



EQUAÇÕES DE KEPLER

UMA DEDUÇÃO CINEMÁTICA

Raul Nunes

Esta obra está registrada na
Fundação Biblioteca Nacional sob
Número 518.956 - Livro 984 - Folha 386

A foto de capa de Johannes Kepler, circa de 1620, foi copiada de
http://www.einstein-website.de/biographies/kepler_content.html

EQUAÇÕES DE KEPLER

UMA DEDUÇÃO CINEMÁTICA

Raul Nunes

raulnunes@ymail.com

raulnunes@gmail.com

Caixa Postal 45350 - São Paulo - SP - Brasil - CEP 04010-970

PREFÁCIO

Prezado Leitor:

Descobri recentemente uma solução unificada para tres grandes enigmas da Física atual que denominei "GDC TRILOGY : Gravity + Duality + Clarity", a qual explica simultaneamente a natureza da gravidade, elucida a dualidade onda-partícula, e desmistifica os conceitos de matéria e energia escuras. Os fundamentos matemáticos dessa solução estão incluídos aqui nesta Dedução Cinemática das Equações de Kepler (cinemática pois usa apenas os conceitos básicos de comprimento e tempo, sem apelar para conceitos dinâmicos da Mecânica Newtoniana tais como *massa* e *força*).

Embora conhecimentos matemáticos de primeiros anos de cursos universitários sejam pré-requisitos para uma completa compreensão da demonstração, a essência da solução é bastante simples, compreensível e, acima de tudo, bastante plausível (pois nela nenhum princípio físico é assumido A PRIORI e toda argumentação usa identidades matemáticas como pontos de partida). Introduzindo unicamente a definição matemática de **MACCEL** (um atributo intrínseco de todo vetor posição), fica provado que qualquer corpo material (quer seja tão pequeno como um fóton ou tão grande como um planeta), ao se mover livremente (isto é, sem ter interações *por contato* com outros corpos), não tem qualquer outra alternativa senão descrever um movimento Kepleriano (ou seja, uma seção cônica, mesmo que degenerada), o qual tem sido tradicionalmente identificado como sendo um fenômeno gravitacional (tais como os movimentos elípticos dos planetas).

Estou a redigir um outro livro em que essa maravilhosa solução será detalhadamente apresentada ao mesmo tempo que estou procurando encontrar pessoas interessadas em compartilhar comigo os frutos desta oportunidade histórica de desenvolvê-la e divulgá-la internacionalmente, tanto para a comunidade científica em particular como para o público em geral, através de todos os meios de comunicação (principalmente Internet). Acredito que deve existir uma multidão incalculável de gente desejosa de participar ativamente, seja por amor à Ciência, pelo potencial de sucesso pessoal, ou somente por querer deixar para a posteridade o seu nome vinculado a este acontecimento singular e memorável.

São Paulo, 24 de Agosto de 2012.

Eng Raul Nunes
raulnunes@ymail.com
raulnunes@gmail.com

Sumário: As equações de Kepler são consideradas como centrais na Mecânica Celeste porque suas soluções permitem *'encontrar a posição de um corpo para um tempo dado'*. Para obter a dedução cinemática dessas equações, apenas um novo conceito é introduzido com o nome de 'macel'. Assumindo a simultânea conservação do 'macel' e do momento angular, é mostrado que o vetor posição descreve sempre uma seção cônica. Então, a prova inclui os tres tipos de equações de Kepler para trajetórias elípticas, parabólicas e hiperbólicas. As inovações teóricas aqui introduzidas interessam a matemáticos, físicos, astrônomos, astronautas, cosmologistas, historiadores, filósofos e qualquer pessoa minimamente interessada no desenvolvimento e aperfeiçoamento da Ciência.

Palavras chaves: mecânica celeste, inércia, maccel, macel, momento angular, seções cônicas, elipse, parábola, hipérbole, fundações da ciência, história da ciência, matemática, física, astronomia, astronáutica, astrofísica, cosmologia, filosofia, Kepler, Galileo, Newton, Einstein, Lagrange, identidade de Lagrange.

Classificação: 53A17, 70B05, 70F15, 70M20.

Dedicatória: A Hideki Ishitani, colega do autor na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, SP, Brasil, onde ambos se graduaram como engenheiros civis.

Agradecimentos: Ao Dr. Thomas E. Phipps Jr. por sua estimulante correspondência, aos editores do WHO'S WHO IN THE WORLD por seu encorajador reconhecimento, às equipes do THE MATHEMATICS PREPRINT SERVER, do CITESEER da Pennsylvania State University e do ARXIV.ORG, por seus inestimáveis suportes internéticos.

