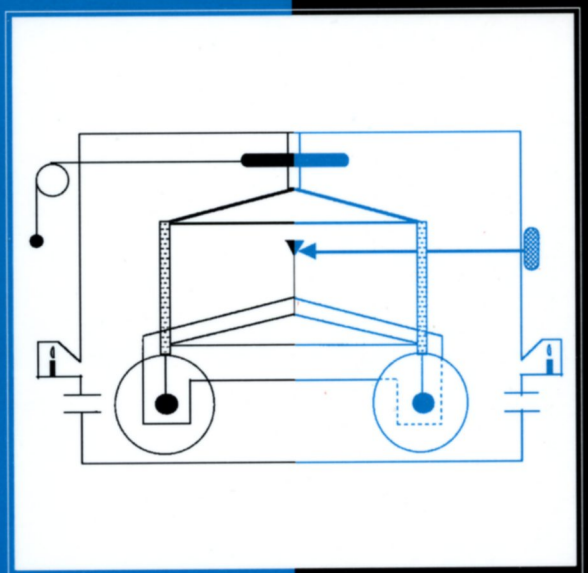
ASTROPHYSIQUE

Rémi HAKIM

Gravitation relativiste



SAVOIRS ACTUELS

CNRS EDITIONS

EDP SCIENCES

Gravitation Relativiste

Rémi Hakim

Gravitation Relativiste

S A V O I R S A C T U E L S

EDP Sciences / CNRS Éditions

Illustration de couverture : l'expérience de Cavendish
(voir la figure 1.10)

© 2001, **EDP Sciences**, 7, avenue du Hoggar, BP 112, PA de Courtabœuf,
91944 Les Ulis Cedex A.
CNRS ÉDITIONS, 15, rue Malebranche, 75005 Paris.

1re édition :
© 1994, **InterÉditions – CNRS ÉDITIONS**

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays.

Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle).

Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. 01.43.26.95.35.

ISBN 2-86883-370-5
ISBN 2 271 05198 9

Table des matières†

Avant–propos	**XI**
1. La gravitation newtonienne	**1**
L'espace–temps newtonien	1
Simultanéité et mesure des distances*	4
Les absolus de Newton et la notion d'éther*	7
Le principe d'inertie	10
Les lois de la dynamique et de la relativité galiléenne	13
Les principes d'inertie et de relativité vus par Galilée*	18
La gravitation newtonienne	18
Mesure de la constante de gravitation	24
Limites de la théorie newtonienne de la gravitation	30
Le caractère fini de la vitesse de la lumière	33
L'expérience de Michelson	37
Exercices	40
2. L'espace–temps de Minkowski	**43**
L'espace–temps de la Relativité Restreinte	45
La transformation de Lorentz	48
Remarques	51
Causalité et simultanéité	55
Temps et distances mesurés par des observateurs inertiels	62
Propriétés globales de l'espace–temps*	64
Les vérifications expérimentales de la Relativité Restreinte*	66
Exercices	69
3. La forme relativiste des lois de la physique	**73**
Le formalisme tensoriel	73
L'effet Doppler et le phénomène d'aberration	81
La description cinématique du mouvement d'une particule	84
La dynamique relativiste; $E=mc^2$	89
L'espace de Minkowski en coordonnées curvilignes	93
Exercices	102

† Les paragraphes désignés par $*$ peuvent être sautés en première lecture.

4. La gravitation et la Relativité Restreinte **105**
Le décalage gravitationnel vers le rouge 107
La courbure des rayons lumineux 108
L'avance du périhélie de Mercure 110
Nécessité d'équations non linéaires pour la gravitation 112
Exercices 113

5. L'électromagnétisme et l'hydrodynamique relativistes **115**
Densités et courants 115
Les équations de l'électromagnétisme 119
Le tenseur énergie–impulsion 122
L'hydrodynamique relativiste 123
Exercices 124

6. Qu'est–ce qu'un espace courbe? **129**
Quelques manifestations de la courbure 129
Courbure des surfaces à deux dimensions 133
Signification de la courbure intrinsèque 139
Surfaces de $\mathbf{R}^n$ – Espaces de Riemann 141
Courbure intrinsèque d'une variété 143
Propriétés du tenseur de courbure 145
L'espace–temps comme variété riemannienne* 147
Quelques propriétés des tenseurs dans un espace courbe 149
Trois arguments en faveur d'un espace–temps courbe 150
Exercices 152

7. Le principe d'équivalence **155**
Le principe d'équivalence faible et les expériences d'Eötvös–Dicke 156
Le principe d'équivalence et le couplage minimal 166
Le décalage gravitationnel vers le rouge 175
Mouvements géodésiques 179
La déviation géodésique 181
Le tenseur métrique à symétrie sphérique 183
Aperçu du formalisme PPN 185
Les tests classiques 188
Les mirages gravitationnels 195
Exercices 203

8. La gravitation relativiste d'Einstein (Relativité Générale) **209**
Les équations d'Einstein 210
Autres déductions des équations d'Einstein* 215
La solution de Schwarzschild 219
La géométrie locale des espaces de Friedman 225
Autres métriques d'intérêt astrophysique* 233
Les équations d'Einstein linéarisées 234
Ondes et rayonnement gravitationnels 237
Exercices 253

Appendice A : Généralités sur les tenseurs **257**
Appendice B : Formes différentielles extérieures **263**
Appendice C : Forme variationnelle des équations de champ **279**
Appendice D : Notion de variété **285**
Références **291**
Constantes physiques **303**
Index **305**

Avant-propos

Cet ouvrage est consacré à la théorie de la Relativité Générale, c'est-à-dire à la synthèse de la relativité et de la gravitation. Cette *Gravitation Relativiste*, comme on dit plutôt aujourd'hui, apparaît ainsi comme étant de première importance dans tous les phénomènes de l'astronomie qui font intervenir soit des vitesses comparables ou égales à celle de la lumière, soit des champs de gravitation intenses. L'ensemble de l'étude de ces phénomènes constitue ce que l'on appelle l'*Astrophysique Relativiste*, une expression due à Alfred Schild (1967). Ce que nous nous proposons d'exposer ici constitue le minimum minimorum de la théorie relativiste de la gravitation nécessaire pour aborder cette discipline relativement récente.

A ce stade, il peut être intéressant de rappeler brièvement la genèse de ce nouveau domaine et, plus particulièrement, la façon dont il est lié à la Relativité Générale. A cette fin, il est nécessaire de se souvenir qu'une fois les «tests classiques» de la Relativité Générale vérifiés [déviation des rayons lumineux au voisinage du Soleil (1919); décalage spectral vers le rouge (dans les naines blanches : W.S. Adams (1925)); avance du périhélie de Mercure], cette discipline s'était alors embourbée dans des voies assez formelles parce qu'alors, les technologies disponibles ne permettaient pas qu'elle fût en contact ni avec l'expérience, ni avec l'observation astronomique. Bien que les recherches effectuées fussent souvent d'un grand intérêt conceptuel (théories unitaires de la gravitation et de l'électromagnétisme, par exemple) et théorique (développements mathématiques divers), la relativité tournait un peu en rond [J. Eisenstaedt (1986)] en raison de l'absence d'expériences de laboratoire et/ou d'observations d'objets spécifiquement relativistes, inconnus au niveau théorique avant les années trente et, dans une large mesure, quarante voire cinquante. Ainsi, la cosmologie était bien davantage considérée comme un «*espace de liberté pour penser la relativité*» [J. Eisenstaedt (1989)] que comme un champ de vérifications astronomiques possibles de la Relativité Générale, ou même la «*science de l'Univers*» [E. R. Harrison (1981)].

La découverte de l'effet Mössbauer (1958) devait permettre la mesure du décalage spectral vers le rouge, d'origine gravitationnelle, en laboratoire, tandis que les progrès expérimentaux autorisaient le renouvellement de l'expérience d'Eötvös avec une précision inégalée. En même temps, après la Deuxième Guerre mondiale, les discussions sur la nucléosynthèse des éléments conduisaient G. Gamow et ses collaborateurs à l'idée que l'Univers avait été, dans un passé lointain, dans une phase chaude, dont subsisterait aujourd'hui un rayonnement noir du fond du ciel.

