

l'intégrale

TOUT-EN UN

MPSI|PTSI

Sous la direction de BERNARD **SALAMITO**

STÉPHANE **CARDINI**

DAMIEN **JURINE**

MARIE-NOËLLE **SANZ**

Physique tout-en-un

2^E ÉDITION

Avec la collaboration de :

ANNE-EMMANUELLE **BADEL**

FRANÇOIS **CLAUSSET**

DUNOD

Conception et création de couverture : Atelier 3+
Les photos du chapitre 5 ont été réalisées par Pierre Canaguier.

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2013, 2016
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-075514-1

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Avant propos

Cette nouvelle édition du *Tout-en-un de Physique, option MPSI/PTSI* a été entièrement revue et corrigée en tenant compte des avis des lecteurs. Les auteurs remercient tous les lecteurs qui les ont aidés à améliorer ce livre.

Les chapitres 7 à 12 ont été réécrits ou profondément remaniés pour plus de pédagogie et d'efficacité. Il y a désormais un chapitre séparé consacré au solide en rotation autour d'un axe fixe. Les chapitres 27 à 31 ont été remaniés. Il y a environ 50 nouveaux exercices, tirés pour certains d'épreuves de concours récentes.

Le cours a été rédigé avec le souci de le rendre aussi facile d'accès que possible. Il est totalement conforme au programme officiel des classes préparatoires. Cependant quelques paragraphes, intitulés « complément », proposent des développements en dehors du programme.

Les encadrés sur fond gris contiennent l'ensemble de ce qu'il faut retenir. Ils peuvent être lus indépendamment du texte, dans une phase de révision. En fin de chaque chapitre, une synthèse récapitule les savoirs et savoir-faire qui doivent être acquis par l'étudiant et les mots clés dont il doit avoir la maîtrise.

Les exercices sont regroupés en deux catégories : dans la rubrique *s'entraîner* des exercices d'application directe du cours et dans la rubrique *approfondir* des exercices demandant plus de réflexion. Les solutions proposées sont complètes et peuvent servir de modèle de rédaction.

Deux appendices complètent l'ouvrage. Le premier traite du délicat problème des incertitudes expérimentales. Le deuxième expose toutes les méthodes mathématiques dont la maîtrise peut être nécessaire lors d'une épreuve de physique.

Les auteurs seront heureux d'avoir des retours de lecteurs sur leur expérience de travail avec ce livre. Bonne lecture et bon travail à tous !

Lorsque le titre d'un paragraphe de cours (ou d'un exercice) se termine par le nom de l'une des deux options - MPSI ou PTSI - entre parenthèses, cela signifie qu'il ne concerne que cette option.

Table des matières

I	Signaux physiques	23
1	Oscillateur harmonique	25
1	Un oscillateur harmonique mécanique	25
1.1	Système étudié	25
1.2	Obtention d'une équation différentielle	26
1.3	Définition d'un oscillateur harmonique	26
1.4	Résolution de l'équation différentielle	27
1.5	Conservation de l'énergie mécanique	29
1.6	Amplitude et période du mouvement	31
2	Signal sinusoïdal	32
2.1	Définition du signal sinusoïdal	32
2.2	Phase instantanée, phase initiale	32
2.3	Période, fréquence	33
2.4	Une interprétation géométrique	34
2.5	Représentation de Fresnel (MPSI)	35
2.6	Déphasage	36
2	Propagation d'un signal	49
1	Signaux physiques, spectre	49
1.1	Ondes et signaux physiques	49
1.2	Notion de spectre	50
1.3	Cas d'un signal périodique de forme quelconque	52
1.4	Cas d'un signal non périodique	55
1.5	Analyse harmonique expérimentale	55
1.6	Exemple : analyse de signaux sonores	57

TABLE DES MATIÈRES

2	Phénomène de propagation	59
2.1	Observations expérimentales	59
2.2	Onde progressive	60
2.3	Onde progressive sinusoïdale	64
3	Superpositions de deux signaux sinusoïdaux	81
1	Interférences entre deux ondes de même fréquence	81
1.1	Somme de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence	81
1.2	Phénomène d'interférences	85
2	Ondes stationnaires et modes propres	90
2.1	Superposition de deux ondes progressives de même amplitude	90
2.2	Onde stationnaire	90
2.3	Expérience de la corde de Melde	92
2.4	Modes propres	96
4	Onde lumineuse	121
1	L'onde lumineuse	121
1.1	Existence et nature de l'onde lumineuse	121
1.2	Célérité de l'onde lumineuse	121
1.3	Longueurs d'onde et fréquences optiques	122
2	Récepteurs lumineux, éclairement	124
2.1	Comparaison avec les récepteurs d'onde sonore	124
2.2	Exemples de récepteurs d'onde lumineuse	125
2.3	Éclairement	126
2.4	Éclairement spectral	126
3	Les sources lumineuses	127
3.1	Les sources de lumière blanche	127
3.2	Les lampes spectrales	127
3.3	Faisceau laser	128
4	Rayon lumineux et source ponctuelle	128
4.1	Expérience	128
4.2	Définition d'un rayon lumineux	129
4.3	Propagation rectiligne	129
4.4	Modèle de la source ponctuelle et monochromatique	130
5	La diffraction de la lumière	131
5.1	Diffraction par une fente	131
5.2	Universalité du phénomène de diffraction	133

5	Optique géométrique	151
1	Approximation de l'optique géométrique	151
2	Lois de Descartes	152
2.1	Lois de Descartes pour la réflexion	152
2.2	Lois de Descartes pour la réfraction	153
3	Miroir plan	155
3.1	Image d'un point objet par un miroir plan	155
3.2	Image d'un objet par un miroir plan	157
4	Systèmes centrés et approximation de Gauss	157
4.1	Systèmes optiques centrés	157
4.2	Approximation de Gauss	157
4.3	Propriétés d'un système centré dans les conditions de Gauss	158
4.4	Foyers objet, foyers image	159
5	Lentilles minces	161
5.1	Présentation des lentilles	161
5.2	Constructions géométriques	163
5.3	Relations de conjugaison	169
5.4	Complément : démonstration des formules de conjugaison	170
6	Applications des lentilles	170
6.1	Projection d'une image	170
6.2	Le microscope	173
6.3	La lunette de Galilée	175
6.4	La lunette astronomique	176
7	L'œil	177
7.1	Description et modélisation	177
7.2	Caractéristiques optiques	178
7.3	Défauts de l'œil	178
8	Approche documentaire : influence des réglages sur l'image produite par un appareil photographique numérique	179
8.1	Modélisation	179
8.2	Influence du diaphragme d'ouverture	180
8.3	Influence de la distance focale	183
6	Introduction au monde quantique	209
1	La dualité onde-particule de la lumière	209
1.1	Introduction	209
1.2	Historique de la découverte du photon	210
1.3	Le photon	212

TABLE DES MATIÈRES

1.4	Une expérience avec des photons uniques	214
1.5	Franges d'interférences et photons	215
2	La dualité onde-particule de la matière	217
2.1	La longueur d'onde de de Broglie	217
2.2	Expériences d'interférences de particules	221
3	Fonction d'onde et probabilités	223
3.1	Analyse d'une expérience d'interférences quantiques	223
3.2	Notion de fonction d'onde et probabilité de détection	225
3.3	Interprétation de l'expérience des fentes de Young	225
3.4	Complémentarité	225
4	L'inégalité de Heisenberg (PTSI)	226
4.1	Indétermination quantique	226
4.2	Exemple : diffraction d'une particule par une fente	226
4.3	L'indétermination position-quantité de mouvement	227
5	Quantification de l'énergie d'une particule confinée	228
5.1	Notion de quantification	228
5.2	Particule dans un puits infini à 1 dimension	228
5.3	Généralisation : lien entre confinement spatial et quantification	230
7	Circuits électriques dans l'ARQS	245
1	Intensité du courant électrique	245
1.1	Charge électrique	245
1.2	Conducteurs électriques	246
1.3	Le courant électrique	247
1.4	Intensité d'un courant stationnaire dans un fil	248
1.5	Mesure de l'intensité d'un courant	250
1.6	L'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS)	250
1.7	Intensité d'un courant variable	251
1.8	Loi des nœuds	252
2	Circuit électrique	253
3	Tension électrique	253
3.1	Mesure d'une tension	254
3.2	Additivité des tensions	255
3.3	Loi des mailles	255
3.4	Potentiel électrique	256
3.5	La masse	257
4	Dipôles électrocinétiques en courant continu	258
4.1	Puissance, conventions générateur et récepteur	258

4.2	Caractéristique d'un dipôle en courant continu	259
4.3	Le résistor	260
4.4	Les générateurs de tension	260
4.5	Point de fonctionnement d'un circuit	262
5	Associations de dipôles	263
5.1	Associations série et parallèle	263
5.2	Lois d'association des résistances	263
5.3	Associations de générateurs	264
6	Ponts diviseurs	265
6.1	Diviseur de tension	265
6.2	Diviseur de courant	265
7	Résistances de sortie et d'entrée	266
7.1	Résistance d'entrée	266
7.2	Résistance de sortie	267
8	Dipôles électrocinétiques fondamentaux du régime variable	267
8.1	Le générateur idéal de tension variable	267
8.2	Le résistor	268
8.3	Le condensateur	268
8.4	La bobine	269
9	Puissance et énergie en régime variable	270
9.1	Les unités	270
9.2	Puissance instantanée reçue par un dipôle en régime variable	270
9.3	Puissance dissipée dans un résistor	271
9.4	Énergie stockée dans un condensateur	271
9.5	Énergie stockée dans une bobine	271
8	Circuit linéaire du premier ordre	293
1	Étude expérimentale d'un circuit RC série	293
1.1	Montage	293
1.2	Régimes transitoire et établi	294
2	Modélisation	294
2.1	Simplification du montage	294
2.2	Équation différentielle sur $u_C(t)$	295
2.3	Constante de temps	295
2.4	Calcul de la tension $u_C(t)$	296
2.5	Interprétation physique	297
2.6	Détermination du régime établi (PTSI)	299
2.7	Portrait de phase	299