Solicitação: O autor faz uma solicitação genérica dirigida a quem seja capaz de contribuir com alguma assistência significativa para melhorar, suportar ou disseminar (*i.e.*, fazer acontecer) as suas pesquisas. Que possamos viver em um mundo cheio de pessoas mais sábias, saudáveis e prósperas (*i.e.*, mais felizes).

Conteúdo

1. Prólogo	1
2. Construtos Iniciais	2
2.1. Vetores Cinemáticos	2
2.2. Combinação dos Vetores Cinemáticos	3
2.3. Identidade de Lagrange	4
2.4. Definição de macel	5
3. Resolvendo $t=t(r)$	7
3.1. A Identidade Fundamental	7
3.2. O Princípio de Inércia	8
3.3. Resolvendo (14) com M e J constantes	9
4. Resolvendo (19)	11
4.1. A equação das cônicas	11
4.2. As equações do ângulo	13
4.3. Resolvendo as equações de Kepler	16
5. Epílogo	18
Apêndices	20
A - Resolvendo a equação (16)	20
B - Resolvendo a equação (21)	23
C - Bibliografia	27
D - Biografia do Autor	31

1. PRÓLOGO

*Se voce quer aprender sobre a natureza, apreciar a natureza,
é necessário que voce entenda a linguagem que ela fala. R. P. Feynman*

Um problema básico na Mecânica Celeste é 'encontrar a posição de um corpo para um tempo dado'. As conhecidas **equações de Kepler** tem sido tradicionalmente usadas para resolvê-lo como um problema *dinâmico* (isto é, usando os conceitos de massa e força), de uma maneira relativamente satisfatória. Atualmente, porém, esse paradigma científico está precisando ser modificado para ficar compatível com as recentes descobertas astronômicas (por exemplo, as curvas de rotação de galáxias). Pesquisando sobre isso, o autor encontrou uma modificação conceitual realmente simples que parece preencher essas novas demandas. Ela consiste na introdução de *apenas um* conceito cinemático que ele chamou 'macel'. Ele pode ser qualificado como *cinemático* porque pode ser definido somente como função dos conceitos de comprimento e tempo. De fato, ele é uma quantidade escalar tendo as dimensões físicas de $\text{comprimento}^3/\text{tempo}^2$ (comprimento ao cubo dividido por tempo ao quadrado), as mesmas da conhecida *constante harmônica kepleriana* que existe entre os comprimentos e os períodos das trajetórias de planetas e satélites do nosso sistema solar.

Problema
Básico

Como foi enfatizado por Richard P. Feynmann [26]: “*É surpreendente que as pessoas não acreditem que existe imaginação em ciência. É um tipo de imaginação muito interessante, diferente daquela de um artista. A grande dificuldade está em tentar imaginar alguma coisa que voce nunca viu, que seja consistente em cada detalhe com o que já tem sido visto, e que é diferente do que tem sido pensado; além disso, deve ser definido e não uma proposição vaga. Isso é certamente difícil.*” Dessa maneira, **macel** tem sido imaginado para ser um conceito bem definido que é consistente com todos os dados, tanto tradicionais como atuais. E mais: ele parece ser suficientemente poderoso para responder velhas questões (por exemplo, o que é gravidade?) e resolver novos enigmas (por exemplo, a natureza da chamada 'matéria escura'), desde que seja dada à teoria adaptada uma interpretação considerada plausível pelos cientistas. O escopo deste artigo, porém, é limitado a mostrar apenas uma dedução matemática inédita das **equações de Kepler**, baseada exclusivamente em conceitos cinemáticos. Muito das supra citadas consequências e do raciocínio aqui apresentados estão em outro artigo mais compreensivo [52].