Ce rayonnement fut découvert [1] en 1965, ce qui suscita un grand intérêt envers la cosmologie qui commença à se développer alors sérieusement, d'autant que, quelques années plus tôt (1963) les quasars – les objets les plus lointains que l'on connaisse – étaient observés. Peu après cette découverte, les premiers pulsars étaient trouvés (fin 1967), très vite identifiés par T. Gold (1969) aux étoiles à neutrons imaginées en 1932 par Landau.

Ainsi, les années soixante remirent la relativité sur une base expérimentale [2], lui fournissant des objets d'étude astrophysique qui, jusque-là, lui avaient fait défaut. En même temps, la notion théorique de trou noir, ainsi que celle d'ondes gravitationnelles, étaient approfondies et des recherches observationnelles et expérimentales, respectivement, étaient entreprises afin de les mettre en évidence. Il s'agit là d'objets spécifiquement relativistes, susceptibles de toutes sortes d'effets astrophysiques et que l'on cherche, bien évidemment, à observer. Il va de soi, enfin, que les découvertes observationnelles mentionnées plus haut ont suscité, en retour, de nouvelles observations, par exemple les sondages profonds du ciel destinés à mettre en évidence d'éventuelles grandes structures suggérées par tel ou tel scénario cosmologique.

Il existe, à l'heure actuelle, un certain nombre de théories relativistes de la gravitation qui sont compatibles avec l'expérience et l'observation; mais la Relativité Générale d'Einstein fut sans aucun doute la première historiquement à fournir des résultats théoriques corrects en accord précis avec les faits. Aussi est-ce à cette théorie, principalement, qu'est consacré cet ouvrage sans que soit abordée la question des étoiles denses, de l'effondrement gravitationnel ou des trous noirs : le lecteur pourra consulter le livre de S.L. Shapiro et S.A. Teukolsky (1983) sur ces points. La cosmologie non plus n'est pas développée ici : il existe d'excellents ouvrages comme ceux de P.J.E. Peebles (1993), N. Straumann (1984), Ya. B. Zeldovich et I.D. Novikov (1975) ou S. Weinberg (1972), etc. Il s'agira ici, non pas tant d'un exposé de la Relativité Générale, que d'éléments conceptuels ou techniques minimaux permettant d'appréhender sans difficulté particulière les aspects en quelque sorte gravitationnels de l'Astrophysique Relativiste. Divers compléments favoriseront, en outre, l'accès à la littérature courante. Deux illustrations d'intérêt astrophysique seront étudiées de manière simple : il s'agit, d'une part, des lentilles gravitationnelles, observées ces dernières années, et d'autre part, des ondes gravitationnelles, non encore détectées en laboratoire [3] mais implicitement mises en évidence par l'observation du pulsar binaire PSR 1913 + 16 et qui, dans le futur, donneront peut-être lieu à une nouvelle astronomie.

---

1. L'histoire de cette découverte est racontée par S. Weinberg (1978); voir aussi E.R. Harrison (1981) ou R. Hakim (1992).

2. A cela il convient d'ajouter, pendant ces mêmes années, les progrès des techniques spatiales permettant des expériences impossibles à réaliser sur Terre.

3. Une coopération franco-italienne, le projet VIRGO, en cours de réalisation, devrait peut-être permettre leur mise en évidence d'ici l'an 2000.

Pour le débutant, la théorie de la relativité, qu'il s'agisse de la théorie restreinte ou de la théorie générale, présente (comme d'ailleurs toute théorie physique) des difficultés conceptuelles d'abord et d'autres purement techniques, ensuite.

Au niveau conceptuel, le principal problème consiste à «penser de manière relativiste», c'est-à-dire dans l'*espace-temps* [4], notion absolument centrale. On pourrait croire que depuis 1908, date à laquelle il a été introduit, ce concept d'espace-temps, avec ses structures déterminées par le cône de lumière, est acquis dès les premières années d'université. Il n'en est malheureusement rien car, pour nombre d'étudiants (et souvent d'enseignants!) la Relativité Restreinte se limite à la transformation de Lorentz, à la contraction des longueurs et à la dilatation des durées! Il est clair, enfin, que l'apprentissage de la Relativité Générale présente, dans un premier temps, assez peu de difficultés conceptuelles pour qui maîtrise la Relativité Restreinte. C'est pourquoi cet ouvrage contient un exposé de cette théorie basé uniquement sur la notion d'espace-temps, notion introduite elle-même au niveau classique. Il est ensuite assez aisé de montrer, qualitativement, qu'en déformant le cône de lumière de la Relativité Restreinte, la gravitation rend pratiquement nécessaire l'introduction d'un espace-temps courbe. Si le *principe d'équivalence* – autre concept central de la Gravitation Relativiste – présente moins de difficulté dans ses versions les plus simples, auxquelles le lecteur peut se limiter dans un premier temps, il contient nombre de subtilités dont nous n'avons mentionné quelques-unes que pour mettre en évidence leur lien avec d'éventuels phénomènes géophysiques, astrophysiques ou autres, afin aussi que le lecteur ne soit pas confronté à un système théorique fermé mais garde présent à l'esprit que d'autres voies restent possibles.

Au niveau technique, maintenant, si le calcul tensoriel dans l'espace de Minkowski peut être maîtrisé assez facilement – à cette fin, les exercices sont indispensables – ce n'est pas tout à fait le cas de ce même calcul en espace courbe. Généralement, la conjonction de ce type de difficulté avec celles de nature conceptuelle peut rendre difficile l'abord de la Gravitation Relativiste. C'est pourquoi l'usage des coordonnées curvilignes a été introduit en Relativité Restreinte [5], l'extension au cas d'un espace-temps courbe devenant alors très simple : il s'agit, à quelques détails près, des mêmes formules.

Ajoutons que la matière de ce livre a été enseignée pendant plusieurs années à des niveaux très divers allant de la seconde année d'université, dans ses aspects les plus simples, à la quatrième ou cinquième en l'adaptant, bien entendu, à ces différents publics. De cette diversité, il subsiste dans cet ouvrage une lecture possible à deux niveaux.

Le premier niveau, élémentaire, permet d'obtenir une vue générale du sujet et est surtout fondé sur des raisonnements intuitifs et sur une approche plutôt heuristique que technique.

---

4. Voir E.F. Taylor, J.A. Wheeler (1966).
5. A la suite de V.I. Fock (1966).

Le second niveau, tout en restant en deçà de ce qui est indispensable à une utilisation courante, exige un peu plus d'efforts car, si les concepts en jeu sont exposés avec leurs bases expérimentales et théoriques ainsi que leur articulation logique, il est également nécessaire de les étayer par des éléments techniques tout en restant au niveau des mathématiques usuelles. Ce second niveau, pour être réellement acquis, exige le recours aux exercices proposés en fin de chapitre. Il a pour but une compréhension minimale, notamment pour ceux que l'Astrophysique Relativiste intéresse, autorisant l'accès sans trop de difficultés à la littérature courante. Il est clair, cependant, que seuls des textes plus avancés (manuels ou articles originaux) peuvent permettre une certaine maîtrise du domaine.

Ce second niveau se veut «ouvert» ainsi qu'il convient à un domaine en plein développement. C'est pourquoi le lecteur trouvera dans les références aussi bien les articles des «pères fondateurs» que des compléments divers sur tel ou tel point, sur des démonstrations non données dans le cours du texte; il trouvera aussi des indications expérimentales ou observationnelles dont le détail n'a pas sa place ici; il trouvera également des tentatives «iconoclastes»; il s'agira enfin de rendre à César ce qui lui appartient... En aucun cas les références ne sont (ni ne peuvent être) exhaustives : il s'agit d'un choix de nature purement pédagogique.

Au niveau 1, le lecteur pourra se limiter à l'étude des parties suivantes du texte : chapitre 1 (complet); chapitre 2 (complet); chapitre 4 (complet); chapitre 6 (manifestations de la courbure, courbure des surfaces à deux dimensions, signification de la courbure intrinsèque, arguments en faveur d'un espace-temps courbe); chapitre 7 (le principe d'équivalence faible, le couplage minimal, lentilles gravitationnelles); chapitre 8 (début de la métrique de Schwarzschild).

