.5 Le théorème binomial

Exercice 35. *Développer $(x+y)^3$ à l'aide du théorème binomial.*

Solution 36. *Pour $n=3$, le théorème binomial s'écrit :*

$$(x+y)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} x^{3-k} y^k.$$

Les coefficients binomiaux sont

$$\binom{3}{0} = 1, \qquad \binom{3}{1} = 3, \qquad \binom{3}{2} = 3, \qquad \binom{3}{3} = 1.$$

On obtient donc

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

C'est le développement complet de $(x+y)^3$.

1.5.1 Conséquences du théorème du binôme

Exercice 37. *Montrer que :*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Solution 38. *On applique le théorème du binôme avec $a=1$ et $b=1$. On obtient alors*

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k.$$

Comme toute puissance de 1 vaut encore 1, le membre de droite se simplifie en

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Le membre de gauche vaut

$$(1+1)^n = 2^n.$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Cette formule possède également une belle interprétation combinatoire : elle compte toutes les parties d'un ensemble à n éléments.

1.5.2 La série géométrique

Exercice 39. *Montrer que, pour $a \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}_0$, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Solution 40. *Nous démontrons la formule par récurrence complète sur n.*

Pour $n = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{0} a^k = a^0 = 1.$$

Le membre de droite donne

$$\frac{1 - a^{0+1}}{1 - a} = \frac{1 - a}{1 - a} = 1.$$

L'assertion est donc vraie pour $n = 0$.

Supposons maintenant que la formule soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}_0$ fixé, c'est-à-dire que

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Alors, pour $n + 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, il vient

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} + a^{n+1}.$$

En mettant au même dénominateur, on obtient

$$\frac{1 - a^{n+1} + a^{n+1}(1 - a)}{1 - a} = \frac{1 - a^{n+2}}{1 - a}.$$

La formule est donc également vraie pour $n + 1$. Elle est ainsi démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Cette formule est importante, car elle transforme une longue somme en une expression fermée. Elle jouera plus tard un rôle central dans l'étude des limites, des séries et des estimations.

Chapitre 3

Les axiomes de corps des nombres réels

Dans les sections précédentes, nous avons vu comment formuler et démontrer avec précision des énoncés mathématiques à l'aide de méthodes logiques. Nous nous tournons maintenant vers l'un des ensembles de nombres centraux de l'analyse : les nombres réels $\mathbb{R}$.

Les nombres réels ne forment pas seulement un ensemble sur lequel on peut additionner et multiplier ; ils possèdent aussi une série de propriétés fondamentales qui décrivent de manière caractéristique ces opérations de calcul. Ces propriétés sont appelées les *axiomes de corps*.

Nous considérons d'abord $\mathbb{R}$ comme un ensemble muni de deux opérations

$$+ \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto x + y,$$

et

$$\cdot \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto x \cdot y.$$

La première section est consacrée aux axiomes de l'addition.

3.1 Les axiomes de l'addition

L'addition sur les nombres réels satisfait les propriétés suivantes :

1. **Associativité :** Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a
$$(x + y) + z = x + (y + z).$$
2. **Commutativité :** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a
$$x + y = y + x.$$
3. **Existence d'un élément neutre :** Il existe un élément $0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait
$$x + 0 = x.$$
4. **Existence d'inverses additifs :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un élément $-x \in \mathbb{R}$ tel que
$$x + (-x) = 0.$$

L'élément neutre de l'addition est appelé *zéro* ; l'élément inverse associé à x est appelé *opposé* ou *inverse additif* de x.

3.1.1 Conséquences des axiomes de l'addition

Des axiomes de l'addition, on peut déjà déduire plusieurs propriétés fondamentales qui seront constamment utilisées dans la suite de l'analyse. De nombreux calculs et démonstrations ultérieurs reposent sur ces conséquences élémentaires.

1. **Théorème 41.** *L'élément nul est déterminé de manière unique.*

   Démonstration. Soient 0 et $0'$ deux éléments neutres pour l'addition. Alors on a
   $$0 = 0 + 0'$$
   par neutralité de $0'$. D'autre part,
   $$0 + 0' = 0'$$
   par neutralité de 0. Il s'ensuit donc que $0 = 0'$. Ainsi, l'élément neutre est déterminé de manière unique. □

2.