O Novo
Conceito

A principal argumentação deste artigo é desenvolvida ao longo de 4 seções. A seção 2 relembra os construtos iniciais: a trinca de vetores cinemáticos $\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a}$ (a saber, vetores de posição, velocidade e aceleração), o produto escalar e o produto vetorial, as combinações dos vetores cinemáticos, as definições de norma e vetor unitário, a identidade de Lagrange, juntamente com a definição do macel M e a prova que $\mathbf{a} = (M/r^2)\hat{\mathbf{r}}$, sempre que $r \neq 0$ e o momento angular $\mathbf{J}$ é constante. A seção 3 mostra como encontrar o tempo t como uma função da norma r do vetor posição (isto é, $t = t(r)$) considerando a identidade fundamental $r^3\ddot{r} - Mr - J^2 = 0$ como uma equação diferencial não-linear de segunda ordem de $r(t)$, quando o macel M e a norma J tem valores constantes. A seção 4 mostra inicialmente como encontrar a norma do vetor posição $\mathbf{r}$ como uma função do ângulo θ implicitamente definido pela diferencial $d\theta \equiv (J/r^2)dt$ (isto é, $r = r(\theta)$). Depois, ela mostra as soluções de $\theta = \theta(t)$ que servem como 'pontes' para determinar o vetor posição $\mathbf{r}$ como uma função do tempo t (isto é, $\mathbf{r} = \mathbf{r}[r(\theta(t)), \theta(t)]$). Em outras palavras, nesta última seção, a dedução cinemática das equações de Kepler é concluída, assumindo a simultânea conservação do macel M e do momento angular $\mathbf{J}$. Suas soluções numéricas permitem, *no mínimo* aproximadamente, 'encontrar a posição de um corpo para um tempo dado'.

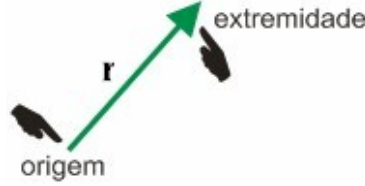
Estrutura
do Artigo

2. Construtos Iniciais

2.1. Vetores Cinemáticos

Notação

Seja t um parâmetro independente que representa a variável ‘tempo’ cujos valores variam dentro de um intervalo I que é um sub-conjunto dos números reais (*i.e.*, $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$). Seja f ou $f(t)$ uma função contínua genérica do parâmetro t . Seja a n -ésima derivada de f com relação a t ser indicada por $f^{(n)} = d^n f(t)/dt^n$, para todo inteiro $n \geq 0$, ou, numa forma mais simples (inventada pelo próprio Newton) por f , $\dot{f}$, $\ddot{f}$, e $\dddot{f}$ quando n é igual a 0, 1, 2, e 3, respectivamente (*i.e.*, $f = f^{(0)} = f(t)$, $\dot{f} = f^{(1)} = df(t)/dt$, $\ddot{f} = f^{(2)} = d^2 f(t)/dt^2$, e $\dddot{f} = f^{(3)} = d^3 f(t)/dt^3$). Seja $\mathcal{D}^n$ a classe de funções que são diferenciáveis com relação a t , *no mínimo* até a n -ésima ordem, ao longo do intervalo I (isto é, se $f \in \mathcal{D}^n$ então existem as funções f , $\dot{f}$, $\ddot{f}$, $\dots$, $f^{(n)}$). Assim $f \in \mathcal{D}^\infty$ significa que a função f é infinitamente diferenciável. O símbolo $\mathcal{D}$ está sendo aqui usado como um mnemônico para as palavras ‘diferenciável’ ou ‘derivável’. Como é habitual, as funções vetoriais são aqui tipograficamente representadas por meio de letras minúsculas em negrito e por flechas orientadas que tem uma origem e uma extremidade (ponta).



Seja $\mathbf{r}$ uma função vetorial do parâmetro t de classe $\mathcal{D}^\infty$, com uma imagem $\mathfrak{I}$ no espaço Euclidiano tridimensional (*i.e.*, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) : \mathfrak{I} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \forall t \in I \subset \mathbb{R}, \mathbf{r} \in \mathcal{D}^\infty$).

(0)

$\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$

Fixando a origem do vetor $\mathbf{r}$ à origem de um sistema de coordenadas de referência, sua ponta corresponde a um determinado ponto do espaço tridimensional; por isso ele é chamado VETOR POSIÇÃO. À medida que o parâmetro *tempo* t assume sequencialmente os valores do intervalo I , a extremidade livre do vetor posição $\mathbf{r}$ descreve, em geral, um arco de curva através do espaço. Para os propósitos deste artigo, sua primeira derivada $\dot{\mathbf{r}}$ é chamada VETOR VELOCIDADE e sua segunda derivada $\ddot{\mathbf{r}}$ é chamada VETOR ACELERAÇÃO. Daí o uso mnemônico das suas letras iniciais ‘v’ e ‘a’ para denotá-los (*i.e.*, $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$ e $\mathbf{a} \equiv \ddot{\mathbf{r}}$). Para o vetor posição, entretanto, em vez da inicial ‘p’, a letra ‘r’ é mais frequentemente usada como mnemônico do nome ‘raio’ em geral atribuído ao vetor posição (*i.e.*, $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t)$).