Au niveau 2, qui contient naturellement le niveau 1 et représente à peu près soixante heures d'enseignement, en y incluant les exercices, le lecteur devra étudier les divers éléments techniques présentés ainsi que leurs applications, et les conforter par les problèmes proposés, qui se rapportent aussi bien à des démonstrations simples non données dans le corps du texte qu'à des points purement techniques, voire à des illustrations ou des compléments divers. On pourra, sur tel ou tel point, consulter l'un des manuels de relativité indiqués ou même les articles originaux de la bibliographie. De manière générale, certains paragraphes en petits caractères peuvent être sautés en première lecture.

A titre d'exemple, et pour nous limiter à des ouvrages publiés ces vingt dernières années, nous mentionnerons, par ordre de difficulté à peu près croissante et sans que la liste ci-dessous soit complète, les ouvrages suivants : J. Schwarz, M. McGuiness (1980); J. Foster, J.D. Nightingale (1979); M.G. Bowler (1976); B. Schutz (1988); N. Straumann (1984); S. Weinberg (1972); R. Wald (1984), etc. Ajoutons également deux ouvrages parus en français récemment : Ph. Tourrenc (1993); J. Leite-Lopes (1993).

A ces ouvrages il pourra être utile d'ajouter le livre d'exercices de Lightman *et al.* (1975). En ce qui concerne le volumineux ouvrage de Ch. Misner, K. Thorne et J.A. Wheeler (1973), il convient, dans la perspective limitée adoptée ici, de l'utiliser

davantage comme une sorte de dictionnaire que comme un manuel à part entière; nous nous y référerons cependant à maintes reprises.

Remerciements

Je suis heureux de pouvoir remercier ici Mmes Sabine Collé et Dominique Lopez du soin apporté à la frappe de ce manuscrit.

Que mes collègues MM. E. Alvarez, L. Bel, L. Blanchet, B. Carter, T. Damour, N. Deruelle, D. Gerbal, E. Gourgoulhon, F. Hammer, J.P. Lasota, J.P. Luminet, J.A. Marck, P. Peter, D. Polarski, D. Priou, J. Schneider, H. Sivak, C. Vanderriest et M. Zonabend trouvent ici l'expression de ma reconnaissance pour leurs nombreuses remarques et suggestions qui m'ont permis d'améliorer grandement cette introduction ainsi que d'éviter quelques erreurs. Mes étudiants de ces dernières années m'ont également fait bénéficier de leurs critiques et remarques qui, elles aussi, ont été extrêmement utiles.

CHAPITRE 1

La gravitation newtonienne

Dans toute la physique classique, l'espace et le temps constituent l'arène où se déroulent les divers phénomènes de la Nature. Ceux–ci ne modifient aucunement ce cadre spatio–temporel qui, *inerte*, est fixé une fois pour toutes, de manière absolue. Bien plus, le temps et l'espace sont de natures totalement différentes et n'ont *aucun lien* entre eux. Aussi la relativité nous apparaîtra–t–elle comme une théorie de la liaison mutuelle de l'espace et du temps, qui trouvera son couronnement avec la Relativité Générale, laquelle lie les propriétés spatio–temporelles aux processus dynamiques qui s'y produisent.

L'espace-temps newtonien

L'espace physique possède les propriétés usuelles de continuité, d'homogénéité, d'isotropie qu'on attribue à l'espace $\mathbf{R}^3$, muni de sa structure affine (parallélisme, existence de droites) et de sa structure métrique habituelle ("théorème" de Pythagore). Il est cependant nécessaire de bien comprendre le sens physique des divers concepts mathématiques liés à $\mathbf{R}^3$. Ainsi l'existence d'objets ou de phénomènes physiques, représentables par des droites (mathématiques) provient de la notion (expérimentale) d'alignement : trois points sont alignés (physiquement) si l'on peut trouver un point de vue tel qu'ils apparaissent confondus. Il s'ensuit que si la lumière constitue notre étalon de rectitude, c'est seulement par un pas supplémentaire de la pensée (lequel peut se révéler incorrect) que l'on peut identifier la trajectoire d'un rayon lumineux avec une droite de $\mathbf{R}^3$. De même le concept mathématique de parallélisme dans $\mathbf{R}^3$ est directement lié à la notion (physique) de transport rigide et à celle de distance. Enfin, il faut se rendre compte que les propriétés (mathématiques) d'homogénéité et d'isotropie de l'espace physique ne font que traduire des faits d'expérience concernant les systèmes mécaniques : l'inaltérabilité des systèmes matériels mis dans quelque position et lieu que ce soit. Dans tous les cas, nos idées théoriques proviennent exclusivement de propriétés vérifiées à une *échelle locale*.

Le temps usuel est mathématisé par un simple paramètre réel et donc $\mathbf{R}$ représente le temps : $\mathbf{R}$ constitue l'élaboration quantitative de la notion qualitative

de *changement*. Physiquement, cela nécessite la connaissance d'un *étalon* du changement dont les états "successifs" (au sens intuitif) seront quantifiés de manière à définir une unité de temps. La principale caractéristique physique du temps est de s'écouler *uniformément*. Cela présuppose l'existence d'étalons restant semblables à eux–mêmes au cours de leurs changements d'état successifs. Cette hypothèse est basée sur la constatation empirique que les diverses horloges conduisent à des mesures concordantes de l'écoulement du temps. Enfin, le fait que $\mathbf{R}$ soit totalement ordonné traduit, mathématiquement, la structure causale de la temporalité.

Ces propriétés physiques de l'espace (isotropie, homogénéité) et du temps (uniformité) se traduisent mathématiquement par des invariances dans des groupes de transformation (rotations, translations d'espace et de temps) qui impliqueront l'existence d'intégrales premières (moment cinétique, impulsion et énergie) ou constantes du mouvement.

Nous avons vu que, dans le cadre de la physique classique, l'espace et le temps étaient susceptibles d'être représentés mathématiquement par $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}$, respectivement. Il est alors parfaitement possible de construite un espace–temps classique (c'est–à–dire prérelativiste), à quatre dimensions,

$$\mathcal{M} \equiv \mathbf{R}^{3+1} = \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}\,, \tag{1.1}$$

qui reste, à *ce* stade, une construction purement mathématique de peu d'utilité ou, tout au moins, sans base physique qui le rende nécessaire.

En réalité, même les notions (prérelativistes) d'espace et de temps sont intimement liées. C'est ce que Minkowski affirmait déjà, dans son célèbre article de 1908, de la manière suivante : "*Les objets de notre perception impliquent invariablement temps et lieu ensemble. Personne n'a jamais observé de lieu sauf en un instant donné, ni de temps sauf en un endroit précis*". A cela, on peut d'ailleurs ajouter que la présence de matière est indispensable si l'on veut observer quoi que ce soit... Bien que le lien entre l'espace et le temps soit tout à fait manifeste dans le contexte relativiste, il existe également dans le cadre newtonien et c'est ce que nous allons étudier rapidement ci–dessous.

Une discussion un peu approfondie [H. Reichenbach (1958); M. Bunge (1967)] du temps newtonien montre clairement déjà que le temps ne peut se concevoir sans un recours nécessaire à des notions spatiales. En outre, si nous avions analysé plus en détail les divers processus (idéaux) de mesure du temps, la liaison entre l'espace et le temps apparaîtrait également.

Dans le cas de l'espace physique, si l'on revient à la genèse de ses principales propriétés, on peut aussi constater l'existence de phénomènes temporels qui leur sont liés, quoique implicitement. Considérons, par exemple, le caractère *euclidien* de l'espace physique. Cette propriété provient, d'une part de la possibilité de déplacements *rigides* (éventuellement avec un mouvement rectiligne et uniforme) et, d'autre part, de l'analyse des processus de *mesure de distance*, lesquels impliquent soit le transport de règles rigides, soit, plus particulièrement, l'utilisation de *signaux lumineux*. Ce caractère euclidien de l'espace physique est donc basé implicitement

sur des faits utilisant la notion de temps, soit directement (mouvements divers), soit indirectement (propagation de signaux lumineux). Les autres propriétés de l'espace physique conduiraient à des conclusions semblables.

Finalement, l'espace–temps classique $\mathbf{R}^{3+1}$ apparaît comme physiquement beaucoup plus fondamental qu'il n'y paraît à première vue; aussi peut–on se poser la question de savoir si ses diverses structures mathématiques correspondent, ou non, à des aspects particuliers de la réalité.