TABLE DES MATIÈRES

2.8	Bilan énergétique	301
3	Régime libre du circuit RC	303
3.1	Observation de la réponse à un signal créneau	303
3.2	Modélisation du régime libre	303
4	Étude de la tension $u_R(t)$	305
4.1	Réponse indicielle	305
4.2	Équation différentielle sur $u_R(t)$	305
4.3	Utilisation du portrait de phase	306
4.4	Résolution de l'équation différentielle	307
4.5	Régime libre	308
5	Exemple de circuit inductif	309
5.1	Schéma du montage	309
5.2	Équation différentielle sur $i(t)$	309
5.3	Calcul de l'intensité $i(t)$	310
5.4	Détermination du régime établi (PTSI)	311
5.5	Bilan énergétique	311
9	Circuit linéaire du second ordre	321
1	Étude expérimentale d'un circuit RLC série	321
1.1	Montage	321
1.2	Régimes transitoire et établi	322
1.3	Portraits de phase	323
2	Équation différentielle sur la tension u_C	324
2.1	Mise en équation	325
2.2	Pulsation propre et facteur de qualité	325
3	Détermination de la tension $u_C(t)$	326
3.1	Recherche des conditions initiales	326
3.2	Solution particulière $u_{C,p}(t)$	327
3.3	Différents régimes pour $u_{C,h}(t)$	327
3.4	Solution complète	329
4	Durée du régime transitoire	330
5	Réponse à un signal créneaux	331
5.1	Observations expérimentales	331
5.2	Modélisation du régime libre	332
6	Bilan énergétique	334
7	Analogie entre un circuit RLC et un oscillateur mécanique	335

10 Régime sinusoïdal	345
1 Régime transitoire et régime sinusoïdal forcé	345
1.1 Exemple	345
1.2 Généralisation	347
2 Signaux complexes en régime sinusoïdal forcé	347
2.1 Fondements de la méthode complexe	347
2.2 Exemple d'application	349
3 Impédance complexe	352
3.1 Impédance complexe d'un dipôle passif	352
3.2 Impédance complexe des dipôles de base	352
3.3 Association d'impédances complexes	353
3.4 Ponts diviseurs	354
4 Résonance d'intensité dans un circuit <i>RLC</i> série	355
4.1 Expérience	355
4.2 Interprétation par la méthode complexe	356
4.3 Interprétation par les vecteurs de Fresnel (MPSI)	358
4.4 Facteur de qualité	360
4.5 Détermination expérimentale des paramètres de la résonance	361
5 Résonance de charge d'un circuit <i>RLC</i> série	362
5.1 Étude en notation complexe	362
5.2 Détermination expérimentale de ω_0 et Q	364
5.3 Complément : étude par la méthode des vecteurs de Fresnel (MPSI)	365
6 Résonance dans un système mécanique	366
11 Analyse fréquentielle d'un circuit linéaire	383
1 Fonction de transfert	383
1.1 Position du problème	383
1.2 Définition de la fonction de transfert	383
1.3 Fonction de gain et fonction de phase	384
1.4 Réponse du filtre à un signal sinusoïdal	384
1.5 Lien entre équation différentielle et fonction de transfert	386
2 Diagramme de Bode	386
2.1 Le gain en décibel	387
2.2 Mesure d'un gain en décibel	387
2.3 Le diagramme de Bode	388
2.4 Étude de la courbe d'amplitude	389
2.5 Domaine dérivateur, domaine intégrateur	393
3 Exemples de filtres	394

TABLE DES MATIÈRES

3.1	Filtre passe-bas du premier ordre	394
3.2	Filtre passe-bas du deuxième ordre	396
3.3	Filtre passe-haut du premier ordre	397
3.4	Filtre passe-haut du deuxième ordre	400
3.5	Filtre passe-bande du deuxième ordre	401
4	Annexe 1 : courbes d'amplitude et de phase des filtres du premier et du deuxième ordre	403
4.1	Filtres du premier ordre	403
4.2	Filtres du deuxième ordre	404
5	Annexe 2 : diagrammes de Bode des filtres du premier et du deuxième ordre	406
5.1	Filtres du premier ordre	406
5.2	Filtres du deuxième ordre	407
12	Filtrage d'un signal	421
1	Signaux non sinusoïdaux	421
1.1	Superposition de signaux sinusoïdaux en nombre fini	421
1.2	Exemples	422
2	Valeur efficace	422
2.1	Définition	422
2.2	Signification physique de la valeur efficace	423
2.3	Valeur efficace d'un signal sinusoïdal	423
2.4	Valeur efficace d'un signal non sinusoïdal	424
3	Réponse d'un filtre à un signal périodique non sinusoïdal	424
3.1	Expression du signal de sortie	424
3.2	Principe du filtrage	425
3.3	Bande passante à -3 dB	425
4	Exemples de filtrage	427
4.1	Filtrage par un filtre passe-bas	427
4.2	Filtrage par un filtre passe-haut	429
4.3	Filtrage par un filtre passe-bande	431
5	Filtre intégrateur ou dérivateur	431
5.1	Intégrateur	431
5.2	Dérivateur	432
6	Gabarit (PTSI)	433
6.1	Cahier des charges	433
6.2	Exemples de gabarits	434
7	Approche documentaire : accéléromètre	436

II Mécanique 1 455

13 Cinématique du point 457

1	Notion de point en physique	457
1.1	Définition d'un solide	457
1.2	Définition d'un point	457
1.3	Quand peut-on assimiler un système à un point ?	458
2	Repérage d'un point du plan	458
2.1	Intérêt d'avoir plusieurs systèmes de coordonnées	458
2.2	Repérage d'un point sur une droite.	460
2.3	Repérage d'un point dans le plan	461
3	Repérage d'un point dans l'espace	464
3.1	Repérage cartésien	464
3.2	Repérage cylindrique	464
3.3	Repérage sphérique	465
4	Cinématique du point	468
4.1	Notion de référentiel	468
4.2	Vecteurs position, déplacement, vitesse et accélération	470
5	Utilisation des différents systèmes de coordonnées	472
5.1	Coordonnées cartésiennes	472
5.2	Coordonnées cylindro-polaire	474
5.3	Coordonnées sphériques	478
6	Études de mouvements en coordonnées cartésiennes	481
6.1	Mouvements rectilignes	481
6.2	Mouvements à vecteur accélération constante	483
6.3	Mouvement rectiligne sinusoïdal : mouvement harmonique	485
7	Mouvements circulaires	486
7.1	Mouvement circulaire et uniforme	486
7.2	Généralisation : mouvement circulaire quelconque	487
8	Interprétation du vecteur accélération	488
8.1	Le vecteur vitesse et sa norme	488
8.2	Vecteur accélération et variation de la norme de la vitesse	489
8.3	Vecteur accélération et courbure de la trajectoire	490
9	Étude expérimentale de mouvements	491
9.1	Généralités	491
9.2	Étude expérimentale en coordonnées cartésiennes	492
9.3	Étude expérimentale en coordonnées polaires	495

TABLE DES MATIÈRES

14 Cinématique du solide	509
1 Repérage d'un solide	509
1.1 Définition d'un solide	509
1.2 Repérage d'un solide dans l'espace	509
2 Mouvement de translation	510
2.1 Définition	510
2.2 Mouvement d'un point d'un solide en translation	510
2.3 Conséquences	511
2.4 Deux mouvements de translations remarquables	511
3 Solides en rotation autour d'un axe fixe	512
3.1 Définition	512
3.2 Mouvement d'un point d'un solide en rotation	512
3.3 Conséquences	513
3.4 Quelques exemples de rotation autour d'un axe fixe	514
15 Principes de la dynamique newtonienne	521
1 Éléments cinétiques d'un point matériel	521
1.1 Masse	521
1.2 Quantité de mouvement	522
2 Les trois lois de Newton	523
2.1 Première loi de Newton : Principe d'inertie	523
2.2 Deuxième loi de Newton : Principe fondamental de la dynamique	524
2.3 Troisième loi de Newton : principe des actions réciproques	526
3 Limite de validité de la mécanique classique	527
3.1 Qu'est-ce qu'un principe ?	527
3.2 Les hypothèses de la mécanique classique	527
3.3 Les limites de la mécanique classique	527
4 Premières applications : détermination d'une loi de force	528
4.1 Détermination dynamique d'une force : mesure de g	528
4.2 Détermination statique d'une force	529
5 Classification des forces	529
5.1 Les quatre interactions fondamentales	530
5.2 Forces à distance	530
5.3 Forces de contact	534
6 Résolution d'un problème de mécanique du point	538
7 Chute libre dans le champ de pesanteur	539
7.1 Mise en équation	539
7.2 Chute libre dans le vide	539

7.3	Chute libre avec frottements proportionnels à la vitesse	540
7.4	Chute libre avec frottements proportionnels au carré de la vitesse . . .	543
7.5	Comparaison des deux modèles de frottements	544
8	Tir d'un projectile dans le champ de pesanteur	545
8.1	Mise en équation	545
8.2	Tir dans le vide	546
8.3	Tir en tenant compte de la résistance de l'air	548
9	Le pendule simple	550
9.1	Modélisation	551
9.2	Équation du mouvement	551
9.3	Résolution numérique	552
9.4	Cas des oscillations de faibles amplitudes	553
16	Aspects énergétiques de la dynamique du point	575
1	Travail et puissance d'une force	575
1.1	Introduction et notations	575
1.2	Puissance d'une force	576
1.3	Travail élémentaire d'une force	577
1.4	Travail d'une force au cours d'un déplacement	577
2	Premiers exemples de calculs de travaux	578
2.1	Travail d'une force constamment perpendiculaire au mouvement . . .	578
2.2	Travail d'une force constante	578
2.3	Travail d'une force de frottement de norme constante	578
3	Théorème de l'énergie cinétique	579
3.1	Définition de l'énergie cinétique	579
3.2	Théorème de l'énergie cinétique en référentiel galiléen	579
3.3	Utilisation du théorème de l'énergie cinétique	581
3.4	Intérêt d'une approche énergétique	581
3.5	Étude d'un problème à l'aide du théorème de l'énergie cinétique . . .	581
4	Énergie potentielle et forces conservatives	583
4.1	Définitions	583
4.2	Exemples de forces conservatives	583
4.3	Exemples de forces non conservatives	586
5	Énergie mécanique	587
5.1	Définition de l'énergie mécanique	587
5.2	Conservation de l'énergie mécanique	587
5.3	Cas général : non conservation de l'énergie mécanique	588
6	Étude qualitative des mouvements et des équilibres	588

TABLE DES MATIÈRES

6.1	Exemple introductif	588
6.2	Position du problème	589
6.3	Analyse du mouvement à l'aide d'un graphe énergétique	590
6.4	Analyse des équilibres à l'aide d'un graphe énergétique	591
7	Portraits de phase et lien avec le profil d'énergie potentielle	594
7.1	Définitions	594
7.2	Exemple introductif	594
7.3	Caractéristiques principales des portraits de phase	596
17	Mouvement dans un puits de potentiel	615
1	Mouvement conservatif dans un puits de potentiel	615
1.1	Mouvement dans un puits de potentiel harmonique	615
1.2	Mouvement dans un puits de potentiel quelconque	618
2	Mouvements dans un puits de potentiel : influence des frottements	622
2.1	Équation différentielle du mouvement	622
2.2	Équation caractéristique et observation	623
2.3	Résolution : les trois régimes	624
2.4	Évaluation rapide de la durée des différents régimes	628
2.5	Aspects énergétiques	629
18	Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique ou magnétique	651
1	Force de Lorentz	651
1.1	Rappel de l'expression	651
1.2	Différence fondamentale entre la composante électrique et la composante magnétique	652
1.3	Ordre de grandeur et conséquences	652
2	Mouvement dans un champ électrique uniforme	653
2.1	Équation du mouvement	653
2.2	Étude de la trajectoire	654
2.3	Accélération d'une particule chargée par un champ électrique	655
3	Mouvement dans un champ magnétique	659
3.1	Le mouvement est uniforme	659
3.2	Étude de la trajectoire	660
4	Quelques applications de ces mouvements	662
4.1	Expérience de Thomson	662
4.2	Spectromètre de masse	665
4.3	Cyclotron	666
5	Approche documentaire : limites relativistes en microscopie électronique	667