Théorème 42. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'inverse additif est déterminé de manière unique.*

Démonstration. Soient y et z deux inverses additifs de x. Alors

$$x + y = 0 \qquad \text{et} \qquad x + z = 0.$$

Nous ajoutons z aux deux membres de la première égalité. On obtient alors

$$(x + y) + z = 0 + z.$$

Par associativité et commutativité de l'addition, il vient

$$(x + z) + y = z.$$

Comme $x + z = 0$, on a donc $0 + y = z$, d'où $y = z$. □

3.

Théorème 43. *On a $-0 = 0$.*

Démonstration. Par définition, -0 est un inverse additif de 0. Mais comme

$$0 + 0 = 0$$

on voit que 0 est lui-même un inverse additif de 0. Par l'unicité de l'inverse additif, il s'ensuit que

$$-0 = 0.$$

□

4.

Théorème 44. *L'équation $a + x = b$ possède une unique solution, à savoir $x = b - a$.*

Démonstration. Nous montrons d'abord l'existence. Posons

$$x = b - a = b + (-a),$$

alors, par associativité et commutativité de l'addition, il vient

$$a + x = a + (b + (-a)) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b.$$

Ainsi, $x = b - a$ est une solution.

Pour l'unicité, soit maintenant x une solution quelconque de $a + x = b$. Alors

$$a + x = b.$$

En ajoutant $-a$ aux deux membres, on obtient

$$(-a) + (a + x) = (-a) + b.$$

Par associativité, il s'ensuit que

$$((-a) + a) + x = (-a) + b,$$

donc

$$0 + x = (-a) + b.$$

Par conséquent,

$$x = (-a) + b = b + (-a) = b - a.$$

La solution est donc déterminée de manière unique. □

5.

Théorème 45. *On a* $-(-x) = x$.

Démonstration. Par définition, $-x$ est l'inverse additif de x, donc

$$x + (-x) = 0.$$

Par commutativité de l'addition, on a aussi

$$(-x) + x = 0.$$

Ainsi, x est un inverse additif de $-x$. Par l'unicité de l'inverse additif, il s'ensuit que

$$-(-x) = x.$$

□

6.

Théorème 46. *On a* $-(x + y) = -x - y$.

Démonstration. Nous montrons que $(-x)+(-y)$ est un inverse additif de $x+y$. En effet,

$$\begin{aligned}(x+y)+\big((-x)+(-y)\big) &= \big(x+(-x)\big)+\big(y+(-y)\big)\\ &= 0+0\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $(-x)+(-y)$ est un inverse additif de $x+y$. Par l'unicité de l'inverse additif, il s'ensuit que

$$-(x+y) = (-x)+(-y).$$

On écrit habituellement cela sous la forme abrégée

$$-(x+y) = -x-y.$$

□

3.2 Axiomes de la multiplication et loi distributive

Outre l'addition, $\mathbb{R}$ possède aussi une seconde opération, la multiplication

$$\cdot\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad (x,y)\mapsto x\cdot y.$$

Cette opération satisfait elle aussi des axiomes fondamentaux qui déterminent de manière essentielle le calcul avec les nombres réels. Avec la loi distributive, ils décrivent la structure algébrique des nombres réels comme un corps.

La multiplication sur $\mathbb{R}$ satisfait les propriétés suivantes :

1. **Associativité :** Pour tous $x,y,z\in\mathbb{R}$, on a
$$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z).$$
2. **Commutativité :** Pour tous $x,y\in\mathbb{R}$, on a
$$x\cdot y = y\cdot x.$$
3. **Existence d'un élément neutre :** Il existe un élément $1\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on ait
$$x\cdot 1 = x.$$

4. **Existence des inverses multiplicatifs :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0$, il existe un élément $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tel que
$$x \cdot x^{-1} = 1.$$

5. **Loi distributive :** Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a
$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$
De même, en raison de la commutativité de la multiplication, on a aussi
$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

L'élément neutre de la multiplication est appelé *un*. L'élément inverse associé à un élément x non nul est appelé *inverse* ou *inverse multiplicatif* de x.

3.2.1 Conséquences

Des axiomes de la multiplication et de la loi de distributivité découlent plusieurs résultats fondamentaux qui seront constamment utilisés dans la suite. Comme pour les axiomes de l'addition, nous emploierons désormais ces conséquences sans les justifier à nouveau.