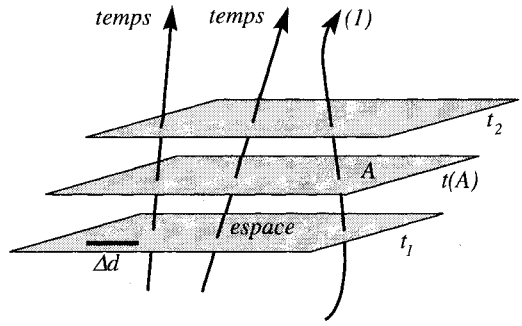


Figure 1.1 : L'espace–temps classique. *Il possède une structure en strates spatiales, euclidiennes (Δd est la distance entre deux points d'une même strate du même espace physique). Le temps est représenté par des droites qui coupent ces diverses strates. (1) représente la trajectoire d'une particule ayant un mouvement arbitraire dans l'espace–temps newtonien.*

Cette structure est décrite sur la figure 1.1. Le temps, universel et absolu, est représenté par des droites orientées (cette orientation est purement conventionnelle et n'est soumise qu'à une condition de cohérence minimale précisée plus loin) qui coupent chacun des 3–plans euclidiens représentant l'espace. *A priori* l'angle de ces droites avec les 3–plans spatiaux que l'on peut observer sur la figure est strictement *sans aucune signification*. En effet, $\mathbf{R}^{3+1}$ ne possède pas de structure métrique euclidienne – contrairement au cas de la Relativité Restreinte [1] – qui puisse donner un sens à la notion d'angle dans cet espace [2]. C'est pourquoi *toutes* les droites du *genre temps*, c'est–à–dire non contenues dans un 3–plan spatial, constituent des axes de temps possibles, parfaitement équivalents. De même, l'angle apparent formé par deux tels axes de temps, du moins sur la figure, n'a pas non plus de signification absolue : il n'est dû qu'à l'inadéquation de notre représentation d'un espace non euclidien, l'espace–temps classique, par un espace qui, lui, est euclidien, celui de la feuille de papier assimilée à $\mathbf{R}^2$. Enfin la structure en *strates d'événements simultanés* de $\mathbf{R}^{3+1}$ doit être interprétée comme sa *structure causale*. Ainsi l'hyperplan de type spatial $t(A)$, qui passe par l'événement A sépare l'espace–temps newtonien en deux régions : le futur $t > t(A)$, qui *peut* être influencé par les phénomènes susceptibles de se dérouler en A, et le passé $t < t(A)$, qui *peut* avoir

1. Pseudo–euclidienne, dans le cas de la Relativité Restreinte : voir le chapitre 2.
2. *Via* un produit scalaire du type $\mathbf{X}.\mathbf{Y} = |\mathbf{X}||\mathbf{Y}| \cos\theta$.

été susceptible d'influencer A; la frontière entre le passé et le futur est le présent, c'est-à-dire l'hyperplan spatial $t(A)$ qui, lui aussi, peut influencer l'événement A en raison de l'existence possible, en physique newtonienne, d'*actions à distance instantanées* [Fig. 1.1].

Etudions maintenant les structures métriques de $\mathbf{R}^{3+1}$: chaque strate de type spatial possède une structure métrique euclidienne, la distance usuelle; de même, chaque fibre du genre temps possède également une métrique euclidienne, la durée. Par contre $\mathbf{R}^{3+1}$ ne possède *aucune* structure euclidienne et, plus particulièrement, certainement pas celle de $\mathbf{R}^4$.

En effet, pour qu'une distance euclidienne dans $\mathbf{R}^4$ du type

$$\Delta\ell^2 = \Delta\mathbf{x}^2 + \Delta t^2 \, v_0^2$$

ait un sens, il faudrait que l'on pût disposer d'un paramètre v_0 absolu, universel, ayant les dimensions d'une vitesse et, évidemment, possédant un sens physique quelconque.

Il reste enfin à se demander si les droites du genre temps qui nous ont servi d'axes temporels possibles ont un sens physique. C'est précisément le *principe d'inertie*, que nous étudions ci-après, qui permet de leur attribuer un tel sens qui, jusqu'ici, leur fait défaut.

En résumé, l'espace-temps newtonien possède quatre dimensions, une structure causale déterminée par des *objets géométriques* qui lui sont propres (les 3-plans spatiaux et les droites temporelles, toutes orientées de la même manière) et des structures affine et métrique assez complexes. Une classe d'objets géométriques, les droites du genre temps – elles représentent des mouvements possibles de particules libres – renforce encore la liaison entre l'espace et le temps. Nous verrons au chapitre 2 quelles structures subsistent en Relativité Restreinte et quelles sont celles qui sont modifiées et comment.

Simultanéité et mesure des distances

Dans l'analyse de l'espace-temps classique qui précède, nous avons considéré comme allant de soi la simultanéité d'événements. Cela correspond-il réellement à ce qui est *effectivement mesurable*, du moins en principe? N'y a-t-il pas là d'hypothèse implicite allant au-delà de ce que l'on peut directement tirer de l'analyse des processus expérimentaux possibles, même idéalisés? Examinons cela de plus près [3].

Pour cela [4], commençons par remarquer que la notion de simultanéité en un point d'espace n'a pratiquement pas de sens concret (elle ne peut guère être réalisée approximativement que dans le cas de collisions de particules élémentaires)

3. En outre, la critique de la notion de simultanéité classique constitue un élément important dans la genèse de la Relativité Restreinte par Einstein.

4. Nous suivrons ici l'exposé de H. Reichenbach (1927).

et constitue, au mieux, une identité logique, c'est–à–dire une définition d'un événement spatio–temporel. Le cas réellement important est celui concernant la simultanéité d'événements spatialement distincts.

Il est alors aisé de se rendre compte que la comparaison temporelle d'événements distants n'est possible que parce qu'un *signal* est envoyé d'un lieu à un autre, signal qui permet la synchronisation d'horloges situées en ces deux endroits. Pour effectuer cette comparaison, il nous faut connaître d'une part la distance spatiale des deux événements et, d'autre part, la vitesse du signal.

Comment mesurer cette vitesse ? Si P_1 et P_2 désignent les deux points d'espace, si t_1 et t_2 désignent les temps de départ et d'arrivée du signal, on aura alors

$$v = \frac{P_1 P_2}{t_2 - t_1} .$$

Mais, pour que cette dernière expression ait un sens, il faut bien que les horloges situées en P_1 et P_2 aient été préalablement synchronisées ! Apparemment, l'expérience de Fizeau concernant la mesure de la vitesse de la lumière [Fig. 1.2] ne requiert qu'une seule horloge : au temps t_1 un signal lumineux est envoyé vers un miroir situé à une distance ℓ où il est réfléchi au temps t_2 vers son point de départ où il arrive au temps t_3 ; on a alors

$$c = \frac{2\ell}{t_3 - t_1} ,$$

et le temps t_2 n'apparaît jamais . . .

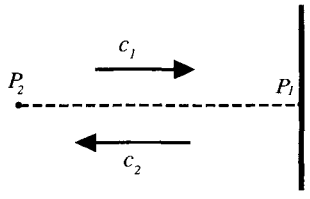


Figure 1.2 : Mesure de la vitesse de la lumière (Fizeau). *Un signal lumineux émis en P_1 au temps t_1 est réfléchi en P_2 et revient en P_1 au temps t_3 ; ce faisant, on ne mesure que la moyenne des vitesses dans les sens P_1 P_2 et P_2 P_1. La mesure de t_1 et celle du temps d'arrivée t_2 en P_2 nécessitent une synchronisation préalable de deux horloges, l'une en P_1 et l'autre en P_2, et donc l'envoi d'un signal lumineux entre ces deux points. . . dont on doit connaître la vitesse de propagation à l'avance ! En réalité, la physique newtonienne admet la synchronisation des horloges par transport lent, voire à l'aide de signaux qui se propagent à vitesse infinie.*

En réalité, l'expérience de Fizeau ne permet de mesurer que la moyenne harmonique des vitesses c_1 et c_2 de la lumière allant au miroir et en revenant :

$$\frac{2}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} .$$

Aussi l'usage *d'une seule* horloge est–il "payé" par *l'hypothèse* supplémentaire $c_1 = c_2$. Si l'on souhaite vérifier expérimentalement cette hypothèse, alors il faut effectivement disposer de deux horloges, en deux points différents, et qui ont donc dû être synchronisées préalablement [Fig. 1.3].