III Mécanique 2 685

19 Loi du moment cinétique pour un point matériel	687
1 Observations préliminaires	687
1.1 Exemples introductifs	687
1.2 Notion intuitive de bras de levier	688
2 Moment cinétique d'un point matériel	688
2.1 Définition du moment cinétique	688
3 Moment d'une force	691
3.1 Moment d'une force par rapport à un point O	691
3.2 Moment d'une force par rapport à un axe orienté Δ	691
4 Loi du moment cinétique pour un point matériel	693
4.1 Loi du moment cinétique par rapport à un point fixe	693
4.2 Cas de conservation du moment cinétique	694
4.3 Loi du moment cinétique par rapport à un axe fixe	694
20 Mouvement dans un champ de force centrale. Champs newtoniens.	707
1 Force centrale conservative	707
1.1 Qu'est-ce qu'une force centrale conservative ?	707
1.2 Exemples de forces centrales conservatives	708
1.3 Observations de mouvements à force centrale conservative	710
2 Généralités sur les forces centrales conservatives	711
2.1 Conséquence du caractère central de la force	711
2.2 Conséquence du caractère conservatif de la force	714
3 Cas particulier de l'attraction gravitationnelle	715
3.1 Position du problème	715
3.2 Étude qualitative du mouvement radial	716
4 Étude directe de la trajectoire circulaire	717
4.1 Position du problème	717
4.2 Étude à partir du principe fondamental de la dynamique	718
4.3 Application aux satellites géostationnaires	720
4.4 Vitesses cosmiques	723
4.5 Compléments : autres trajectoires envisageables	725
21 Moment cinétique et solide en rotation	739
1 Moment cinétique d'un solide ou d'un système de points	739
1.1 Cas d'un point matériel : notion de moment d'inertie	739
1.2 Cas d'un système déformable	740

TABLE DES MATIÈRES

1.3	Cas d'un solide en rotation par rapport à un axe	741
2	Loi du moment cinétique pour un solide en rotation	743
2.1	Rappel sur le moment d'une force	743
2.2	Loi scalaire du moment cinétique pour un solide	743
2.3	Cas de conservation du moment cinétique	744
2.4	Couples	744
3	Application aux dispositifs rotatifs	747
3.1	Liaison pivot d'axe (Oz)	747
3.2	Notions sur les moteurs et les freins dans les dispositifs rotatifs	748
4	Pendule pesant	749
4.1	Position du problème et équation du mouvement	749
4.2	Oscillations de faible amplitude	750
4.3	Intégrale première du mouvement et étude qualitative	751
4.4	Portrait de phase	752
4.5	Résolution numérique	753
5	Énergie d'un solide en rotation autour d'un axe fixe	754
5.1	Énergie cinétique d'un solide en rotation	754
5.2	Puissance d'une force appliquée à un solide en rotation	755
5.3	Loi de l'énergie cinétique pour un solide indéformable	755

IV Thermodynamique 769

22	Système thermodynamique à l'équilibre	771
1	Descriptions microscopique et macroscopique de la matière	771
1.1	Les phases solide, liquide et gaz	771
1.2	L'agitation thermique	772
1.3	Échelles microscopique, mésoscopique et macroscopique	773
1.4	Le point de vue de la thermodynamique	773
2	Système thermodynamique, variables d'état	774
2.1	Système thermodynamique	774
2.2	Variables d'état	775
3	Équilibre thermodynamique	778
3.1	Définition	778
3.2	Équilibre thermodynamique local	778
3.3	Conditions d'équilibre	778
4	Équation d'état	780
4.1	Définition	780

4.2	Équation d'état d'un gaz parfait	780
4.3	Équation d'état d'une phase condensée idéale	782
5	Énergie interne, capacité thermique à volume constant	783
5.1	L'énergie interne U	783
5.2	La capacité thermique à volume constant C_V	784
5.3	Cas d'un gaz parfait	784
5.4	Cas d'une phase condensée incompressible	785
6	Vitesse quadratique moyenne (PTSI)	786
6.1	Définition	786
6.2	Expression en fonction de la température	787
6.3	Ordre de grandeur de la vitesse quadratique moyenne	787
7	Corps pur diphasé en équilibre	788
7.1	Changements d'état physique	788
7.2	Diagramme de phases (P, T)	788
7.3	Variables d'état d'un système diphasé	791
8	Étude de l'équilibre liquide-gaz	793
8.1	Pression de vapeur saturante	793
8.2	Variation de P_{sat} avec T	794
8.3	Température d'ébullition	794
8.4	Diagramme de Clapeyron	795
8.5	Composition du mélange liquide-gaz	796
8.6	Point critique	797
8.7	Le stockage des fluides	799
23	Énergie échangée par un système au cours d'une transformation	811
1	Transformation thermodynamique	811
1.1	Transformation, état initial, état final	811
1.2	Différents types de transformations	812
1.3	Influence du choix du système	814
2	Travail des forces de pression	815
2.1	Expression générale du travail de la pression extérieure	815
2.2	Cas particulier d'un fluide en écoulement	818
2.3	Travail des forces de pression dans deux cas particuliers	819
2.4	Travail des forces de pression dans le cas d'une transformation mé- caniquement réversible	820
3	Transfert thermique	823
3.1	Définition	823
3.2	Les trois modes de transfert thermique (PTSI)	823

TABLE DES MATIÈRES

3.3	Transformation adiabatique	825
3.4	Notion de thermostat	826
3.5	Retour sur les transformations monotherme et isotherme	827
3.6	Choix d'un modèle : adiabatique ou isotherme ?	827
24	Premier principe. Bilans d'énergie	835
1	Le premier principe de la thermodynamique	835
1.1	Énergie d'un système	835
1.2	Premier principe de la thermodynamique	836
1.3	Obtention de la valeur du transfert thermique	837
1.4	Transfert thermique dans une transformation isochore sans travail autre que celui de la pression et sans variation d'énergie cinétique . . .	838
1.5	Exemples d'application du premier principe	838
2	La fonction d'état enthalpie	842
2.1	Définitions	842
2.2	Premier principe pour une transformation monobare avec équilibre mécanique dans l'état initial et l'état final	843
2.3	Transfert thermique dans une transformation isobare sans travail autre que celui de la pression et sans variation d'énergie cinétique	843
2.4	Enthalpie d'un gaz parfait	844
2.5	Enthalpie d'une phase condensée indilatable et incompressible	846
2.6	Enthalpie d'un système diphasé	847
2.7	Variations d'enthalpie isobares	848
3	Mesures de grandeurs thermodynamiques	850
3.1	Le calorimètre	850
3.2	Détermination d'une capacité thermique massique	851
3.3	Détermination d'une enthalpie de changement d'état	853
3.4	Mesure de la valeur en eau du calorimètre	854
25	Deuxième principe. Bilans d'entropie.	865
1	Le deuxième principe de la thermodynamique	865
1.1	Transformations irréversibles et transformations réversibles	865
1.2	Le deuxième principe de la thermodynamique	868
2	Entropie d'un échantillon de corps pur	869
2.1	Entropie d'un gaz parfait	869
2.2	Entropie d'une phase condensée indilatable et incompressible	873
2.3	Entropie d'un système diphasé	873
3	Exemples de bilans d'entropie	875

3.1	Méthode générale	875
3.2	Exemple 1 : détente de Joule - Gay Lussac	876
3.3	Exemple 2 : mise en contact avec un thermostat	876
3.4	Exemple 3 : compression d'un gaz parfait	879
3.5	Exemple 4 : chauffage par effet Joule	881
3.6	Exemple 5 : solidification d'un liquide surfondu	883
26	Machines thermiques	899
1	Machine monotherme	899
2	Machines thermiques dithermes	900
2.1	Généralités sur les machines dithermes	900
2.2	Moteur thermique	901
2.3	Machine frigorifique	903
2.4	Pompe à chaleur	904
3	Étude de cycles théoriques réversibles	905
3.1	Cycle de Carnot pour un gaz parfait	905
3.2	Cycle de Carnot pour un système diphasé	907
4	Étude de machines thermiques réelles	908
4.1	Moteur à explosion	908
4.2	Machine frigorifique (MPSI)	911
V	Induction et forces de Laplace	941
27	Champ magnétique	943
1	Notion de champ	943
1.1	Champ scalaire et champ vectoriel	943
1.2	Champ stationnaire, champ uniforme	944
1.3	Lignes de champ	944
1.4	Un champ vectoriel permet de décrire une interaction à distance . . .	944
2	Champ magnétique, cartographie et exemples	945
2.1	Définition du champ magnétique	945
2.2	Unité de champ magnétique et ordres de grandeur	945
2.3	Source du champ magnétique	945
2.4	Champ magnétique créé par un fil rectiligne infini	946
2.5	Champ magnétique créé par une spire circulaire	947
2.6	Norme du champ magnétique	948
2.7	Bobine longue	948

TABLE DES MATIÈRES

2.8	Aimant	952
3	Moment magnétique	952
3.1	Vecteur surface d'une spire plane	952
3.2	Moment magnétique d'une spire plane	953
3.3	Moment magnétique d'une bobine	953
3.4	Moment magnétique d'un aimant, ordre de grandeur	953
3.5	Lignes de champ d'un moment magnétique	954
28	Actions d'un champ magnétique	961
1	Force de Laplace	961
1.1	Force de Laplace sur un tronçon rectiligne dans un champ uniforme	961
1.2	Puissance de la force de Laplace	962
2	Couple magnétique	962
2.1	Expression du couple magnétique	962
2.2	Exemple : couple magnétique exercé par un champ magnétique uni- forme sur une spire rectangulaire	963
3	Action d'un champ magnétique uniforme sur un aimant	966
3.1	Orientation d'un aimant	966
3.2	Positions d'équilibre	966
3.3	Application : la boussole	967
3.4	Effet moteur d'un champ magnétique tournant	967
29	Lois de l'induction	975
1	Expériences d'induction électromagnétique	975
1.1	Expérience historique de Faraday	975
1.2	Autres expériences	976
1.3	Interprétation	977
2	Loi de Faraday	978
2.1	Flux magnétique	978
2.2	Force électromotrice induite	979
2.3	Convention d'algébrisation	980
2.4	La loi de Faraday est-elle toujours applicable ?	980
3	Loi de Lenz	982
30	Circuit fixe dans un champ magnétique variable	987
1	Auto-induction	987
1.1	Coefficient d'auto-induction	987
1.2	Exemple de calcul d'une inductance propre	989

