BL
2e année

Sylvain Rondy
Pierre Berlandi
Jean-Paul Huvelin
Pascal Mano
Gianfranco Niffoi
Anne-Sophie Pierson-Fertel
Nicolas Pierson

PRÉPAS SCIENCES
COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHS

2e édition

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés

ellipses

PRÉPAS SCIENCES
collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Mathématiques BL - 2e année

2e édition

ouvrage coordonné par

Sylvain RONDY
Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Pierre BERLANDI
Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Jean-Paul HUVELIN
Professeur au lycée Pothier (Orléans)

Pascal MANO
Professeur au lycée Lakanal (Sceaux)

Gianfranco NIFFOI
Professeur au lycée Saint Michel de Picpus (Paris)

Anne-Sophie PIERSON-FERTEL
Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Nicolas PIERSON
Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

ellipses

COLLECTION
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

Les notices culturelles « Un mathématicien » et « Un peu d'histoire » des pages de titre des chapitres ont été rédigées par Bertrand Hauchecorne.

ISBN 9782340-063594
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir surveillé, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire toutes les notions à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir surveillé ou le passage d'une colle relative au thème traité. Les résultats sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthode » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Compléments indispensables du cours, elles l'éclairent et l'illustrent.

La partie « vrai/faux » vous permet de tester votre recul par rapport au programme, vous révéler les mauvais réflexes à corriger. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi cet ouvrage vous accompagnera tout au long de l'année et vous guidera dans votre cheminement **vers la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

1.	Fonctions polynômes	1
2.	Somme de sous-espaces. Projecteurs et symétries	31
3.	Diagonalisation	61
4.	Produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ – Norme – Orthogonalité	105
5.	Supplémentaires et projecteurs orthogonaux	129
6.	Développements limités	167
7.	Intégrales impropres	189
8.	Variables aléatoires à densité	233
9.	Lois à densité usuelles	275
10.	Loi faible des grands nombres – Intervalle de confiance	315
11.	Fonctions de deux variables	349
	Index	389

Chapitre 1

Fonctions polynômes

UN MATHÉMATICIEN



De son vrai nom **Niccolo Fontana, Tartaglia** (1499-1557) est issu d'une famille pauvre. Devenu adulte, il gagne sa vie en enseignant les mathématiques et en donnant des conseils à des commerçants pour mieux gérer leurs affaires. La connaissance de la formule de résolution des équations polynomiales du troisième degré lui permet de remporter de nombreux concours. C'est cependant le mathématicien et médecin milanais Jérôme Cardan qui publie cette formule en 1545.

Un peu d'histoire

Les premiers polynômes sont apparus dans des problèmes se ramenant à des équations polynomiales du second ou du troisième degré. Pour le second degré, Brahmagupta au VII^{e} siècle puis Al-Khwarizmi au début du IX^{e} siècle en ont donné les solutions. Les mathématiciens italiens de la Renaissance, Cardan, Tartaglia et Ferrari, ont résolu celles du troisième et du quatrième degré.

Par la suite, les polynômes ont joué un rôle important en analyse sous la forme de fonctions, en particulier pour obtenir des approximations de fonctions plus complexes : ce sont les développements limités introduit par Joseph Lagrange en 1797. Il faut attendre le tournant du XX^{e} siècle pour voir apparaître les polynômes formels, c'est-à-dire détachés de la notion de fonction ou d'équation.

Objectifs

Les incontournables

- Savoir déterminer le degré et le coefficient dominant d'un polynôme.
- Maîtriser les opérations sur les polynômes et connaître les formules sur le degré d'une somme ou d'un produit de polynômes.
- Connaître le théorème de la division euclidienne.
- Savoir dériver un polynôme.
- Connaître et utiliser la notion de racines multiples.
- Savoir factoriser un polynôme.

Et plus si affinités

- Savoir établir certaines propriétés sur des familles de polynômes définies par récurrence.

■■ Résumé de cours

■ Rappels

Définition 1.1. — On appelle *scalaire* tout nombre qui est, soit réel, soit complexe.