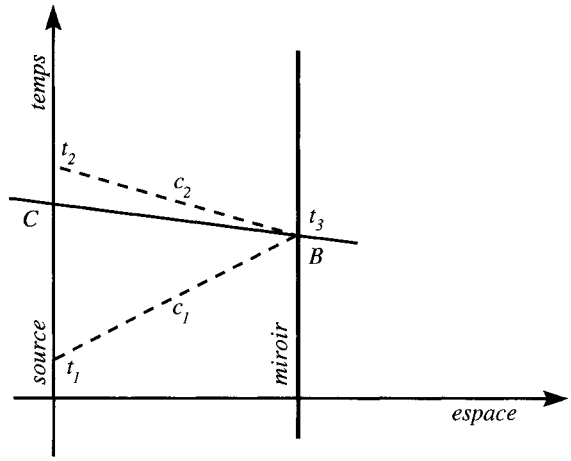


Figure 1.3 : La mesure de la vitesse de la lumière (Fizeau) telle qu'elle se présente dans l'espace-temps. *C et B sont simultanés mais C est arbitraire (avec, cependant, $t_1 < t_3 < t_2$), car t_3 dépend de la façon dont la simultanéité a été définie.*

Nous avons donc abouti au cercle vicieux suivant : la simultanéité nécessite la connaissance d'une vitesse, laquelle, à son tour, exige que soit établie la simultanéité de deux événements !

Il n'y a pas là, en fait, de contradiction : c'est que *la simultanéité n'est pas essentiellement une question expérimentale; il s'agit aussi d'une question de définition* qui, comme toute définition, contient une part d'arbitraire.

Ainsi, dans l'expérience de Fizeau, l'instant d'arrivée du rayon lumineux sur le miroir sera, *par définition,*

$$t_2 = t_1 + \tfrac{1}{2}\,(t_3 - t_1)\ .$$

Toutefois, on aurait pu aussi bien adopter la définition

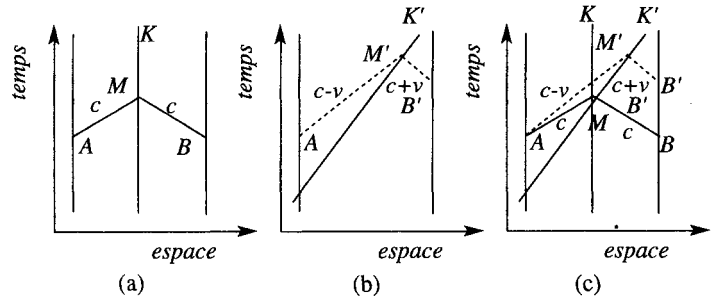
$$t_2 = t_1 + \varepsilon(t_3 - t_1)\ ,$$

avec $0<\varepsilon<1$; et cela, sans aucune contradiction [H. Reichenbach (1927)].

En pratique, les signaux lumineux, étant les plus rapides connus, sont utilisés pour *définir* la simultanéité. Ainsi, pour reprendre la définition d'Einstein de la *simultanéité physique*, deux événements se produisant en deux points distants A et B seront simultanés si des signaux lumineux de A et de B arrivent au même moment au milieu M du segment AB.

Là où les choses se compliquent, c'est lorsqu'il s'agit d'établir la simultanéité de deux événements dans un repère en mouvement relativement à un autre repère : une paire d'événements, simultanés dans un système de référence, ne le sont plus dans le second (en mouvement) [Fig. 1.4].

La figure 1.4 (a) montre que les événements A et B sont simultanés pour M. Sur la figure 1.4 (b), on a indiqué les trajectoires des points A et B, respectivement; un observateur en mouvement par



(c)

Figure 1.4 : Relativité de la simultanéité *(considérée ici dans l'espace–temps newtonien). La figure (a) illustre la simultanéité d'événements distants A et B : un observateur K, au repos par rapport à la règle, considérera comme simultanés uniquement les points dont lui parviennent, au même instant, les rayons lumineux issus des extrémités (trajectoires d'espace–temps représentées par des lignes verticales continues). La figure (b) indique quels sont les événements simultanés pour l'observateur K' (trajectoire d'espace–temps oblique sur la figure) en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à K, compte tenu de la définition illustrée en (a). Enfin, la figure (c) constitue la superposition des cas (a) et (b) et montre clairement que des événements simultanés pour M (tels A et B) ne le sont plus pour M' (tels A et B').*

rapport à K décrit la trajectoire désignée par K'. En M' lui parviennent les signaux lumineux de deux points A et B qui ne sont manifestement pas simultanés dans K. La figure 1.4 (c) montre les deux situations à la fois : deux événements simultanés pour M, dans K, (c'est–à–dire A et B), apparaissent comme non simultanés dans K', et réciproquement.

Venons–en maintenant à la mesure des distances. Pour mesurer une longueur, il suffit de déplacer un certain nombre de fois une règle rigide : le processus de mesure prend alors un certain temps [Fig. 1.5] que l'on peut, dans le cadre classique, réduire arbitrairement. Cependant, lorsque l'objet à mesurer est en mouvement, par rapport à un système de référence K, ce procédé n'est pas simple à mettre en pratique. Mais, détail beaucoup plus important, il est nécessaire de mesurer les distances spatiales d'événements physiquement simultanés. Or la simultanéité physique étant une notion essentiellement relative, il en sera de même de la mesure des distances [Fig. 1.6].

Les absolus de Newton et la notion d'éther

L'espace et le temps classiques, dont nous avons indiqué plus haut les principales propriétés, ne font apparaître nulle part de notion d'éther [5] et sont *relatifs* à des paires d'événements : le mouvement d'un système mécanique ne peut être repéré que par référence à un autre système matériel. Et, en réalité, ce point de vue "relatif" – dû à Ernst Mach – correspond très exactement aux processus de mesures et d'observations qui, effectivement, conduisent à nos concepts modernes d'espace et de temps.

5. La notion d'éther date du XIX^{e} siècle et est due, semble–t–il, à J.C. Maxwell.

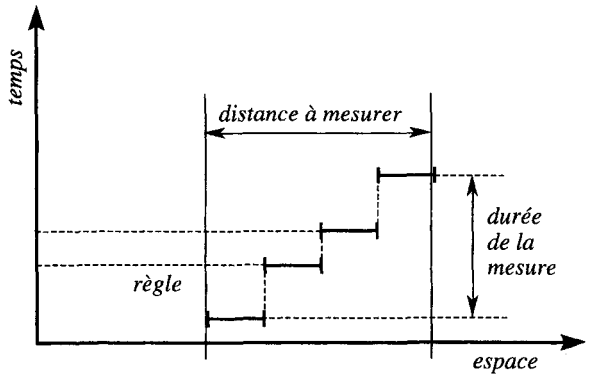


Figure 1.5 : Mesure d'une distance à l'aide d'une règle rigide. *Chaque déplacement de la règle (rigide) le long de l'objet à mesurer prend* a priori *un certain temps pour être réalisé. Toutefois, en physique prérelativiste, la durée de chaque mesure peut – du moins en principe – être réduite arbitrairement.*

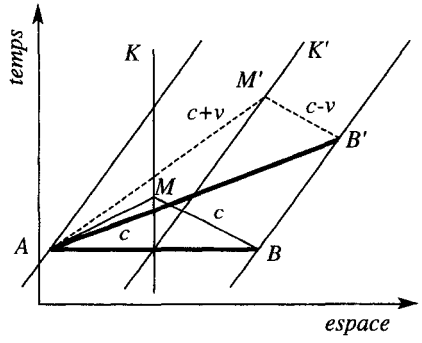


Figure 1.6 : Relativité des mesures des distances. *Dans son système propre, l'observateur K' mesurera la distance $A'B'$; par contre, l'observateur K mesurera $AB \neq A'B'$.*

Newton, par contre, a un point de vue fort différent dans lequel l'espace et le temps sont *absolus*, existent donc par eux–mêmes indépendamment des objets matériels qu'ils contiennent. Il distingue ainsi des mouvements relatifs – ceux que, précisément, on observe – et des mouvements absolus, qui s'effectuent relativement à l'espace absolu et à une échelle de temps absolue. Pour lui, l'espace relatif (de même que le temps relatif) n'est qu'une mesure de l'espace absolu (du temps absolu). Voici ce qu'en dit Newton :

> . . . *"L'espace absolu, sans relation aux choses extérieures, demeure toujours similaire et immobile. L'espace relatif est cette mesure, cette dimension mobile, des espaces absolus : que nos sens déterminent par sa position aux corps; et qui est communément prise pour l'espace immobile"*. . .
> . . . *"Le temps absolu, vrai et mathématique, sans relation à rien d'extérieur, coule uniformément et s'appelle durée"*. . .
> . . . *"Un mouvement absolu est le déplacement d'un corps d'un lieu absolu à un autre lieu absolu; et le mouvement relatif [concerne] le déplacement d'un lieu relatif à un autre"*. . . [cité par M. Jammer (1954); reproduit avec l'aimable autorisation de l'éditeur].