1.3	Force électromotrice auto-induite	989
1.4	Schéma électrique	990
1.5	Loi de Lenz	990
1.6	Mesure de l'inductance propre d'une bobine	990
1.7	Bilan d'énergie	991
2	Induction mutuelle	992
2.1	Coefficient d'induction mutuelle	992
2.2	Forces électromotrices induites dans des circuits couplés par mutuelle induction	994
2.3	Schéma électrique	994
2.4	Étude de deux circuits couplés	995
3	Transformateur de tension (PTSI)	998
3.1	Constitution	998
3.2	Principe de fonctionnement	998
3.3	Normalisation et orientation des courants	1000
3.4	Courants de Foucault	1001
3.5	Utilisation	1001
31	Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire	1015
1	Conversion de puissance mécanique en puissance électrique	1015
1.1	Rails de Laplace générateurs	1015
1.2	Freinage par induction	1021
1.3	Alternateur	1022
2	Conversion de puissance électrique en puissance mécanique	1025
2.1	Rails de Laplace moteurs	1025
2.2	Haut-parleur électrodynamique	1029
3	Machine à courant continu à entrefer plan (PTSI)	1032
3.1	Présentation	1032
3.2	Analyse physique	1032
3.3	Choix des orientations	1033
3.4	Équations de la MCC	1033
3.5	Réalisation	1034
3.6	Utilisations	1035
VI	Appendices	1055
A	Mesures et incertitudes	1057
1	Mesure d'une grandeur physique	1057

TABLE DES MATIÈRES

1.1	Représentation d'une grandeur physique	1057
1.2	Mesure d'une grandeur physique	1058
2	Incertitudes et intervalle de confiance	1061
2.1	Notion d'intervalle de confiance	1061
2.2	Évaluation d'une incertitude-type	1062
2.3	Incertitude-type composée	1065
3	Présentation d'un résultat expérimental	1066
3.1	Notation d'un résultat	1066
3.2	Chiffres significatifs et arrondis	1067
4	Validité d'un résultat expérimental	1068
4.1	Comparaison entre une valeur mesurée et une valeur de référence . .	1068
4.2	Vérification d'une relation linéaire entre des données	1068
B	Outils mathématiques	1073
1	Équations algébriques	1073
1.1	Système linéaire de n équations à p inconnues	1073
1.2	Équation non linéaire	1074
2	Équations différentielles	1076
2.1	Équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants . . .	1076
2.2	Équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants	1080
2.3	Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, avec un second membre non nul	1083
2.4	Autres équations différentielles	1086
3	Fonctions	1089
3.1	Fonctions usuelles	1089
3.2	Dérivée	1091
3.3	Développements limités	1093
3.4	Primitive et intégrale	1094
3.5	Représentation graphique d'une fonction	1097
3.6	Développement en série de Fourier	1098
4	Géométrie	1100
4.1	Projection d'un vecteur, produit scalaire	1100
4.2	Produit vectoriel	1102
4.3	Transformations géométriques	1105
4.4	Courbes planes	1108
4.5	Courbes paramétrées	1112
4.6	Longueurs, aires et volumes classiques	1114

TABLE DES MATIÈRES

4.7	Barycentre d'un système de points	1115
5	Trigonométrie	1117
5.1	Angle orienté	1117
5.2	Fonctions trigonométriques	1118
5.3	Nombres complexes	1121
6	Gradient d'un champ scalaire	1123
6.1	Champ scalaire f et surfaces iso- f	1123
6.2	Dérivées partielles et différentielle	1123
6.3	Vecteur gradient	1124

Première partie

Signaux physiques

Oscillateur harmonique

1

On appelle **signal physique** une grandeur physique dépendant du temps. Dans cette partie du cours, on s'intéressera surtout à des **signaux périodiques**. Un signal périodique est un signal qui se reproduit identique à lui-même au cours du temps. Le plus fondamental des signaux périodiques est le **signal sinusoïdal**.

Dans ce chapitre, on introduit un modèle physique qui produit un signal sinusoïdal appelé l'**oscillateur harmonique**. Les adjectifs harmonique et sinusoïdal sont synonymes : on rencontre parfois les expressions « signal harmonique » ou « oscillateur sinusoïdal ».

L'exemple étudié dans ce chapitre est un oscillateur harmonique mécanique. Cependant on retrouve ce modèle dans bien d'autres domaines de la physique, notamment l'électricité.

1 Un oscillateur harmonique mécanique

1.1 Système étudié

Le système mécanique oscillant le plus simple est une masse accrochée à un ressort.

On considère dans ce paragraphe un mobile de masse m qui se déplace sans frottement le long d'une tige horizontale (figure 1.1). Sa position est repérée par l'abscisse x de son centre d'inertie G mesurée sur l'axe (Ox) matérialisé par la tige. On choisit de placer l'origine de l'axe (Ox) de manière que G coïncide avec O dans la position d'équilibre (voir figure 1.1).

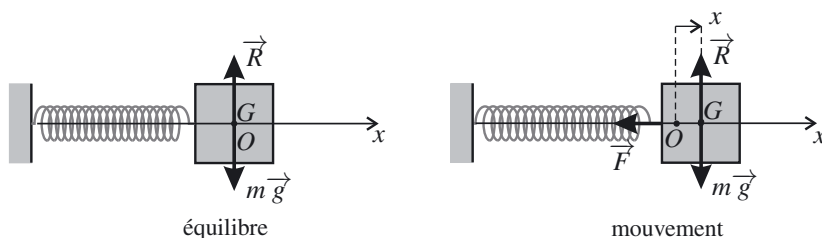


Figure 1.1 – Un exemple d'oscillateur harmonique mécanique.

1.2 Obtention d'une équation différentielle

a) Forces s'exerçant sur le système

Le ressort exerce sur le mobile une force qui s'écrit :

$$\vec{F} = -kx\vec{u}_x,$$

où k est la **constante de raideur** du ressort. Cette force est une force de rappel : son sens est opposé au sens du déplacement du mobile par rapport à sa position d'équilibre (la position $x = 0$). Lorsque x est positif, la force est de sens opposé à $\vec{u}_x$ et inversement. On trouvera plus de renseignements sur la force d'un ressort dans le chapitre *Principes de la dynamique newtonienne*.

Le mobile est aussi soumis à son poids $m\vec{g}$ ainsi qu'à une réaction $\vec{R}$ de la tige. Ces deux forces sont verticales et n'ont pas d'influence sur le mouvement qui est horizontal.

b) Application du principe fondamental de la dynamique

Le mouvement du mobile est régi par le principe fondamental de la dynamique (ou deuxième loi de Newton), qui s'écrit :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

où $\vec{p}$ est la quantité de mouvement du mobile. En notant $\vec{v}_G$ la vitesse instantanée du centre d'inertie G du mobile, on a :

$$\vec{p} = m\vec{v}_G = m\frac{dx}{dt}\vec{u}_x.$$

Dans cette relation, $\frac{dx}{dt}$ est la dérivée de la fonction $x(t)$. On notera $\frac{d^2x}{dt^2}$ la dérivée seconde de cette fonction. Le principe fondamental de la dynamique conduit donc à la relation, vérifiée à chaque instant : $\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\vec{u}_x\right) = -kx\vec{u}_x$, soit : $m\frac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x = -kx\vec{u}_x$, soit après simplification :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x. \quad (1.1)$$

La relation qui vient d'être obtenue est appelée **équation différentielle**. Une équation différentielle est une relation entre une fonction $x(t)$ et ses dérivées par rapport au temps $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$..., qui est vérifiée à chaque instant. Ici, on a trouvé une équation du deuxième ordre, car l'ordre de dérivation le plus grand qui apparaît dans l'équation (le seul ici, mais il pourrait y en avoir plusieurs) est égal à deux.

1.3 Définition d'un oscillateur harmonique

L'équation différentielle (1.1) est une équation différentielle d'oscillateur harmonique.

On appelle **oscillateur harmonique** un système physique décrit par une grandeur $x(t)$ dépendant du temps et vérifiant une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x(t) \quad (1.2)$$

où ω_0 est une constante réelle positive qui est appelée **pulsation propre** de l'oscillateur harmonique et qui s'exprime en rad.s^{-1} .

Remarque

L'unité de ω_0 se déduit de l'homogénéité de l'équation différentielle. En effet, la dérivée seconde par rapport au temps a pour dimension physique la dimension de x divisée par un temps au carré. Donc ω_0^2 a la dimension des s^{-2} et ω_0 a la dimension des s^{-1} . Le radian n'a pas de dimension physique.

La masse accrochée au ressort du paragraphe précédent est un oscillateur harmonique mécanique, de pulsation :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

On en verra d'autres exemples, en mécanique ou en électricité.

1.4 Résolution de l'équation différentielle

a) Position du problème

Résoudre une équation différentielle consiste à trouver l'expression de la fonction inconnue $x(t)$ qui vérifie cette relation. Mais l'équation ne détermine pas de manière unique $x(t)$. Parmi les fonctions qui la vérifient, on doit choisir celle qui respecte des **conditions initiales** qui sont connues *a priori*.

Pour une équation du deuxième ordre, comme l'équation d'un oscillateur harmonique, les conditions initiales consistent en la donnée :

- de la valeur de la fonction inconnue à l'instant initial $t = 0$: $x(0)$,
- de la valeur de la dérivée première de la fonction inconnue à l'instant initial : $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}$.

On va résoudre cette équation dans le cas du mobile accroché au ressort. Les conditions initiales sont :

- la position initiale : $x(0) = x_0$,
- la vitesse initiale : $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = v_0$.

b) Solutions dans deux cas particuliers

Cas où $x_0 \neq 0$ et $v_0 = 0$. On considère la fonction :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \quad (1.3)$$

où x_0 est une constante. On a alors, en utilisant des formules classiques de dérivation (voir l'appendice mathématique) :

$$\frac{dx}{dt} = -\omega x_0 \sin(\omega_0 t), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}(-\omega x_0 \sin(\omega_0 t)) = -\omega_0^2 x_0 \cos(\omega_0 t) = -\omega_0^2 x(t) = -\frac{k}{m}x(t).$$

Ainsi cette fonction $x(t)$ vérifie l'équation différentielle (1.1).