Définition 1.2. — On appelle fonction polynôme à coefficients réels toute fonction P, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par une expression de la forme $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ (avec la convention $x^0 = 1$), où a_0, a_1, ..., a_n ($n \in \mathbb{N}$) sont des réels appelés *coefficients* de P.
Si tous les coefficients de P sont nuls, P est appelé le polynôme nul et on note $P = 0$.

Notation 1.1 — L'ensemble des polynômes à coefficients réels est noté $\mathbb{R}[x]$.

Définition 1.3. — Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}[x]$ défini par $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, où n est un entier tel que $a_n \neq 0$. L'entier n est appelé *degré* de P (on note $\deg P = n$) et a_n est appelé *coefficient dominant* de P.
Si $a_n = 1$, le polynôme P est dit *normalisé* ou *unitaire*.

Notation 1.2 — L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{R}_n[x]$.
Les polynômes de degré 0 sont les polynômes constants et non nuls.
Par convention, le polynôme nul est de degré $-\infty$.

Propriété 1.1. — Deux polynômes sont égaux s'ils ont même degré et mêmes coefficients.

Propriété 1.2. — L'addition des polynômes, la multiplication d'un polynôme par un scalaire et le produit des polynômes se déduisent des opérations en vigueur sur les fonctions.

⇨ **Méthode 1.1. Comment multiplier deux polynômes factorisés ?**
⇨ **Méthode 1.2. Comment multiplier deux polynômes développés ?**

Exemple 1.1. — Si $P(x) = 3x^2 + 5x - 1$ et $Q(x) = 2x - 3$, alors on a, par exemple :
$(2P - 3Q)(x) = 2(3x^2 + 5x - 1) - 3(2x - 3) = 6x^2 + 10x - 2 - 6x + 9 = 6x^2 + 4x + 7$.
$(PQ)(x) = (3x^2 + 5x - 1)(2x - 3) = 6x^3 - 9x^2 + 10x^2 - 15x - 2x + 3 = 6x^3 + x^2 - 17x + 3$.

Propriété 1.3. — Soit P et Q deux polynômes.

$$PQ = 0 \Leftrightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0.$$

Propriété 1.4. — Soit P et Q deux polynômes.

$$\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q).$$

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q.$$

Remarque 1.1. — Si P et Q sont de degrés distincts, alors : $\deg(P+Q) = \max(\deg P, \deg Q)$.

■ La division euclidienne

Théorème 1.1. — Théorème de la division euclidienne.
Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$ avec $B \neq 0$. Alors, il existe un unique couple (Q,R) de polynômes de $\mathbb{R}[x]$ tel que $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$.

⇨ **Méthode 1.3. Comment diviser deux polynômes avec la méthode des coefficients indéterminés ?**
⇨ **Méthode 1.4. Comment diviser deux polynômes en « posant » la division euclidienne ?**

Définition 1.4. — Les polynômes Q et R sont appelés respectivement *quotient* et *reste* dans la division euclidienne de A par B.

⇨ **Méthode 1.7. Comment déterminer le reste dans une division ?**

Théorème 1.2. — Si $\deg A > \deg B$, alors on a : $\deg Q = \deg A - \deg B$.

Définition 1.5. — On dit qu'un polynôme non nul B divise un polynôme A ou que A est divisible par B si le reste dans la division de A par B est nul. Autrement dit, B divise A s'il existe un polynôme Q tel que $A = BQ$. On dit aussi que A est multiple de B.

⇨ **Méthode 1.5. Comment montrer qu'un polynôme *B* divise un polynôme *A* donné ?**

■ Polynôme dérivé

Définition 1.6. — Soit P le polynôme défini par $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

Si P est un polynôme constant, alors le polynôme dérivé de P est le polynôme nul.
Si $\deg P \geq 1$, alors le polynôme dérivé de P est le polynôme noté P' défini par :

$$P'(x) = \sum_{i=1}^{n} i\, a_i\, x^{i-1}$$

Définition 1.7. — On définit les polynômes dérivés successifs de P, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, par $P^{(k)} = \left(P^{(k-1)}\right)'$, avec la convention : $P^{(0)} = P$.