L'existence d'un temps et d'un espace absolus, même indécelable par des moyens mécaniques, est en fait une nécessité à la fois d'ordre logique et aussi d'ordre ontologique pour la validité du principe d'inertie, du moins pour Newton. Si, en effet, l'état de repos présuppose l'existence d'un espace absolu, l'exigence qu'un système d'inertie ne soit pas une pure fiction mais puisse être conçu, fût–ce à titre de concept, et utilisé réellement implique nécessairement le temps et l'espace absolus.

Nous verrons un peu plus loin que tous les systèmes d'inertie se déduisent les uns des autres à l'aide des transformations de Galilée. Pour Newton, un seul d'entre eux est réellement immobile, de manière absolue; mais comment le distinguer des autres? *"Que le Centre du Monde soit immobile; cela est reconnu par tous, tandis que certains prétendent que la Terre, et d'autres, le Soleil, est fixe en ce centre."* En fait, Newton place ce "Centre du Monde" au centre de gravité du système solaire [6], ce qui est en dehors de toute vérification, quelle qu'elle soit.

Par la suite, de nombreux philosophes (Leibniz, Huyghens, etc.) s'opposèrent aux absolus de Newton car, comme il le reconnaissait lui–même, l'espace et le temps absolus *"ne tombent effectivement jamais sous l'observation de nos sens"*. Néanmoins, pour des raisons d'ordre théologique [7] [*"Newton identifie espace et temps avec des attributs divins, Dieu n'est pas éternité et infinité, mais est éternel et infini. Eternel et omniprésent, Dieu constitue durée et espace"* {Max Jammer (1954)}], et malgré les objections de Leibniz et Huyghens, les absolus de Newton furent salués comme un accomplissement remarquable de la "philosophie naturelle", c'est-à-dire de la science.

Cependant, le développement de la mécanique au XVIII[e] siècle (Lagrange, Laplace, Poisson) montrait que les absolus de Newton ne jouaient qu'un rôle très faible, pour ne pas dire inexistant, dans la description et la prévision de phénomènes naturels. Il devint ainsi progressivement clair que, dans la pratique, l'on pouvait s'en dispenser. Voici ce qu'en dit J.C. Maxwell, par exemple :

> *" L'espace absolu est conçu comme restant toujours semblable à lui–même et immobile. L'arrangement des parties de l'espace ne peut pas plus être altéré que l'ordre de portions de temps. Les concevoir comme se mouvant de leurs lieux revient à concevoir le mouvement d'un endroit lui–même. Mais de la même façon que rien ne distingue une portion de temps d'une autre excepté les différents événements qui s'y déroulent, il n'y a rien qui distingue une partie de l'espace d'une autre sauf sa relation avec le lieu d'un corps matériel. Nous ne pouvons pas décrire le temps d'un événement sauf par référence à quelque autre événement, ou le lieu d'un corps sauf par référence à un autre corps. Toute notre connaissance, à la fois du temps et de l'espace, est essentiellement relative"* [cité par M. Jammer (1954)].

A la fin du XIX[e] siècle, il devint tout à fait clair que la notion d'espace absolu échappait complètement à toute possibilité d'observation [voir, plus loin, le principe de relativité galiléen]; notamment l'idée que l'espace absolu agit par lui–même mais ne peut subir d'action qui le modifie (E. Mach).

---

6. Quoique Halley ait annoncé en 1718 que certaines étoiles considérées jusqu'alors comme fixes (Sirius, Aldébaran, Bételgeuse) avaient changé de position depuis Ptolémée, Newton ne tient pas compte du mouvement possible du système solaire (imaginé auparavant par Giordano Bruno) qui le rend inapte au rôle de "centre du monde". . .

7. La preuve dite ontologique de l'existence de Dieu et les autres preuves traditionnelles commençaient à être considérées comme logiquement déficientes.

A ce stade, il ne restait qu'une possibilité réelle de mise en évidence d'un espace absolu, d'un *éther*. En effet, avec les découvertes (i) du caractère *fini* de la vitesse de la lumière et (ii) de sa nature ondulatoire, il semblait certain qu'un milieu matériel, *l'éther*, dernier avatar de l'espace absolu, était indispensable en tant que support à la propagation des ondes électromagnétiques. Mais, nous le verrons plus loin, même cette possibilité sera exclue par l'expérience, celle de Michelson et bien d'autres encore.

Le principe d'inertie

Dans de nombreux ouvrages de mécanique, on commence par énoncer les trois lois de Newton [8] et, en premier lieu, le principe d'inertie [9] sous la forme *"un corps qui n'est soumis à aucune force est soit au repos, soit en mouvement rectiligne et uniforme"*, ou sous une forme semblable. Il s'ensuit que ce principe d'inertie paraît bien être la conséquence immédiate de la seconde loi de Newton, lorsqu'on y a annulé la force! En fait, le principe d'inertie possède un contenu nettement moins trivial, indépendant de la loi fondamentale de la dynamique, que nous allons considérer maintenant.

Loin de constater une banalité ou même une pétition de principe, le principe d'inertie affirme, en réalité, *l'existence de mouvements privilégiés*, les mouvements "libres" ou *mouvements inertiels*. Ces mouvements correspondent alors à *toutes* les trajectoires rectilignes possibles dans $\mathbf{R}^3$, parcourues uniformément dans le temps. Il n'est peut–être pas inutile de souligner l'apport révolutionnaire de ce principe : alors que pour les penseurs médiévaux (Buridan, par exemple, au XIV^{e} siècle) et leurs successeurs, le mouvement inertiel est le résultat d'une qualité intrinsèque du mobile, tout au contraire, pour Newton (et pour ses prédécesseurs qui ont peu à peu découvert le principe d'inertie [10]) [M.A. Tonnelat (1971) ou M. Jammer (1961)], ce type de mouvement est, d'une part, équivalent à l'état de repos, et d'autre part, n'est engendré ou arrêté par une action extérieure qu'en son début ou en sa fin, respectivement.

Dans le cadre de l'espace–temps classique, le principe d'inertie se traduit par le fait que la structure affine discutée auparavant représente effectivement une réalité

---

8. C'est–à–dire : (i) le principe d'inertie; (ii) la loi fondamentale de la dynamique et (iii) l'égalité de l'action et de la réaction.

9. La formulation de Newton est la suivante : *"Tout corps persiste dans son état de repos ou de mouvement rectiligne et uniforme à moins qu'il ne soit amené à changer cet état par des forces qui lui soient imposées."*

10. La définition que nous donnons ici est de nature cinématique. Il est également possible de donner une définition de caractère dynamique du principe d'inertie; cependant, elle présente l'inconvénient de rendre beaucoup plus délicate la discussion des concepts liés à l'espace–temps classique, car celui–ci contient alors un élément dynamique qui n'a pas véritablement de justification très évidente dans le cadre newtonien. Ainsi, on peut définir un repère galiléen comme un repère dans lequel la loi fondamentale de la dynamique s'écrit sous la forme habituelle $F=m\gamma$.

physique : les droites du genre temps – donc non contenues dans des 3–plans spatiaux $t = \text{const.}$ – correspondent à des mouvements physiquement réalisables, ou plutôt concevables comme limites ou comme idéalisations de mouvements réels, les mouvements de particules "libres". Bien entendu, la notion de mouvement "libre" est une abstraction qui reflète cependant, dans des limites qui dépendent de l'échelle des systèmes considérés, une certaine réalité.