À quelle situation physique la solution trouvée correspond-elle ? Les conditions initiales vérifiées sont :

$$x(0) = x_0 \cos(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = \omega x_0 \sin(0) = 0.$$

Il s'agit du cas où on lâche le mobile dans la position $x = x_0$ sans lui communiquer de vitesse initiale. Dans ce cas, $x(t)$ oscille entre $-x_0$ et x_0 puisque la fonction cosinus oscille entre -1 et 1 (voir figure 1.2).

Cas où $x_0 = 0$ et $v_0 \neq 0$ On peut imaginer une autre manière de lancer le mobile : sans l'écartier de sa position d'équilibre, lui communiquer une vitesse $v_0 \vec{u}_x$. Quelle est alors la loi du mouvement $x(t)$? Les conditions initiales que doit vérifier cette solution sont :

$$x(0) = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = v_0.$$

La fonction : $x(t) = b \sin(\omega_0 t)$, où b est une constante est aussi une solution de l'équation différentielle du mouvement comme le montre le calcul suivant :

$$\frac{dx}{dt} = \omega_0 b \cos(\omega_0 t), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\omega_0 b \cos(\omega_0 t)) = -\omega_0^2 b \sin(\omega_0 t) = -\omega_0^2 x(t) = -\frac{k}{m}x(t).$$

Elle vérifie les conditions initiales si : $x(0) = b \sin(0) = 0$, et si : $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = \omega_0 b \cos(0) = v_0$.

Il faut donc que : $b = \frac{v_0}{\omega}$. Finalement, la solution de l'équation différentielle correspondant à ces conditions initiales est :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (1.4)$$

Cette solution $x(t)$ oscille entre $-\frac{v_0}{\omega_0}$ et $\frac{v_0}{\omega_0}$ puisque la fonction sinus oscille entre -1 et 1 (voir figure 1.2).

c) Solution pour des conditions initiales quelconques

On peut vérifier facilement que la somme des deux solutions précédemment trouvées,

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t), \quad (1.5)$$

est aussi une solution de l'équation différentielle et qu'elle vérifie les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = v_0$. On a ainsi la solution pour un jeu de conditions initiales quelconque. Sur la figure 1.2 on voit que $x(t)$ oscille entre deux valeurs opposées $-A$ et A .

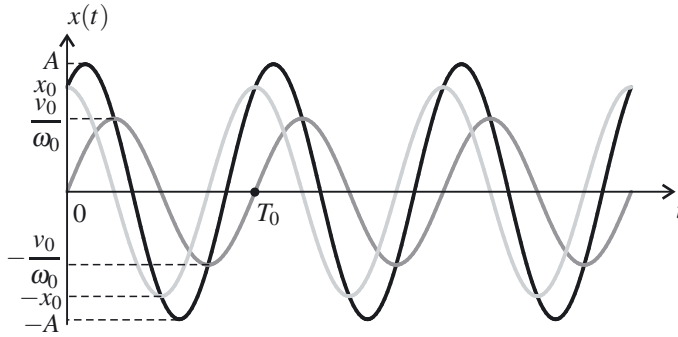


Figure 1.2 – Représentation graphique de $x(t)$ en fonction de t . En gris clair : cas $x_0 \neq 0$ et $v_0 = 0$; en gris foncé : cas $x_0 = 0$ et $v_0 \neq 0$; en noir : cas $x_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$. La période des oscillations est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (voir paragraphe 2).

d) Généralisation

La solution de l'équation de l'oscillateur harmonique (1.2) est de la forme :

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t)$$

où a et b sont des constantes fixées par les conditions initiales.

1.5 Conservation de l'énergie mécanique

Lorsqu'il est en mouvement le mobile possède une **énergie cinétique** qui se calcule par la formule :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Le ressort quant à lui n'a pas de masse donc pas d'énergie cinétique, mais il possède une énergie appelée **énergie potentielle** liée à sa déformation et dont on admettra ici l'expression :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2.$$

La somme de ces deux énergies est l'**énergie mécanique** :

$$E_m = E_p + E_c = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Que valent ces énergies au cours du temps ?

Si l'on injecte la solution $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$ dans les expressions précédentes

on trouve :

$$\begin{aligned} E_c(t) &= \frac{1}{2}m(-\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t) + v_0 \cos(\omega_0 t))^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\omega_0^2 x_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + v_0^2 \cos^2(\omega_0 t) - 2\omega_0 x_0 v_0 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t)), \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} E_p(t) &= \frac{1}{2}k \left(x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right)^2 \\ &= \frac{1}{2}k \left(x_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \sin^2(\omega_0 t) + 2x_0 \frac{v_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) \right) \\ &= \frac{1}{2}m(\omega_0^2 x_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + v_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + 2\omega_0 x_0 v_0 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t)), \end{aligned}$$

en utilisant la relation $k = m\omega_0^2$. L'énergie mécanique s'écrit :

$$\begin{aligned} E_m(t) &= E_p(t) + E_c(t) \\ &= \frac{1}{2}m(\omega_0^2 x_0^2 (\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)) + v_0^2 (\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t))) \\ &= \frac{1}{2}m(\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2) = \frac{1}{2}k \left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \right) = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

en utilisant encore la relation $k = m\omega_0^2$. L'énergie mécanique est donc constante dans le temps. On reconnaît dans la dernière expression la valeur de l'énergie mécanique à l'instant initial. Ce résultat est cohérent avec le fait que l'on étudie un système idéalisé dont l'amortissement est négligé : on ne prend en compte aucun type de frottement. C'est pourquoi il y a conservation de l'énergie mécanique.

Remarque

Dans les deux cas particuliers du paragraphe b) on fournit son énergie au système :

- sous forme d'énergie potentielle uniquement quand $x_0 \neq 0$ et $v_0 = 0$;
- sous forme d'énergie cinétique uniquement quand $x_0 = 0$ et $v_0 \neq 0$.



L'équation différentielle (1.1) peut être établie à partir de la relation de conservation de l'énergie mécanique : $E_m = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}kx(t)^2 = \text{constante}$. En effet, il vient si l'on dérive par rapport au temps :

$$m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + kx(t) \frac{dx}{dt} = 0,$$

ce qui redonne l'équation différentielle (1.1), après simplification par le terme $\frac{dx}{dt}$.

1.6 Amplitude et période du mouvement

a) Amplitude du mouvement

L'amplitude A du mouvement est la valeur maximale atteinte par $x(t)$. Dans le cas où $x_0 \neq 0$ et $v_0 = 0$, $A = x_0$; dans le cas où $x_0 = 0$ et $v_0 \neq 0$, $A = \frac{v_0}{\omega_0}$. Quelle est l'expression de A dans le cas général où $x_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$?

On peut utiliser la conservation de l'énergie : lorsque $x(t)$ passe par la valeur maximale A , sa dérivée est nulle donc l'énergie cinétique est nulle. Par suite :

$$E_m = \frac{1}{2}kA^2 + 0.$$

L'expression (1.6) de l'énergie mécanique conduit alors à :

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}.$$

b) Période

Comme on l'observe sur la figure 1.2, le mouvement du mobile est oscillatoire et périodique : les valeurs de $x(t)$ se répètent à intervalle régulier. Mathématiquement cela provient de la périodicité des fonctions cosinus et sinus : $\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$ et $\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$. Alors :

$$\cos(\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t + 2\pi) = \cos\left(\omega_0 \left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right),$$

et de même : $\sin(\omega_0 t) = \sin\left(\omega_0 \left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right)$. Ainsi, on a :

$$x(t) = x(t + T_0) \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (1.7)$$

Cette relation signifie que le mouvement est périodique de période T_0 . La période ne dépend pas de l'amplitude du mouvement, c'est la propriété d'**isochronisme** des oscillations de l'oscillateur harmonique. On peut alors parler de période de l'oscillateur harmonique. T_0 augmente avec la masse m du mobile et diminue avec la constante de raideur k du ressort, ce qui est intuitif.

2 Signal sinusoïdal

2.1 Définition du signal sinusoïdal

Un **signal sinusoïdal** est un signal de la forme :

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

où A et ω sont des constantes positives et φ une constante.

ω est la **pulsation** du signal, A son **amplitude**, et φ sa **phase initiale**.



Un signal sinusoïdal peut aussi être écrit sous la forme :

$$s(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t),$$

où a et b sont deux constantes. C'est sous cette forme qu'on l'obtient naturellement en résolvant l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.

Il faut savoir trouver la valeur de l'amplitude et de la phase initiale de ce signal. La relation de trigonométrie $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ (voir appendice mathématique) permet d'écrire : $A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos \varphi \cos(\omega t) - A \sin \varphi \sin(\omega t)$. On en déduit :

$$\cos \varphi = \frac{a}{A} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = -\frac{b}{A} \quad \text{d'où} \quad A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (1.8)$$

puisque $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$.

Pour déterminer φ on peut utiliser la méthode suivante qui donne une valeur comprise entre $-\pi$ et π : il s'agit de $\arccos\left(\frac{a}{A}\right)$ si $\sin \varphi > 0$ et de $-\arccos\left(\frac{a}{A}\right)$ si $\sin \varphi < 0$.

2.2 Phase instantanée, phase initiale

L'argument de la fonction cosinus est appelée **phase instantanée**.

Le signal oscille entre $-A$ et A : il vaut A aux instants où la phase instantanée est égale à $2n\pi$ où n est un entier, il vaut $-A$ aux instants où elle est égale à $(2n+1)\pi$, il vaut 0 et a une pente négative aux instants où elle est égale à $\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi$, et il vaut 0 et a une pente positive aux instants où elle est égale à $\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi$. Ceci est illustré sur la figure 1.3.

La **phase initiale** φ donne la valeur de départ du signal à $t = 0$. Elle dépend de l'origine des temps choisie. De plus, le cosinus étant une fonction périodique de période 2π , la phase initiale n'est définie qu'à un multiple entier de 2π près. On peut ainsi toujours se ramener à une phase initiale comprise entre $-\pi$ et π .

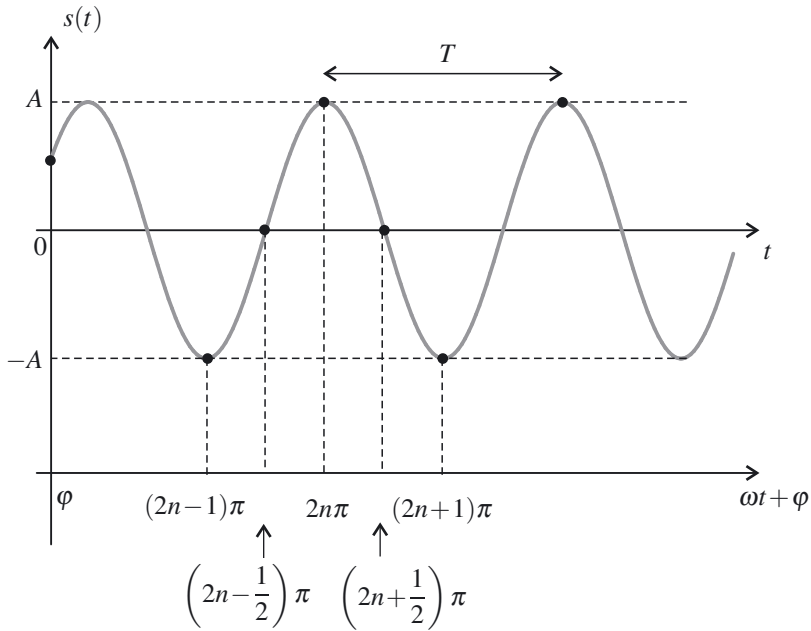


Figure 1.3 – Signal sinusoïdal. La valeur de la phase instantanée $\omega t + \varphi$ est indiquée en certains points, n est un entier.