Théorème 1.3. — Soit P le polynôme de degré n défini par $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad (a_n \neq 0)$.

$\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\deg P^{(k)} = n - k$ et $P^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{n} \frac{i!}{(i-k)!} a_i\, x^{i-k}$. En particulier : $P^{(n)}(x) = n! a_n$.

$\forall k \in [\![n+1, +\infty[\![$, $P^{(k)} = 0$.

■ Racines d'un polynôme

Définition 1.8. — Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ et r un scalaire. On dit que r est une racine du polynôme P si $P(r) = 0$.

Théorème 1.4. — Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ et r un scalaire.
r est racine de P si et seulement si le polynôme $x - r$ divise P.

Théorème 1.5. — Soit n un entier naturel non nul. Si P est un polynôme qui admet n racines distinctes $r_1, r_2, ..., r_n$, alors le polynôme $\prod_{i=1}^{n} (x - r_i)$ divise P.

Propriété 1.5. — Tout polynôme non nul de degré n admet au plus n racines distinctes.

Propriété 1.6. — Un polynôme de degré inférieur ou égal à n et qui possède au moins $n+1$ racines est le polynôme nul.
En particulier, tout polynôme qui admet une infinité de racines est nul.

⇨ **Méthode 1.6. Comment montrer que deux polynômes sont égaux ?**

Théorème 1.6. — Tout polynôme de degré *impair* admet au moins une racine *réelle*.

Définition 1.9. — Soit P un polynôme, r un scalaire et m un entier naturel non nul.
On dit que r est racine d'ordre de multiplicité m du polynôme P si $(x-r)^m$ divise $P(x)$ et si $(x-r)^{m+1}$ ne divise pas $P(x)$.

Propriété 1.7. — Autrement dit, r est racine d'ordre de multiplicité m de P s'il existe un polynôme Q tel que $P(x)=(x-r)^m Q(x)$ avec $Q(r)\neq 0$.

Théorème 1.7. — Soit P un polynôme et m un entier naturel non nul. Le scalaire r est une racine d'ordre de multiplicité m de P si et seulement si :

$$\forall k\in[\![0,m-1]\!],\ P^{(k)}(r)=0 \text{ et } P^{(m)}(r)\neq 0$$

Exemple 1.2. — Soit P le polynôme défini par $P(x)=2x^4-3x^3-x^2+3x-1$. Montrer que 1 est racine double de P.

On a : $P'(x)=8x^3-9x^2-2x+3$, $P''(x)=24x^2-18x-2$.

On vérifie aisément que $P(1)=P'(1)=0$ et que $P''(1)\neq 0$: 1 est donc bien racine double de P.

■ Factorisation d'un polynôme

❑ Factorisation dans $\mathbb{C}[x]$

Théorème 1.8. — Théorème de d'Alembert-Gauss.
Tout polynôme de degré n à coefficients réels admet exactement n racines complexes, comptées chacune avec leur ordre de multiplicité.

Théorème 1.9. — Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ de degré n. Si l'on note r_1, r_2,..., r_p les p racines complexes distinctes de P d'ordres de multiplicité respectifs α_1, α_2,..., α_p (avec p un entier naturel non nul) tel que $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i=n$, on a : $P(x)=a_n\prod_{i=1}^{p}(x-r_i)^{\alpha_i}$, où a_n est le coefficient dominant de P.

⇨ **Méthode 1.8. Comment factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[x]$?**

❑ Factorisation dans $\mathbb{R}[x]$

Propriété 1.8. — Soit a un complexe et P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$.
Si a est racine du polynôme P alors $\overline{a}$ est aussi racine de P avec le même ordre de multiplicité.

Théorème 1.10. — Tout polynôme P de $\mathbb{R}[x]$ peut s'écrire comme produit de polynômes à coefficients réels de degré 1 et de polynômes à coefficients réels de degré 2 n'ayant pas de racines réelles.

⇨ **Méthode 1.9. Comment factoriser un polynôme dans $\mathbb{R}[x]$?**

Exemple 1.3. — $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ et $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$.

■ Produit de polynômes

❑ Méthode 1.1. Comment multiplier deux polynômes factorisés ?