1. **Théorème 47.** *L'élément unité est uniquement déterminé.*

   Démonstration. Soient 1 et $1'$ deux éléments neutres pour la multiplication. Alors on a
   $$1 = 1 \cdot 1'$$
   en raison de la neutralité de $1'$. D'autre part, on a
   $$1 \cdot 1' = 1'$$
   en raison de la neutralité de 1. Il s'ensuit que $1 = 1'$. Ainsi, l'élément neutre multiplicatif est uniquement déterminé. □

2. **Théorème 48.** *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq 0$, l'inverse multiplicatif est uniquement déterminé.*

Démonstration. Soient y et z deux inverses multiplicatifs de x. Alors on a

$$xy = 1 \qquad \text{et} \qquad xz = 1.$$

Il en résulte que

$$y = y \cdot 1 = y(xz) = (yx)z = (xy)z = 1 \cdot z = z.$$

Ainsi, l'inverse multiplicatif de x est uniquement déterminé. □

3.

Théorème 49. *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, l'équation*

$$ax = b$$

possède une solution unique, à savoir

$$x = a^{-1}b = \frac{b}{a}.$$

Démonstration. Montrons d'abord l'existence. Posons

$$x = a^{-1}b,$$

alors, par associativité, nous obtenons

$$ax = a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = 1 \cdot b = b.$$

Ainsi, $x = a^{-1}b$ est une solution.

Pour l'unicité, soit maintenant x une solution quelconque de $ax = b$. Alors

$$ax = b.$$

La multiplication par a^{-1} donne

$$a^{-1}(ax) = a^{-1}b.$$

Par associativité, il vient

$$(a^{-1}a)x = a^{-1}b,$$

donc

$$1 \cdot x = a^{-1}b.$$

Ainsi,

$$x = a^{-1}b.$$

La solution est donc uniquement déterminée. □

4.

Théorème 50. *Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a*

$$(x + y)z = xz + yz.$$

Démonstration. D'après la distributivité, on obtient d'abord

$$z(x + y) = zx + zy.$$

Par commutativité de la multiplication, on a $z(x + y) = (x + y)z$, ainsi que $zx = xz$ et $zy = yz$. Il s'ensuit que

$$(x + y)z = xz + yz.$$

□

5.

Théorème 51. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$x \cdot 0 = 0.$$

Démonstration. Comme $0 + 0 = 0$, la distributivité donne

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0.$$

En ajoutant aux deux membres l'inverse additif de $x \cdot 0$, on obtient

$$0 = x \cdot 0.$$

Donc $x \cdot 0 = 0$. □

6.

Théorème 52. *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a*

$$xy = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \text{ } ou \text{ } y = 0.$$

Démonstration. Si $x = 0$ ou $y = 0$, alors $xy = 0$ suit immédiatement de l'énoncé précédent.

Réciproquement, supposons que $xy = 0$. Si $x \neq 0$, on multiplie l'égalité $xy = 0$ à gauche par x^{-1}. On obtient alors

$$x^{-1}(xy) = x^{-1}0.$$

Par associativité et d'après l'énoncé précédent, il vient

$$(x^{-1}x)y = 0,$$

donc

$$1 \cdot y = 0,$$

et par conséquent $y = 0$.

Ainsi, on a bien :

$$xy = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } y = 0.$$

Avec la première implication, cela démontre l'assertion. □

7.

Théorème 53. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$-x = (-1)x.$$

Démonstration. Calculons d'abord

$$x + (-1)x = 1x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0 \cdot x = 0.$$

Ainsi, $(-1)x$ est un inverse additif de x. Par l'unicité de l'inverse additif, il s'ensuit que

$$-x = (-1)x.$$

□

8.

Théorème 54. *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a*

$$(-x)(-y) = xy.$$

Démonstration. D'après l'énoncé précédent, nous obtenons

$$(-x)(-y) = \big((-1)x\big)\big((-1)y\big).$$

Par associativité et commutativité de la multiplication, il vient

$$\big((-1)x\big)\big((-1)y\big) = (-1)(-1)xy.$$

Il suffit donc de montrer que $(-1)(-1) = 1$. Cela résulte de

$$\begin{aligned} 0 &= (-1)\cdot 0 \\ &= (-1)(1+(-1)) \\ &= (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) \\ &= -1 + (-1)(-1) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(-1)(-1) = 1.$$

Il s'ensuit que

$$(-x)(-y) = xy.$$

□

9.

Théorème 55. *Pour $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0$, on a*

$$(x^{-1})^{-1} = x.$$

Démonstration. Par définition, x^{-1} est un inverse multiplicatif de x, donc

$$xx^{-1} = 1.$$

Par commutativité de la multiplication, on a aussi

$$x^{-1}x = 1.$$

Ainsi, x est un inverse multiplicatif de x^{-1}. Par l'unicité de l'inverse multiplicatif, il s'ensuit que

$$(x^{-1})^{-1} = x.$$

□