Normas

Agora, sejam os símbolos ‘ $\bullet$ ’ e ‘ $\times$ ’ usados para indicar os produtos escalar e vetorial, respectivamente. Usualmente eles são também chamados (em inglês) de ‘dot product’ e ‘cross product’, respectivamente. Da Análise Vetorial é também conhecido que a norma ao quadrado de qualquer vetor pode ser calculada como o produto escalar dele por si mesmo (por exemplo, $p^2 \equiv \mathbf{p} \bullet \mathbf{p}$). Assim se tem $r^2 \equiv \mathbf{r} \bullet \mathbf{r}$, $v^2 \equiv \mathbf{v} \bullet \mathbf{v}$ e $a^2 \equiv \mathbf{a} \bullet \mathbf{a}$. Usualmente, os escalares r , v e a são calculados, *por convenção*, como os valores não-negativos das raízes quadradas das normas ao quadrado dos vetores $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$, respectivamente (*i.e.*, $r \equiv \sqrt{\mathbf{r} \bullet \mathbf{r}}$, $v \equiv \sqrt{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}}$ e $a \equiv \sqrt{\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}}$).

Vale lembrar que é possível, para qualquer vetor $\mathbf{p}$, escrever $\mathbf{p} = p \hat{\mathbf{p}}$, onde o escalar p é o valor não-negativo da raiz quadrada da norma elevada ao quadrado do vetor $\mathbf{p}$ (i.e., $p = \sqrt{\mathbf{p} \bullet \mathbf{p}}$) e $\hat{\mathbf{p}}$ é um vetor unitário (i.e., $\hat{p} = \sqrt{\hat{\mathbf{p}} \bullet \hat{\mathbf{p}}} = 1$). Dessa maneira, a magnitude do vetor $\mathbf{p}$ é determinada por sua norma p enquanto o vetor unitário $\hat{\mathbf{p}}$ fornece sua completa orientação espacial (ou seja, $\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{r}}$, $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{v}}$, $\mathbf{a} = a \hat{\mathbf{a}}$).

2.2. Combinação dos Vetores Cinemáticos

Tres expressões úteis podem ser obtidas a partir das normas ao quadrado dos vetores $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$ quando se as deriva com relação a t :

$$\frac{d}{dt}(r^2) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \bullet \mathbf{r}) \Rightarrow r\dot{r} = \mathbf{r} \bullet \mathbf{v} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}) \Rightarrow v\dot{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{a} \quad (2)$$

e também

$$\frac{d}{dt}(r\dot{r}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \bullet \mathbf{v}) \Rightarrow \dot{r}^2 + r\ddot{r} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{r} \bullet \mathbf{a} \quad (3)$$

Para se evitar interpretações errôneas, deve-se ter em mente que, embora as expressões vetoriais: $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ e $\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}$ sejam sempre válidas, as desigualdades escalares: $\dot{r} \neq v$, $\ddot{r} \neq \dot{v}$, $\ddot{r} \neq a$ e $\dot{v} \neq a$ ocorrem na grande maioria dos casos considerados.

Os diagramas a seguir (em forma de escadas) da *Figura 1* mostram todas as possíveis combinações dos vetores $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$, quando são emparelhados por meio dos produtos escalar e vetorial.

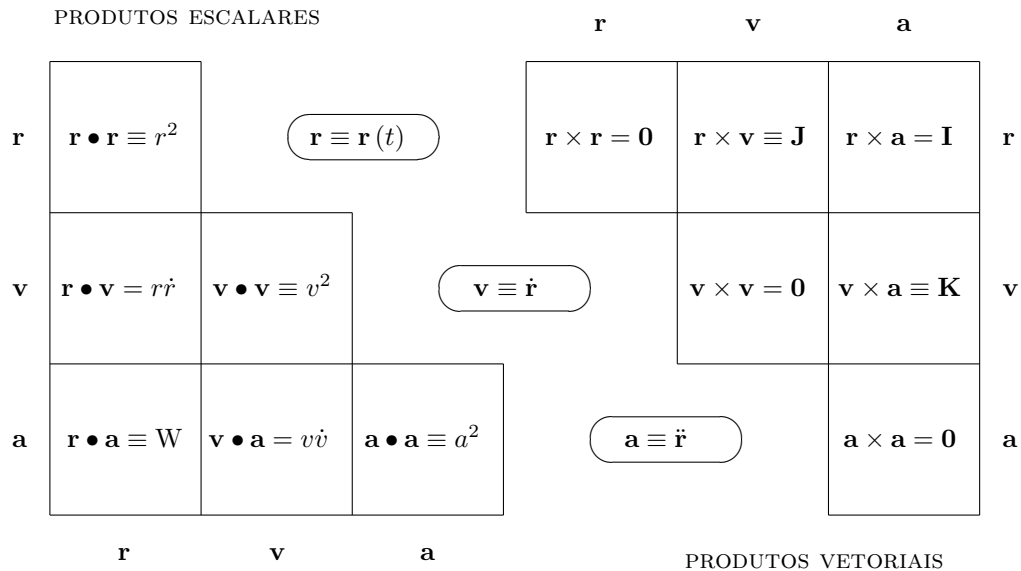


Figura 1: Combinações dos vetores $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, and $\mathbf{a}$.