2.3 Période, fréquence

a) Définitions

Un signal physique $s(t)$ est **périodique** s'il se répète dans le temps. Sa **période** T est la plus petite durée telle que :

$$s(t + T) = s(t).$$

La **fréquence** du signal :

$$f = \frac{1}{T}$$

est le nombre de répétitions du signal par unité de temps.

La période T se mesure en secondes (symbole s) ; la fréquence f se mesure en hertz (symbole Hz) : $1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1}$.

b) Relations entre pulsation, période et fréquence

On a vu plus haut qu'un signal sinusoïdal est périodique de période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Sa fréquence est donc reliée à la pulsation par les formules :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{ou} \quad \omega = 2\pi f.$$

c) Deux autres expressions du signal sinusoïdal

Le signal sinusoïdal $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ peut s'écrire aussi :

$$s(t) = A \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi\right) \quad \text{ou} \quad s(t) = A \cos(2\pi f t + \varphi).$$

2.4 Une interprétation géométrique

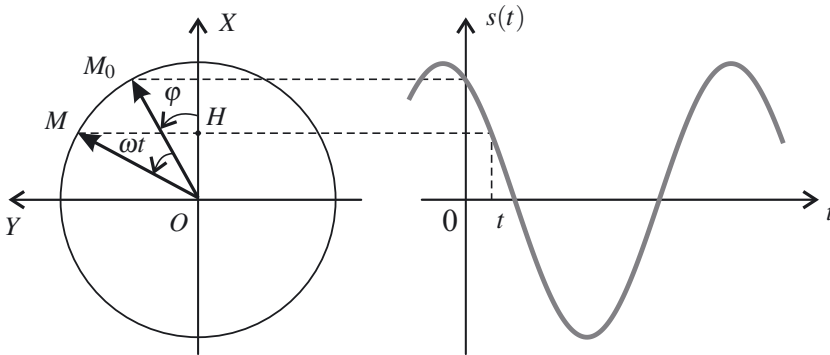


Figure 1.4 – Mouvement circulaire et signal sinusoïdal.

On peut donner du signal sinusoïdal $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ une image géométrique. On considère le cercle de rayon A centré à l'origine du repère orthonormé (OXY) (voir figure 1.4) et sur le cercle le point M_0 tel que l'angle entre le vecteur directeur $\vec{u}_X$ de l'axe (OX) et le vecteur $\vec{OM}_0$ vaut φ . Soit un point M se déplaçant sur le cercle avec la vitesse angulaire ω et passant par M_0 à l'instant initial. L'angle entre le vecteur $\vec{OM}$ et l'axe (OX) à l'instant t est $\theta(t) = \omega t + \varphi$ et l'abscisse de ce point est

$$X_M(t) = \overline{OH} = OM \cos \theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = s(t).$$

Le signal sinusoïdal est ainsi l'abscisse d'un point tournant à la vitesse angulaire ω .

2.5 Représentation de Fresnel (MPSI)

a) Définition du vecteur de Fresnel

On associe au signal $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ un vecteur appelé **vecteur de Fresnel**, qui a une norme égale à A et qui fait, à l'instant t , l'angle $\omega t + \varphi$ avec l'axe des abscisses.

Ce vecteur tourne autour de l'origine à la vitesse angulaire ω (voir figure 1.5). Il s'agit du vecteur $\overrightarrow{OM}$ du paragraphe précédent. Dans cet ouvrage le vecteur de Fresnel associé au signal $s(t)$ est noté $\vec{S}$.

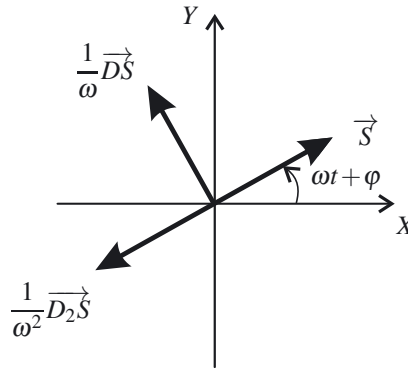


Figure 1.5 – Représentation de Fresnel d'un signal sinusoïdal et ses deux premières dérivées. Les vecteurs $\vec{S}$ et $\vec{D_2S}$ ont été multipliés respectivement par $\frac{1}{\omega}$ et $\frac{1}{\omega^2}$ pour une question d'homogénéité.

b) Vecteur de Fresnel du signal dérivé

La dérivée par rapport au temps d'un signal sinusoïdal $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ est aussi un signal sinusoïdal, en effet :

$$\frac{ds}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) = \omega A \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

L'amplitude de $\frac{ds}{dt}$ est égale à l'amplitude de $s(t)$ multipliée par ω et sa phase initiale est égale à la phase initiale de $s(t)$ augmentée de $\frac{\pi}{2}$. Ainsi :

Le vecteur de Fresnel associé à $\frac{ds}{dt}$ s'obtient à partir du vecteur de Fresnel associé à $s(t)$ en effectuant les opérations suivantes :

- on tourne le vecteur d'un angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens trigonométrique,
- on multiplie la norme du vecteur par ω (voir figure 1.5).

Le vecteur de Fresnel relatif à $\frac{ds}{dt}$ sera noté $\vec{D}\vec{S}$.

Si on dérive le signal deux fois, on tourne le vecteur d'un angle π et on multiplie sa norme par ω^2 . Ainsi le vecteur de Fresnel $\vec{D}_2\vec{S}$ associé à $\frac{d^2s}{dt^2}$ est :

$$\vec{D}_2\vec{S} = -\omega^2 \vec{S}.$$

Cette relation n'est autre que l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique de pulsation propre ω dont le signal sinusoïdal est solution. Elle est visualisée sur la figure 1.5.

2.6 Déphasage

a) Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux

On considère deux signaux sinusoïdaux : $s_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$.

On appelle **déphasage** du signal s_2 par rapport au signal s_1 la différence entre leurs phases instantanées :

$$\Delta\varphi(t) = (\omega_2 t + \varphi_2) - (\omega_1 t + \varphi_1) = (\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2 - \varphi_1.$$

Le déphasage est visible dans la représentation de Fresnel : il s'agit de l'angle allant du vecteur $\vec{S}_1$ au vecteur $\vec{S}_2$ (voir figure 1.6).

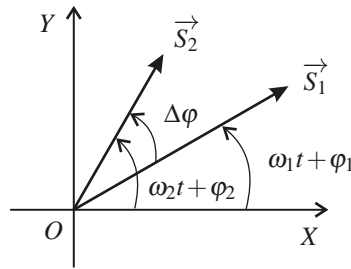


Figure 1.6 – Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux.

Quand les deux signaux sinusoïdaux ont la même fréquence (soit $\omega_1 = \omega_2$) leur déphasage est constant dans le temps et égal à la différence de leurs phases initiales :

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Dans la suite on se place uniquement dans ce cas et on note $\omega = \omega_1 = \omega_2$.

b) Valeurs remarquables du déphasage

Les signaux sont dits **en phase** si $\Delta\varphi$ est égal à 0 ou $2n\pi$ avec n entier. Dans ce cas :

$$\cos(\omega t + \varphi_2) = \cos(\omega t + \varphi_1 + 2n\pi) = \cos(\omega t + \varphi_1).$$

Les deux signaux passent par leurs valeurs maximales ou leur valeurs minimales en même temps, s'annulent en même temps. Les vecteurs de Fresnel ont à chaque instant même direction et même sens (voir figure 1.7).

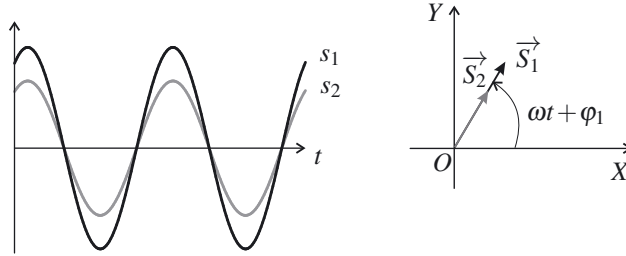


Figure 1.7 – Signaux sinusoidaux de même fréquence en phase.

Les signaux sont dits **en opposition de phase** si $\Delta\varphi$ est égal à π ou $(2n+1)\pi$ avec n entier. Dans ce cas :

$$\cos(\omega t + \varphi_2) = \cos(\omega t + \varphi_1 + (2n+1)\pi) = \cos(\omega t + \varphi_1 + \pi) = -\cos(\omega t + \varphi_1).$$

À un instant où l'un des signaux passe par sa valeur maximale, l'autre passe par sa valeur minimale. Il s'annulent en même temps mais l'un en croissant et l'autre en décroissant. Les vecteurs de Fresnel ont à chaque instant la même direction mais sont de sens opposés (voir figure 1.8).

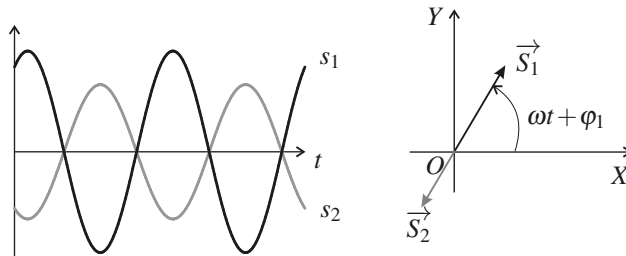


Figure 1.8 – Signaux sinusoidaux de même fréquence en opposition de phase.

Les signaux sont dits **en quadrature de phase** si $\Delta\varphi$ est égal à $\pm\frac{\pi}{2}$ ou $\left(2n\pm\frac{1}{2}\right)\pi$ avec n entier. Alors :

$$\cos(\omega t + \varphi_2) = \cos\left(\omega t + \varphi_1 + \left(2n\pm\frac{1}{2}\right)\pi\right) = \cos\left(\omega t + \varphi_1 \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin(\omega t + \varphi_1).$$

À un instant où l'un des signaux passe par sa valeur maximale, l'autre passe par zéro et réciproquement. Les vecteurs de Fresnel sont orthogonaux à chaque instant. On parle de

« quadrature avance » ou « quadrature retard » selon que s_2 est en avance ($\Delta\varphi = +\frac{\pi}{2} + 2n\pi$) ou en retard ($\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$) sur s_1 (voir figures 1.9 et 1.10).