C'est le cas le plus simple, il suffit de regrouper les facteurs communs.

⇨ Exercice 1.10

Exemple. On pose $P(x)=(x^2-1)^2$ et $Q(x)=x^2(x-1)^3(x+1)$.

On écrit d'abord $P(x)=(x-1)^2(x+1)^2$, puis on a $(PQ)(x)=x^2(x-1)^5(x+1)^3$.

❑ Méthode 1.2. Comment multiplier deux polynômes développés ?

Soient P et Q deux polynômes définis par : $P(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ et $Q(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$.

Par convention, on décide que : $\forall i>n,\ a_i=0$ et $\forall j>m,\ b_j=0$.

On a alors $(PQ)(x)=\sum_{p=0}^{n+m} c_p x^p$, avec : $\forall p\in[\![0,n+m]\!],\ c_p=\sum_{k=0}^{p} a_k b_{p-k}$.

⇨ Exercice 1.10

Exemple. On pose pour tout entier naturel n : $P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}x^k$ et $Q(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k}{k!}x^k$.

Exprimer simplement le produit PQ.

On a $(PQ)(x)=\sum_{p=0}^{2n} c_p x^p$ avec : $\forall p\in[\![0,2n]\!],\ c_p=\sum_{k=0}^{p}\frac{2^k}{k!}\frac{3^{p-k}}{(p-k)!}=\frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{p}\frac{p!}{k!(p-k)!}2^k3^{p-k}$.

$c_p=\frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}2^k3^{p-k}=\frac{5^p}{p!}$ (binôme de Newton). Finalement : $(PQ)(x)=\sum_{p=0}^{2n}\frac{5^p}{p!}x^p$.

■ Division euclidienne

❑ Méthode 1.3. Comment diviser deux polynômes avec la méthode des coefficients indéterminés ?

Deux polynômes de même degré sont égaux s'ils ont les mêmes coefficients : ceci justifie la méthode d'identification des coefficients présentée ci-dessous.

⇨ **Exercice 1.7**

Exemple. Déterminer quotient et reste dans la division de $2x^3-5x^2-3x+4$ par $x-2$.
Le quotient est de degré 2 et le reste est constant, on peut donc poser :
$2x^3-5x^2-3x+4=(x-2)(ax^2+bx+c)+d$.

On développe et on ordonne : $2x^3-5x^2-3x+4=ax^3+(-2a+b)x^2+(-2b+c)x+(-2c+d)$.

On identifie les coefficients des monômes de même degré :

$\begin{cases} a=2 \\ -2a+b=-5 \\ -2b+c=-3 \\ -2c+d=4 \end{cases}$. D'où : $\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=-5 \\ d=-6 \end{cases}$. On a donc : $2x^3-5x^2-3x+4=(x-2)(2x^2-x-5)-6$.

❑ Méthode 1.4. Comment diviser deux polynômes en « posant » la division euclidienne ?

On remarquera la similitude de cette méthode avec celle de la division euclidienne sur des entiers. Le plus simple est de suivre l'exemple ci-dessous.
Voici le détail du début : « en A, combien de "fois" B » ou encore « en $2x^3$, combien de "fois" x^2 » ? Il y va $2x$ fois. Puis on développe $2x(x^2-1)$. Le résultat est placé sous le dividende auquel on le retranche. La division s'arrête lorsque le reste est de degré inférieur strictement à celui du diviseur.

⇨ **Exercices 1.1, 1.2, 1.4**

Exemple. Déterminer quotient et reste dans la division de $2x^3-x^2-x+2$ par x^2-1.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-x^2-x+2 & x^2-1 \\ \cline{2-2} -(2x^3\quad -2x) & 2x-1 \\ \cline{1-1} -x^2+x+2 & \\ -(-x^2\quad +1) & \\ \cline{1-1} x+1 & \end{array}$$

Le quotient est donc $2x-1$ et le reste est $x+1$.

■ Racines d'un polynôme

❑ Méthode 1.5. Comment montrer qu'un polynôme *B* divise un polynôme *A* donné ?