Aqui 'W' é usado como uma abreviação da palavra inglesa 'Work' (que significa 'trabalho'), mas os outros tres símbolos consecutivos: $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ e $\mathbf{K}$, foram aqui arbitrariamente adotados. Como acima, as normas elevadas ao quadrado destes vetores são definidas como $I^2 \equiv \mathbf{I} \bullet \mathbf{I}$, $J^2 \equiv \mathbf{J} \bullet \mathbf{J}$ e $K^2 \equiv \mathbf{K} \bullet \mathbf{K}$. É importante salientar que o vetor $\mathbf{J} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ é chamado **angular momentum** e o vetor $\mathbf{I}$ é a sua primeira derivada com relação ao *tempo* t (desde que $\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{I}$).

2.3. Identidade de Lagrange

Provas

Do Cálculo Vetorial é conhecido que, para qualquer par de vetores $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$, é válido o seguinte par de expressões:

$$\boxed{\mathbf{p} \bullet \mathbf{q} = p \, q \cos \beta_{\mathbf{p},\mathbf{q}}} \quad \text{e} \quad \boxed{\mathbf{p} \times \mathbf{q} = p \, q \sin \beta_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \, \hat{\mathbf{o}}}, \quad (4)$$

onde $\beta_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$ é o ângulo existente entre os vetores $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ que é computável como $\cos \beta_{\mathbf{p},\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{p}} \bullet \hat{\mathbf{q}}$ e $\hat{\mathbf{o}}$ é um vetor unitário que é computável como $\hat{\mathbf{o}} = \hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{q}}$. Da Trigonometria sabe-se que $\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$ vale para qualquer ângulo β , então é fácil verificar que as expressões (4) justificam a chamada IDENTIDADE DE LAGRANGE:

$$\boxed{(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \bullet (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) = (\mathbf{p} \bullet \mathbf{p})(\mathbf{q} \bullet \mathbf{q}) - (\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})(\mathbf{p} \bullet \mathbf{q})}. \quad (5)$$

A fim de oferecer uma prova suplementar desta identidade, seja $\mathbf{r} = \mathbf{r}[r_1, r_2, r_3]$ outra notação para o vetor $\mathbf{r}$ em termos das tres coordenadas ortogonais $[r_1, r_2, r_3]$, que são funções reais do *tempo* t (*i.e.*, $r_i = r_i(t), \forall i \in \{1, 2, 3\}$). Além disso, seja $\langle \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}} \rangle$ uma trinca de vetores unitários que é a base vetorial de um sistema de coordenadas ortogonais tal que $\mathbf{r} = r_1 \hat{\mathbf{i}} + r_2 \hat{\mathbf{j}} + r_3 \hat{\mathbf{k}}$. Uma mesma unidade de comprimento arbitrária é também associada a estes vetores unitários. Desse modo, para vetores arbitrários $\mathbf{p} = [p_1, p_2, p_3]$ e $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]$, é conhecido do Cálculo Vetorial que

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \bullet \mathbf{q} &= (p_1 \hat{\mathbf{i}} + p_2 \hat{\mathbf{j}} + p_3 \hat{\mathbf{k}}) \bullet (q_1 \hat{\mathbf{i}} + q_2 \hat{\mathbf{j}} + q_3 \hat{\mathbf{k}}) = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 \\ \text{e} \quad \mathbf{p} \times \mathbf{q} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = (p_2 q_3 - p_3 q_2) \hat{\mathbf{i}} + (p_3 q_1 - p_1 q_3) \hat{\mathbf{j}} + (p_1 q_2 - p_2 q_1) \hat{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Portanto, a IDENTIDADE DE LAGRANGE acima pode ser reescrita como

$$(p_2 q_3 - p_3 q_2)^2 + (p_3 q_1 - p_1 q_3)^2 + (p_1 q_2 - p_2 q_1)^2 =$$

$$(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) - (p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3)^2,$$

cuja validade pode ser facilmente verificada por meio de operações elementares de Álgebra.

Aplicações

Como consequência, tres muito importantes expressões podem ser prontamente obtidas por meio da IDENTIDADE DE LAGRANGE como dada por (5):