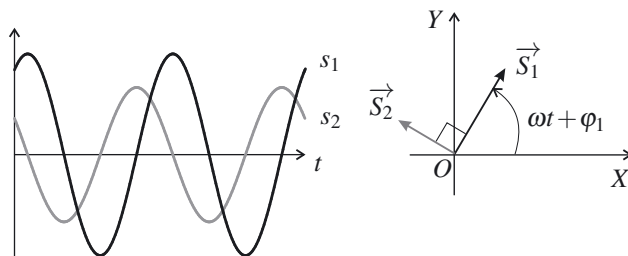


Figure 1.9 – Signaux sinusoïdaux de même fréquence en quadrature de phase. s_2 est en avance sur s_1 .

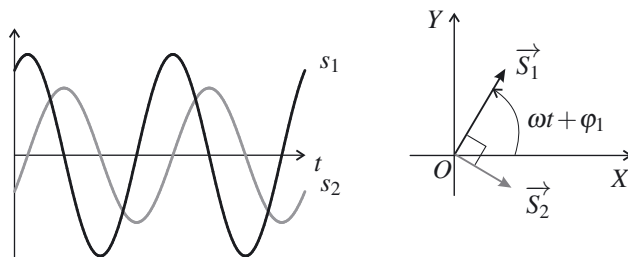


Figure 1.10 – Signaux sinusoïdaux de même fréquence en quadrature de phase. s_2 est en retard sur s_1 .

Remarque

La dérivée d'un signal sinusoïdal $s(t)$ est en quadrature avance sur $s(t)$. La dérivée seconde est en opposition de phase par rapport à $s(t)$. Un signal dont $s(t)$ est la dérivée (soit une primitive de $s(t)$), est en quadrature retard sur $s(t)$.

c) Mesure d'un déphasage

Expérimentalement on peut visualiser un signal en fonction du temps à l'aide d'un oscilloscope ou bien d'une carte d'acquisition reliée à un ordinateur. Pour cela, le signal doit être une tension électrique. Si le signal que l'on veut étudier n'est pas une tension, on utilise un capteur qui fournit une tension proportionnelle à ce signal.

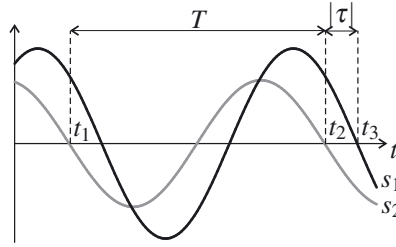


Figure 1.11 – Mesure du déphasage entre deux signaux sinusoïdaux.

La courbe donnant le signal au cours du temps est appelée **forme d'onde**. Dans le cas d'un signal sinusoïdal, on déduit de la forme d'onde :

- l'amplitude A , en mesurant la valeur maximale $s_{\max}$ et la valeur minimale $s_{\min}$, par la formule : $A = \frac{s_{\max} - s_{\min}}{2}$ (attention à ne pas oublier le facteur $\frac{1}{2}$) ;
- la période T , en mesurant les dates t_1 et $t_2 > t_1$ de deux annulations successives du signal avec la même pente (voir figure 1.11), par la formule : $T = t_2 - t_1$.

La phase initiale d'un seul signal sinusoïdal a peu d'intérêt pratique car elle dépend du choix de l'origine des temps. En revanche, le déphasage entre deux signaux sinusoïdaux de même fréquence est souvent une information importante.

Le déphasage est lié au décalage temporel entre les deux signaux. En effet :

$$\cos(\omega t + \varphi_2) = \cos(\omega t + \varphi_1 + \Delta\varphi) = \cos\left(\omega\left(t + \frac{\Delta\varphi}{\omega}\right) + \varphi_1\right) = \cos(\omega(t + \tau) + \varphi_1),$$

formule où apparaît le décalage temporel entre les deux signaux :

$$\tau = \frac{\Delta\varphi}{\omega}.$$

La mesure de τ conduit à la valeur de $\Delta\varphi$. Pour cela on repère : deux dates t_1 et t_2 consécutives en lesquelles la courbe s_2 s'annule avec la même pente, une date t_3 la plus proche possible de t_2 où le signal s_1 s'annule avec une pente du même signe (voir figure 1.11). On en déduit :

- la période du signal : $T = t_2 - t_1$;
- le décalage temporel : $\tau = t_3 - t_2$;
- le déphasage de s_2 par rapport à s_1 : $\Delta\varphi = \omega\tau = 2\pi \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}$.

La valeur du déphasage obtenue par cette méthode est comprise entre $-\pi$ et $+\pi$. Elle est positive si $s_2(t)$ est en avance sur $s_1(t)$ (cas de la figure 1.11) et négative si $s_2(t)$ est en retard.



Il faut contrôler le signe du résultat en observant le chronogramme : s_2 est en avance sur s_1 si, entre t_1 et t_2 , il atteint son maximum avant s_1 .

d) Utilisation de l'oscilloscope en « mode XY »

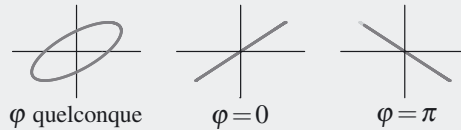
Lorsqu'on utilise un oscilloscope en « mode XY » on observe une courbe formée par les points donc l'abscisse est $X(t) = s_1(t)$ et l'ordonnée $Y(t) = s_2(t)$.

Dans le cas où $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont deux signaux sinusoïdaux, cette courbe est, pour un déphasage quelconque, une ellipse (voir annexe mathématique).

Si ces signaux sont en phase on a : $s_2(t) = \frac{A_2}{A_1}s_1(t)$ soit $Y(t) = \frac{A_2}{A_1}X(t)$. La courbe observée est donc une droite de pente positive.

Si ces signaux sont en opposition phase on a : $s_2(t) = -\frac{A_2}{A_1}s_1(t)$ soit $Y(t) = -\frac{A_2}{A_1}X(t)$. La courbe observée est donc une droite de pente négative.

L'utilisation de l'oscilloscope « en mode XY » permet de repérer facilement des signaux en phase ou en opposition de phase :



SYNTHÈSE*SAVOIRS*

- équation différentielle de l'oscillateur harmonique
- expression de la pulsation de l'oscillateur constitué par une masse accrochée à un ressort
- définitions d'un signal sinusoïdal, de son amplitude, sa pulsation, sa phase initiale
- relations entre la pulsation, la fréquence et la période
- représentation de Fresnel (MPSI)

SAVOIR-FAIRE

- établir l'équation différentielle d'une masse accrochée à un ressort
- résoudre l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique avec des conditions initiales données
- trouver l'amplitude et la phase initiale de la solution
- vérifier la conservation de l'énergie mécanique
- reconnaître l'amplitude, la phase initiale, la période, la fréquence, la pulsation d'un signal sinusoïdal donné
- trouver la phase instantanée à un instant où le signal est maximal, minimal, nul
- dessiner une représentation de Fresnel (MPSI)
- déterminer expérimentalement un déphasage

MOTS-CLÉS

- | | | |
|--------------------------|-------------|-----------------------------|
| • oscillateur harmonique | • période | • vecteur de Fresnel |
| • signal sinusoïdal | • fréquence | (MPSI) |
| • amplitude | • phase | • conservation de l'énergie |
| • pulsation | • déphasage | |

S'ENTRAÎNER

1.1 Reconnaître un oscillateur harmonique (★)

1. La tension électrique $v(t)$ aux bornes d'un oscillateur à quartz (tel qu'on en trouve dans les montres) vérifie l'équation différentielle : $\frac{d^2v}{dt^2} + Av(t) = 0$ avec $A = 4,239 \cdot 10^{10}$ USI. Quelle est l'unité de A ? Quelle est la fréquence de cet oscillateur ?

2. Un électron de masse $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg et de charge $q = -1,61 \cdot 10^{-19}$ C est piégé à l'intérieur d'un dispositif tel que son énergie potentielle est $E_p = \frac{1}{2} \frac{qV_0}{d^2} z^2$ où $V_0 = -5,0$ V et $d = 6,0$ mm. On s'intéresse à un mouvement de l'électron selon l'axe (Oz).

- Exprimer l'énergie mécanique de l'électron en fonction des données et de $z(t)$ de $\frac{dz}{dt}$.
- On suppose que l'énergie mécanique est constante dans le temps. Calculer la fréquence des oscillations de l'électron selon (Oz) dans le piège.

1.2 Mouvement sinusoïdal (★)

On filme avec une webcam le mobile étudié dans le premier paragraphe. À l'aide d'un logiciel permettant de relever image après image la position de G , on trouve que G passe par sa position d'équilibre, avec une vitesse dans le sens de (Ox), à l'instant $t_1 = 1,44 \pm 0,03$ s et qu'il passe ensuite pour la première fois au milieu entre la position d'équilibre et la position d'élongation maximale à l'instant $t_2 = 2,52 \pm 0,1$ s.

- Calculer la période des oscillations.
- Pourquoi n'a-t-on pas choisi de mesurer l'instant où le mobile passe par la position d'élongation maximale ?

1.3 Vibration d'un diapason (★)

Un diapason vibre à la fréquence du La4 soit $f = 440$ Hz. On mesure sur une photo l'amplitude du mouvement de l'extrémité des branches $A = 0,5$ mm. Quelle est la vitesse maximale de l'extrémité du diapason ? Quelle est l'accélération maximale de ce point ?

1.4 Énergie de l'oscillateur harmonique (★★)

L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique s'écrit : $E_m(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$. On suppose qu'il n'y a aucun phénomène dissipatif : l'énergie mécanique est donc constante.

- En utilisant la conservation de l'énergie, retrouver l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.
- On suppose que $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en fonction de m , ω_0 , A et $\cos(2\omega t + 2\varphi)$. On utilisera les formules : $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$ et $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$. Vérifier que l'énergie mécanique est bien constante.

3. Tracer sur un même graphe les courbes donnant l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en fonction du temps. Quelle est la fréquence de variation de ces énergies ?

1.5 Caractéristiques de signaux sinusoïdaux (★)

1. Donner l'amplitude, la période, la fréquence et la phase initiale des signaux suivants :

a. $x(t) = 15 \cos(100\pi t + 0,5)$;

b. $x(t) = 5 \sin(7,854 \cdot 10^6 t)$;

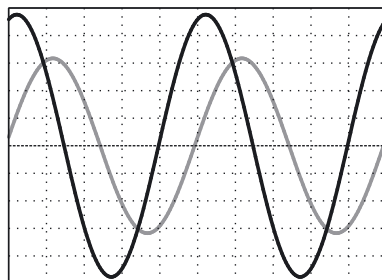
c. $x(t) = 2 \sin(120\pi t - \frac{\pi}{4})$;

d. $x(t) = 15 \cos(2,0 \cdot 10^3 \pi t) - 5 \sin(2,0 \cdot 10^3 \pi t)$ (indication : utiliser la représentation de Fresnel).