Soit un polynôme *A* donné de $\mathbb{R}[x]$.
Pour montrer qu'un polynôme *B* divise *A*, on montre que **toutes** les racines de *B*, en tenant compte de leur ordre de multiplicité, sont racines de *A*.
Comme *A* est un polynôme à coefficients réels, il faut se souvenir que si *a* est une racine complexe de *A*, alors $\overline{a}$ est aussi racine de *A*. On fait ainsi l'économie d'un calcul.

⇨ **Exercices 1.4, 1.8**

Exemple 1. On considère un entier naturel *n* supérieur ou égal à 2 ainsi que les deux polynômes *A* et *B* définis par $A(x)=x^n-2x^{n-1}-x+2$ et $B(x)=x^2-3x+2$. Montrer que *B* divise *A*.
B admet deux racines réelles qui sont 1 et 2.
Or $A(1)=1-2-1+2=0$ et $A(2)=2^n-2\times 2^{n-1}-2+2=0$ donc 1 et 2 sont racines de *A*.
Ainsi, *B* divise *A*.

Exemple 2. On considère un entier naturel *n* non nul ainsi que les deux polynômes *A* et *B* définis par $A(x)=x^{2n}-2x^{n-1}-2x+3$ et $B(x)=(x-1)^2$. Montrer que *B* divise *A*.
B admet 1 pour racine double.
$A(1)=1-2-2+3=0$. De plus, $A'(x)=2nx^{2n-1}-2(n-1)x^{n-2}-2$ ce qui donne :
$A'(1)=2n-2(n-1)-2=0$. En conclusion, 1 est racine double de *A* donc *B* divise *A*.

Exemple 3. Soit les deux polynômes *A* et *B* définis par $A(x)=x^8-2x^2-3$ et $B(x)=x^2+1$. Montrer que *B* divise *A*.
B admet deux racines complexes conjuguées : *i* et $-i$.
On a $A(i)=i^8-2i^2-3=1+2-3=0$. Comme *i* est racine de *A* et comme *A* est à coefficients réels, alors $-i$ est aussi racine de *A*. On conclut encore une fois que *B* divise *A*.

❑ Méthode 1.6. Comment montrer que deux polynômes sont égaux ?

On peut tenir le raisonnement suivant : si deux polynômes, *P* et *Q*, de $\mathbb{R}_n[x]$ sont tels que, pour tout *i* de $[\![0,n]\!]$, $P(a_i)=Q(a_i)$, alors *P* et *Q*, sont égaux.
En effet, $P-Q$ possède $n+1$ racines distinctes (a_0, ..., a_n) et comme $P-Q$ est élément de $\mathbb{R}_n[x]$, alors (**propriété 1.6**) $P-Q$ est le polynôme nul, donc $P=Q$.

⇨ **Exercice 1.12**

Exemple. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ tel que, pour tout réel x on a $P(x+1)=P(x)$ et Q le polynôme constant défini par : $Q=P(0)$. Montrer que $P = Q$.

En évaluant l'égalité polynomiale $P(x+1)=P(x)$ en tout entier naturel n, on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $P(n+1)=P(n)$. Ensuite, on trouve par récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}$, $P(n)=P(0)$.

Ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $P(n)-P(0)=0$. Ceci montre que le polynôme $P-P(0)$ possède une infinité de racines (tous les entiers naturels) donc c'est le polynôme nul et on a bien $P=Q$.

❑ Méthode 1.7. Comment déterminer le reste dans une division ?

Dans la division euclidienne du polynôme A par un polynôme non nul B, on a :

$$A=BQ+R \text{ avec } \deg R<\deg B.$$

On écrit cette égalité pour chacune des racines de B. Cela donne, en général, assez d'équations pour trouver les coefficients de R. S'il manque des équations, c'est que B a des racines multiples. On pensera alors à dériver l'égalité $A=BQ+R$ et si α est une racine multiple de B, on évaluera cette nouvelle égalité en α.

⇨ **Exercice 1.5**

Exemple 1. Soit deux polynômes A et B définis par $A(x)=x^n-2x^{n-1}+5$ et $B(x)=x^2-3x+2$ ($n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$). Déterminer le polynôme R, reste dans la division euclidienne de A par B.