Cette classe de mouvements privilégiés est donc définie intrinsèquement dans l'espace–temps : ce sont les droites du genre temps, donc des *objets géométriques* de $\mathbf{R}^{3+1}$, *indépendants de tout système de coordonnées*, indépendants aussi de la nature des "horloges" utilisées pour mesurer le temps et des "règles" qui permettent la détermination des distances. C'est seulement l'introduction de l'espace–temps classique qui permet la caractérisation géométrique, intrinsèque donc, des mouvements inertiels. Inversement, c'est l'existence de cette classe de mouvements, ou tout au moins la reconnaissance de leur importance, qui fonde assez largement le concept d'espace–temps.

Pratiquement, l'existence des mouvements inertiels se traduit par celle de *systèmes de référence inertiels*, ou encore *systèmes de référence galiléens*, c'est–à–dire la donnée d'échelles de temps où celui–ci s'écoule uniformément *et* de coordonnées cartésiennes dans $\mathbf{R}^3$ (également d'ailleurs dans $\mathbf{R}^{3+1}$, où les mouvements "libres" s'effectuent en lignes droites; de plus, à ces coordonnées cartésiennes, on peut toujours associer un système *physique* en mouvement "libre").

Il est clair qu'un événement quelconque de l'espace–temps classique $\mathbf{R}^{3+1}$ peut être repéré à l'aide de systèmes de coordonnées arbitraires. Toutefois, la possibilité de le faire à l'aide de coordonnées cartésiennes d'une part, et le fait que ces coordonnées aient un sens physique (mouvements "libres" convenables, associés), constituent un postulat, précisément le principe d'inertie.

Les mouvements inertiels déterminent donc des systèmes de coordonnées *canoniques* dans $\mathbf{R}^{3+1}$ et, en tout point, existe une classe de repères (c'est–à–dire de vecteurs indépendants) déterminés par la classe de coordonnées galiléennes considérées : ce sont les *repères d'inertie* ou *repères galiléens*. Ces repères serviront de bases pour déterminer analytiquement les champs de vecteurs utilisés, les vitesses, les accélérations, les forces, etc.

Etant données des coordonnées galiléennes [11] $(\mathbf{x}, t)$, il est facile de se rendre compte que l'on peut en déduire une infinité d'autres à l'aide des relations

$$\begin{cases} \mathbf{x}' &= \mathcal{R}\mathbf{x} - \mathbf{v}t + \mathbf{x}_0 \\ t' &= t + t_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

où $\mathcal{R}$ est une rotation arbitraire, $\mathbf{v}$ une vitesse arbitraire également, $\mathbf{x}_0$ un vecteur de $\mathbf{R}^3$ quelconque et t_0 une durée quelconque. Ces transformations, les *transformations de Galilée*, étant linéaires vont transformer une droite de $\mathbf{R}^{3+1}$ en une

11. En fait, ce qui suit concerne plutôt le cas de repères galiléens. Cependant, comme nous utiliserons des coordonnées cartésiennes $(\mathbf{x}, t)$, nous parlerons indifféremment de repères ou de coordonnées galiléennes (ou repères inertiels), ce qui, à proprement parler, constitue un abus de langage courant.

droite de $\mathbf{R}^{3+1}$: un mouvement inertiel est transformé en un mouvement inertiel. Elles entérinent le fait que l'espace est isotrope : si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ et $t_0 = 0$, la rotation d'une droite de $\mathbf{R}^3$ fournit une autre droite! Il en est de même pour l'homogénéité spatiale. Ces transformations forment un groupe continu à dix paramètres (trois pour les rotations, trois pour les translations spatiales, trois pour les transformations de Galilée *pures* – ou restreintes –

$$\begin{cases} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} - \mathbf{v}t \\ t' &= t\,, \end{cases} \tag{1.3}$$

et une enfin concernant les translations de l'origine du temps) dont les propriétés se traduisent aisément dans le domaine physique.

A ces transformations, on peut adjoindre les changements d'unités

$$\mathbf{x}' = \alpha\mathbf{x},\ t' = \beta t, \tag{1.4}$$

ainsi que les *retournements d'axes (parité)* et le *renversement du temps*

$$\begin{cases} \mathbf{x}' &= -\mathbf{x},\ t' = t \\ \mathbf{x}' &= \mathbf{x},\ t' = -t \end{cases} \tag{1.5}$$

qui ne modifient pas non plus le caractère inertiel du mouvement libre.

A ce stade une question légitime se pose : existe-t-il dans la Nature des systèmes véritablement inertiels? A l'échelle du laboratoire, les mouvements "libres" horizontaux constituent à peu près des mouvements inertiels, si l'on néglige les frottements, par exemple. Un meilleur système inertiel que celui du laboratoire est lié au mouvement de translation de la Terre sur son orbite autour du Soleil. Mais là encore, il s'agit d'une approximation valable uniquement pour des échelles de temps courtes : si la valeur absolue de la vitesse moyenne de la Terre sur son orbite solaire est de 29 km/s, elle varie cependant un peu (de l'ordre de quelques km/s) de sorte que la Terre ne constitue pas un véritable système d'inertie. A son tour, un repère lié au centre de gravité du système solaire (donc, en pratique, au Soleil) peut constituer une bonne approximation d'un repère galiléen.

Incidemment, l'adoption d'un système de coordonnées géocentrique (système de Ptolémée) ou héliocentrique (système de Copernic) est indifférent du point de vue mathématique. Néanmoins, un système héliocentrique rend les calculs analytiques du mouvement des planètes beaucoup plus simples. En outre, le système de Copernic constitue, physiquement, un meilleur système d'inertie. Cependant, la mauvaise querelle [E. Namer (1975)] cherchée aux coperniciens (dont Galilée est l'exemple le plus connu) trouve ses origines lointaines dans les conceptions cosmiques de Platon [A. Koestler (1960)] et est de nature philosophico-religieuse : il n'y a pas eu de querelle sur le choix d'un système d'inertie!

Mais le Soleil – dont la vitesse est de l'ordre de 220 km/s par rapport aux étoiles fixes – participe de la rotation générale de notre galaxie, la Voie lactée (une galaxie spirale typique), et se trouve, en outre, soumis à l'attraction gravitationnelle des autres étoiles qui la constitue : ce n'est donc pas véritablement un système d'inertie. De même, notre galaxie ne constitue pas, elle non plus, un système inertiel : elle

est située dans un amas local, constitué d'une vingtaine d'autres galaxies à l'action desquelles elle est soumise; aussi son mouvement ne saurait–il être (et il n'est) ni rectiligne, ni uniforme. Toutefois, cette hiérarchie de systèmes de plus en plus proches d'un système inertiel ne s'arrête pas là; l'amas local fait partie de l'amas de galaxies de la Vierge en mouvement lui–même dans le superamas de la Vierge ...

On pourrait donc concevoir que la considération d'objets de plus en plus lointains, dont on ne puisse observer les mouvements propres, permettrait d'obtenir une *approximation* de plus en plus valable d'un système inertiel, concept théorique et, partant, *idéal.* Ainsi, on pourrait considérer qu'un "bon" repère inertiel puisse être constitué par le système solaire et trois quasars, objets relativement ponctuels (vus de la Terre) qui sont les plus lointains que l'on connaisse actuellement.

Il doit rester clair qu'il ne peut exister dans la Nature de véritable système d'inertie; encore une fois, il s'agit d'un concept théorique dont la principale vertu réside dans la possibilité qu'il permet d'aller au–delà des aspects purement cinématiques, de la simple description de systèmes physiques; c'est–à–dire d'en étudier la dynamique. C'est d'ailleurs précisément parce qu'il n'y a, et ne saurait y avoir, de système véritablement isolé, que le concept de système d'inertie a été si difficile et si long à se dégager d'idées *a priori.* Ajoutons encore que la présentation cinématique – c'est–à–dire en termes d'espace et de temps du principe d'inertie donnée plus haut est évidemment une simplification car ce principe ne peut acquérir tout son sens que dans un contexte dynamique, où les notions de force, de masse, etc, sont élaborées.