2. Quelle est la phase initiale d'un signal sinusoïdal qui vaut la moitié de sa valeur maximale et croît à l'instant $t = \frac{T}{4}$ où T est la période ?

1.6 Détermination d'un déphasage (★)

La figure représente un écran d'oscilloscope avec deux signaux sinusoïdaux de même fréquence $s_1(t)$ (en noir) et $s_2(t)$ (en gris). La ligne en tireté représente le niveau zéro pour les deux signaux. Une division de l'axe des temps correspond à 20 ms.



1. Déterminer la fréquence des signaux.
2. Caculer le déphasage de s_2 par rapport à s_1 .
3. Quelle est la phase de s_1 au point le plus à gauche de l'écran ?

APPROFONDIR

1.7 Vibration d'une molécule (★★)

La fréquence de vibration de la molécule de chlorure d'hydrogène HCl est $f = 8,5 \cdot 10^{13}$ Hz. On donne les masses atomiques molaires : $M_H = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_{Cl} = 35,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, ainsi que le nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

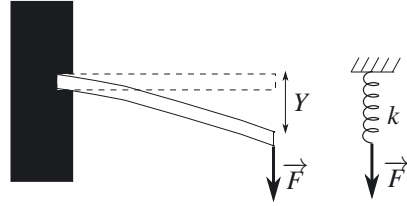
On modélise la molécule par un atome d'hydrogène mobile relié à un atome de chlore fixe par un « ressort » de raideur k .

1. Justifier l'hypothèse d'un atome de chlore fixe.
2. Calculer k .
3. On admet que l'énergie mécanique de la molécule est égale à $\frac{1}{2}hf$ où $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ est la constante de Planck. Calculer l'amplitude du mouvement de l'atome d'hydrogène.
4. Calculer sa vitesse maximale.

1.8 Un modèle d'élasticité d'une fibre de verre (★★)

Le verre est un matériau très dur. On peut toutefois le déformer légèrement sans le casser : on parle d'élasticité. Récemment, des expériences de biophysique ont été menées pour étudier l'ADN. Le capteur utilisé était simplement une fibre optique en silice amincie à l'extrémité de laquelle on accroche un brin d'ADN. L'expérience consistait à suivre la déformation de flexion de la fibre. La masse volumique du verre est $\rho = 2500 \text{ kg.m}^{-3}$.

La fibre de verre de longueur ℓ et de diamètre d est encastrée horizontalement dans une paroi immobile. Au repos, la fibre est horizontale (on néglige son poids). Quand on applique une force verticale F (on supposera que la force F reste verticale tout au long de l'expérience) à l'extrémité libre de la fibre, celle-ci est déformée. L'extrémité est déplacée verticalement d'une distance Y que l'on appelle la flèche (voir figure).



La flèche Y est donnée par la relation suivante (on notera la présence du facteur numérique 7, sans dimension, qui est en fait une valeur approchée pour plus de simplicité) : $\frac{7\ell^3 F}{Ed^4}$, où E est appelé module d'Young du verre. Pour les applications numériques on prendra pour le module d'Young $E = 7.10^{10} \text{ S.I.}$.

1. Quelle est l'unité S.I. du module d'Young E ?
2. En considérant uniquement la force F , montrer que l'on peut modéliser la fibre de verre par un ressort de longueur à vide nulle et de constante de raideur k dont on donnera l'expression analytique en fonction de E , d et ℓ .
3. Calculer numériquement k pour une fibre de longueur $\ell = 7 \text{ mm}$ et de diamètre $d = 10 \mu\text{m}$.

On a tous fait l'expérience suivante : faire vibrer une règle ou une tige lorsqu'une de ses extrémités est bloquée. On cherche ici à trouver les grandeurs pertinentes qui fixent la fréquence des vibrations. L'extrémité de la tige vaut $Y(t)$ à l'instant t . On admet que lors des vibrations de la fibre, l'énergie cinétique de la fibre de verre est donnée par l'expression $E_c = \rho \ell d^2 \left(\frac{dY}{dt} \right)^2$. Son énergie potentielle élastique lorsque la flèche vaut Y est :

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{Ed^4}{7\ell^3} Y^2.$$

4. Écrire l'expression de l'énergie mécanique de la fibre en négligeant l'énergie potentielle de pesanteur.
5. Justifier que l'énergie mécanique se conserve au cours du temps. En déduire l'équation différentielle qui régit les vibrations de la fibre.
6. Quelle est l'expression de la fréquence propre de vibration d'une tige de verre de module d'Young E , de longueur ℓ et de diamètre d ?
7. Calculer numériquement la fréquence des vibrations d'une fibre de verre de longueur 7 mm et de diamètre $0,01 \text{ mm}$.

CORRIGÉS

1.1 Reconnaître un oscillateur harmonique

1. A se mesure en s^{-2} . L'équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega = \sqrt{A}$ donc de fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{A}}{2\pi} = 32,77 \text{ kHz}$.

2. a. L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}m_e \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ et de l'énergie potentielle donnée, soit : $E_m = \frac{1}{2}m_e \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{qV_0}{d^2}z^2$ (on remarque que : $q_0V_0 > 0$ car $q < 0$ et $V_0 < 0$).

b. L'énergie mécanique étant conservée, $\frac{dE_m}{dt} = m_e \frac{d^2z}{dt^2} \frac{dz}{dt} + \frac{qV_0}{d^2} \frac{dz}{dt} z(t) = 0$, soit après simplification par $\frac{dz}{dt}$ et division par m : $\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{qV_0}{m_e d^2} z(t) = 0$.

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{qV_0}{m_e d^2}}$ et donc de fréquence $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{qV_0}{m_e d^2}} = 25 \cdot 10^6 \text{ Hz} = 25 \text{ MHz}$.

1.2 Mouvement sinusoïdal

1. Le mobile passe par sa position d'équilibre avec une vitesse dans le sens positif à t_1 . D'après la figure 1.3 du cours la phase du signal $x(t)$ à $t = t_1$ est $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. La loi horaire du mouvement est donc : $x(t) = A \cos\left(\omega(t-t_1) - \frac{\pi}{2}\right) = A \sin(\omega(t-t_1))$.

À l'instant t_2 , $x(t_2) = \frac{A}{2}$, donc $\sin(\omega(t_2-t_1)) = \frac{1}{2}$, soit $\omega(t_2-t_1) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$. Ainsi :

$$\omega = \frac{\pi}{6(t_2-t_1)} \text{ d'où } T = \frac{2\pi}{\omega} = 12(t_2-t_1) = 13,0 \pm 0,5 \text{ s.}$$



Pour encadrer le résultat il faut le calculer avec les valeurs extrêmes des données. Par exemple la valeur maximale de T est : $12 \times (2,52 + 0,1 - (1,44 - 0,03)) = 15,0 \text{ s}$.

2. La mesure de l'instant de passage à la position d'élongation maximale est imprécise car la vitesse du mobile s'annule à cet instant.

1.3 Vibration d'un diapason

La loi horaire du mouvement de l'extrémité du diapason est : $x(t) = A \cos(2\pi f t + \varphi)$, et la vitesse est : $\frac{dx}{dt} = -2\pi f A \sin(2\pi f t + \varphi)$. La valeur maximale de la vitesse est :

$$v_{\max} = 2\pi f A = 2\pi \times 440 \times 0,5 \cdot 10^{-3} = 1,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

CHAPITRE 1 – OSCILLATEUR HARMONIQUE

L'accélération instantanée est $\frac{d^2x}{dt^2} = -4\pi^2 f^2 A \cos(2\pi ft + \varphi)$. La valeur maximale de l'accélération est : $a_{\max} = 4\pi^2 f^2 A = 3,8 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1.4 Énergie de l'oscillateur harmonique

1. Il suffit de dériver par rapport au temps la relation : $\frac{1}{2}m\omega_0^2 x(t)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = E_m =$ constante. Il vient : $m\omega_0^2 x(t) \frac{dx}{dt} + m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} = 0$, puis après simplification par $\frac{dx}{dt}$ et division par m on obtient : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0$.

2. $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ donc $\frac{dx}{dt} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi)$. Il vient donc :

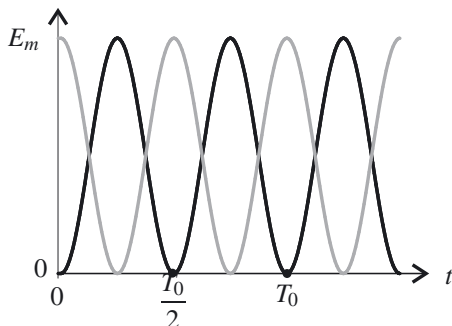
$$E_c(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2 (1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)),$$

et

$$E_p(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2 (1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)).$$

Il apparaît clairement que $E_c(t) + E_p(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2$.

3. L'évolution dans le temps des énergies cinétique et potentielle est représentée sur la figure ci-contre dans le cas où $v_0 = 0$: $E_c(t)$ en noir et $E_p(t)$ en gris. L'énergie cinétique et l'énergie potentielle oscillent au cours du temps, avec une pulsation $2\omega_0$ donc une période deux fois plus petite que la période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ de l'oscillateur. Chacune des deux vaut en moyenne $\frac{E_m}{2}$. Il y a un échange continu entre ces deux formes d'énergie.

**1.5 Caractéristiques de signaux sinusoïdaux**

1. a. Amplitude : $A = 15$, période : $T = 2,00 \cdot 10^{-2} \text{ s}$, fréquence : $f = 50 \text{ Hz}$, phase initiale : $\varphi = 0,5 \text{ rad}$.

b. $A = 5$, $T = 8,000 \cdot 10^{-7} \text{ s}$, $f = 1,250 \text{ MHz}$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

c. $A = 2$, $T = 1,67 \cdot 10^{-2} \text{ s}$, $f = 60,0 \text{ Hz}$, $\varphi = -\frac{3\pi}{4} \text{ rad}$.

d. $A = \sqrt{15^2 + 5^2} = 15,8$, $T = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ s}$, $f = 1,0 \cdot 10^3 \text{ Hz}$, $\varphi = \arctan \frac{5}{15} = 0,32 \text{ rad}$.

2. Le signal s'écrit $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$. On sait que $s(\frac{T}{4}) = \frac{A}{2}$ soit $\cos(\frac{\pi}{2} + \varphi) = \frac{1}{2}$, donc $\frac{\pi}{2} + \varphi = \pm \arccos(\frac{1}{2}) = \pm \frac{\pi}{3}$, soit $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ ou $-\frac{5\pi}{6}$.