Une dernière remarque de nature théorique. Il pourrait s'avérer intéressant de se donner, mathématiquement, un espace–temps, c'est–à–dire une variété assez largement arbitraire, et un groupe d'invariance qui, y opérant transitivement, définirait alors une classe de mouvements, inertiels par définition (ainsi, $\mathbf{R}^{3+1}$ et le groupe de Galilée). Bien qu'une telle idée suggère des généralisations, possibles sur le plan mathématique ou théorique, elle ne correspond pas à la démarche effectuée historiquement.

Les lois de la dynamique et la relativité galiléenne

Une fois définis les repères galiléens (ou les systèmes de référence galiléens, les coordonnées galiléennes) d'abord physiquement, puis conceptuellement et enfin mathématiquement, il est possible d'étudier non seulement les propriétés du mouvement de chaque système mécanique (cinématique) mais encore d'écrire des *lois dynamiques* [12], valables dans ces repères inertiels.

12. C'est–à–dire de lois générales qui permettent d'aller au–delà de la seule description cinématique, en "résumant" des classes de mouvements ayant une même cause.

Il sera donc possible, dans un tel repère, d'écrire la loi fondamentale de la dynamique (seconde loi de Newton) sous la forme

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \tag{1.6}$$

où $\mathbf{F}$ est la force appliquée à une particule de masse m située en $\mathbf{x}$ au temps t.

En fait, Newton n'a pas écrit sa seconde loi sous la forme précédente mais plutôt sous une forme qui, en notations modernes, s'écrirait

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\, dt &= d\mathbf{p} \\ \mathbf{p} &= m\mathbf{v}\,, \end{aligned}$$

où $\mathbf{p}$ est l'impulsion de la particule. Cette dernière forme, qui provient, entre autres, de l'analyse faite auparavant par Huyghens, Marci, Wallis, Wren du choc des particules (où l'on a conservation de l'impulsion totale au cours du choc) subsistera en Relativité Restreinte, et non pas la précédente, avec toutefois cette différence que la relation entre impulsion et vitesse sera modifiée.

La loi fondamentale de la dynamique newtonienne constitue un *postulat* qui nécessite, répétons–le, la loi d'inertie avant de pouvoir être formulé analytiquement. Elle recouvre une grande richesse de concepts qui ont exigé beaucoup d'efforts, de temps, de discussions pour émerger, et n'est en aucune façon triviale même si sa formulation mathématique est très simple [13]. Aussi un rapide commentaire n'est–il pas totalement inutile.

D'abord, cette loi relie deux concepts de natures différentes; l'une est cinématique (l'accélération γ) et l'autre dynamique (la force $\mathbf{F}$). Cela constitue *déjà* une révolution car, jusqu'à Newton et depuis Aristote, la force était génératrice de vitesse et non pas d'accélération.

Si l'on essayait d'écrire une loi dynamique correspondant aux conceptions mécaniques prénewtoniennes, i.e. scolastiques, on écrirait à peu près une équation du genre

$$\mathbf{F} \propto \mathbf{v}$$

Ceci n'était pas spécialement absurde : Aristote, observant des pêcheurs traînant une barque pouvait en inférer une loi de ce type, la force de frottement étant naturellement proportionnelle à la vitesse (à vitesse faible!). Ce genre de concepts devait empêcher – avec aussi l'absence de techniques mathématiques suffisamment élaborées – Kepler de parvenir à la loi de la gravitation universelle (voir plus loin), bien qu'il eût en main tous les éléments nécessaires pour y arriver (les trois lois qui portent son nom).

Dans l'équation de la dynamique, la *masse d'inertie* m apparaît comme le coefficient de la réponse (l'accélération) à une excitation extérieure (la force). Elle caractérise bien la *résistance au mouvement* de la particule, une propriété intrinsèque, caractéristique de son *contenu de matière* : plus un corps est massif et plus il est nécessaire de déployer une force importante pour l'amener à se mouvoir à une vitesse donnée. Là encore le concept d'inertie a mis beaucoup de temps (plusieurs siècles) avant de pouvoir être dégagé [Max Jammer (1961)] : des premières analyses de Buridan (XIV^e siècle) au concept *qualitatif* d'inertie de Kepler,

13. Encore fallait–il avoir inventé le calcul infinitésimal : Leibniz, Newton, . . .

aux expériences mentionnées sur les chocs de particules et à celles d'Huyghens sur la force centrifuge, le chemin a été long jusqu'à la systématisation et l'élaboration extraordinairement complexes de Newton.

La proportionnalité entre force et accélération d'une particule pourrait être différente de la forme usuelle $\mathbf{F} = m\boldsymbol{\gamma}$. Plus spécifiquement, on pourrait écrire, en se limitant à une relation linéaire,

$$F^i = \sum_j m^i{}_j \gamma^j \ (i,j = 1,2,3). \tag{1.7}$$

Toutefois, le tenseur $m^i{}_j$, s'il n'était pas proportionnel à $\delta^i{}_j$, briserait l'invariance par rotation de l'espace : les deux ou trois vecteurs propres de $m^i{}_j$ introduiraient des directions privilégiées dans l'espace physique et celui-ci ne serait donc plus isotrope. Il n'en reste pas moins que l'existence éventuelle d'un tenseur de masse $m^i{}_j \neq m\,\delta^i{}_j$ ($\delta^i{}_j$ est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $i = j$ et 0 autrement) doit être tranchée par l'expérience. Ceci a été fait [Chap. 3] et le résultat est que $m^i{}_j = m\delta^i{}_j$ et ce, à une très bonne approximation : c'est l'expérience de V.W. Hughes et al. (1960), R.W.P. Drever (1961); voir aussi R.H. Dicke (1965). En raison de son importance théorique – qui va bien au–delà de l'anisotropie de la masse [C.M. Will (1981)] – indiquons brièvement sur quoi est basée cette expérience en citant S. Weinberg (1972) : Hughes *et al.* et Drever, indépendamment, "*ont observé l'absorption résonante de photons par un noyau de Li^7 dans un champ magnétique de 4700 Gauss. L'état fondamental a un spin 3/2 de sorte que, dans un champ magnétique, il se décompose en quatre niveaux d'énergie qui devraient être également espacés si les lois de la physique nucléaire possèdent une invariance de rotation. Dans ce cas les trois transitions entre états voisins devraient avoir la même énergie et le coefficient d'absorption des photons présenterait un pic aigu unique à cette énergie. Par contre, si l'inertie était anisotrope, alors les sous–états magnétiques ne seraient pas également espacés et il n'y aurait, non pas une seule, mais trois raies de résonances, proches*" (reproduit avec l'aimable autorisation de John Wiley and Sons, Inc., copyright © 1972). Tel est le principe de cette expérience, répétée ensuite de nombreuses fois avec des matériaux différents. Le résultat de Hughes et Drever était $\Delta m/m \lesssim 10^{-20}$ et a été beaucoup amélioré par la suite. Ce résultat peut être interprété de diverses manières [C.M. Will (1981); R.H. Dicke (1965)] et, en particulier, comme un test de haute précision de l'invariance de Lorentz locale.

Enfin la notion de force elle–même appelle quelques remarques.

D'abord, si l'on souhaite que seules les positions et les vitesses initiales de la particule en déterminent complètement le mouvement, il est nécessaire que $\mathbf{F}$ dépende seulement de $\mathbf{x}$ (la position de la particule au temps t), de $\mathbf{v}$ (sa vitesse au temps t) et, à la rigueur, du temps. On obtiendra alors un système différentiel du second ordre. Si $\mathbf{F}$ dépendait, par exemple, de $\gamma \equiv (d/dt)v$, il faudrait connaître également l'accélération initiale.

Ensuite $\mathbf{F}$ est un vecteur de $\mathbf{R}^3$, ce qui semble clair puisque l'on exige sa proportionnalité à $m\gamma$. Cependant, même cette propriété n'est pas évidente : il fallait, préalablement à l'écriture de la loi de la dynamique classique, avoir reconnu et testé expérimentalement ce caractère vectoriel. Nous reviendrons plus loin sur d'autres caractères importants de la force newtonienne, notamment en relation avec le principe de relativité galiléen et la gravitation.

Venons–en maintenant au *principe de relativité galiléen*. Considérons, pour cela, un système mécanique constitué de N particules ponctuelles de masses m_i $(i = 1,2,\ldots,N)$ en interactions mutuelles par l'intermédiaire de forces à