On sait qu'il existe un unique couple de polynômes (Q,R) tel que $A=BQ+R$ avec $\deg R<\deg B$. Comme $\deg B=2$, on a nécessairement $R(x)=ax+b$, avec a et b réels.

Par ailleurs, B admet deux racines réelles qui sont 1 et 2. En évaluant l'égalité polynomiale $x^n-2x^{n-1}+5=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$ en 1 puis en 2, on obtient deux équations :

$1-2+5=a+b$ et $2^n-2\times 2^{n-1}+5=2a+b$. On a donc : $a+b=4$ et $2a+b=5$ ce qui conduit à : $a=1$ et $b=3$.

Le reste R dans la division euclidienne de A par B est défini par : $R(x)=x+3$.

Exemple 2. Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, et deux polynômes A et B définis par $A(x)=x^n-4x+1$ et $B(x)=(x-1)^2$. Déterminer le polynôme R reste dans la division euclidienne de A par B.

B est encore un polynôme de degré 2. Mais cette fois-ci, B n'a que la racine 1.

On a donc une seule équation : $a+b=-2$. Pour en trouver une autre, on dérive l'égalité $x^n-4x+1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$, ce qui donne : $nx^{n-1}-4=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$.

En évaluant en 1, on obtient : $a=n-4$, puis $b=2-n$.

Le reste dans la division euclidienne de A par B est donc R défini par : $R(x)=(n-4)x+2-n$.

■ Factorisation

❑ Méthode 1.8. Comment factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[x]$?

On cherche toutes les racines du polynôme, qu'elles soient réelles ou complexes, en tenant compte de leur ordre de multiplicité. Puis on applique la formule du **théorème 1.9** en prenant garde de ne pas oublier le coefficient dominant.

⇨ **Exercice 1.8**

Exemple. Factoriser dans $\mathbb{C}[x]$ le polynôme A défini par $A(x)=x^4+1$.

Les racines de A sont les complexes z solutions de l'équation $z^4+1=0$ c'est-à-dire $z^4=-1$.

Comme $-1=e^{i\pi}$, les racines de A sont : $e^{i\frac{\pi}{4}}$, $e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $e^{-i\frac{3\pi}{4}}$. La factorisation de A est :

$$A(x)=\left(x-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(x-e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(xe^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(x-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$$

❑ Méthode 1.9. Comment factoriser un polynôme dans $\mathbb{R}[x]$?

- On peut parfois repérer des identités remarquables.
- Sinon, on peut factoriser d'abord le polynôme P dans $\mathbb{C}[x]$ en appliquant la méthode ci-dessus. Comme P est à coefficients **réels**, on sait que, si a est une racine complexe de P, alors $\overline{a}$ est racine de P. Il ne reste plus qu'à regrouper les facteurs $(x-a)$ et $(x-\overline{a})$ puis à utiliser l'égalité :

$$(x-a)(x-\overline{a})=x^2-2\,\mathrm{Re}(a)x+|a|^2.$$

⇨ **Exercice 1.7**

Exemple. Factoriser dans $\mathbb{R}[x]$ le polynôme A défini par $A(x)=x^4+1$.

On reprend la factorisation précédente en rassemblant les racines conjuguées :

$A(x)=\left(x-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(x-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(x-e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(x-e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)$. On obtient :

$$A(x)=\left(x^2-2\mathrm{Re}(e^{i\frac{\pi}{4}})x+1\right)\left(x^2-2\mathrm{Re}(e^{i\frac{3\pi}{4}})x+1\right)=\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right).$$

Remarque. On pouvait aussi écrire plus rapidement : $A(x)=\left(x^2+1\right)^2-2x^2$ en reconnaissant le début d'un carré, puis, avec une identité remarquable : $A(x)=\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$.

Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Si P et Q sont deux polynômes de degré n, alors $\deg(P+Q)=n$.	☐	☐
2.	Si P est un polynôme de degré n, $\deg P^2 = n^2$.	☐	☐
3.	x^4+x^2+1 n'a pas de racines réelles.	☐	☐
4.	Deux polynômes normalisés (unitaires) ayant les mêmes racines avec le même ordre de multiplicité sont égaux.	☐	☐
5.	Si P est un polynôme périodique, alors P est constant.	☐	☐
6.	Si P est un polynôme de degré 3 admettant 1, 2 et 3 pour racines, alors $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$.	☐	☐
7.	Si un polynôme a tous ses coefficients positifs, alors ses racines sont dans $\mathbb{R}_-$.	☐	☐
8.	Soit n un entier naturel non nul. Le coefficient dominant du polynôme $(x+1)^n-(x-1)^n$ est $2n$.	☐	☐
9.	Si P est un polynôme de monôme dominant $a_n x^n$, alors $P^{(n)}=a_n$.	☐	☐
10.	Un polynôme peut être égal à son polynôme dérivé.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

❑ **Exercice 1.1.** — Effectuer la division euclidienne du polynôme A par le polynôme B dans les cas suivants :

1. $A(x)=x^3-3x^2$, $B(x)=x^2-x+2$.

2. $A(x)=-16x^4-64x^2-x-100$, $B(x)=4x^2+4x+10$.

3. $A(x)=x^4+6x^2-2x+5$, $B(x)=x^3-x^2+4x-4$.

❑ **Exercice 1.2.** — Soit A et B les polynômes définis par $A(x)=x^4-4x^3+ax^2-4x+b$ et $B(x)=x^2-4x+5$. Déterminer les valeurs des réels a et b pour que B divise A.

❑ **Exercice 1.3.** — On considère le polynôme P_n défini par :

$$P_n(x)=(1+x)(1-x^n)+(2-n)x^n-n^2x^n(1-x)+n-2, \text{ où } n\geq 2.$$

1. Développer et ordonner P_n.

2. Montrer que 1 est racine double du polynôme P_n.

❑ **Exercice 1.4.** — On pose $B(x)=(x-1)^2$.

1. Effectuer la division euclidienne par B des polynômes suivants :

a) A_2 défini par $A_2(x)=2x^3-3x^2+1$

b) A_3 défini par $A_3(x)=3x^4-4x^3+1$.

2. Soit n un entier naturel non nul. On pose $A_n(x)=ax^{n+1}+bx^n+1$.

a) Déterminer en fonction de n les réels a et b pour que B divise A_n.

b) Avec les valeurs de a et b trouvées ci-dessus, déterminer le polynôme quotient dans la division de A_n par B.

❑ **Exercice 1.5.** — Soit a et b deux réels et P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$.

On note B le polynôme défini par $B(x)=(x-a)(x-b)$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par B.

❑ **Exercice 1.6.** — Soit la suite de polynômes (P_n) définie par :

$$P_0(x)=1 \text{ et : } \forall n\in\mathbb{N}^*,\ P_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\ldots+\frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{n!}.$$

1. Écrire $P_1(x)$, $P_2(x)$ et $P_3(x)$ sous forme factorisée.

2. En déduire une décomposition de $P_n(x)$ en produit de polynômes irréductibles.

❑ **Exercice 1.7.** — Factoriser dans $\mathbb{R}[x]$ les polynômes *A*, *B* et *C* suivants :

1. $A(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. **2.** $B(x) = x^6 - 7x^3 - 8$. **3.** $C(x) = x^4 + x^2 + 1$.

❑ **Exercice 1.8.*** — Soit n un entier naturel non nul et a un réel. On pose :

$$A_n(x) = x^{n+1}\cos\big((n-1)a\big) - x^n\cos(na) - x\cos a + 1 \text{ et } B(x) = x^2 - 2x\cos a + 1.$$

Montrer que A_n est divisible par *B*.

❑ **Exercice 1.9.*** — Soit *n* et *m* deux entiers naturels. On pose :

$$P(x) = (1+x)^n \text{ et } Q(x) = (1+x)^m.$$

1. Écrire le produit $(PQ)(x)$ sous forme développée de deux manières différentes.

2. a) En déduire, pour tout *p* de $[\![0, n+m]\!]$, que : $\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$.

b) En déduire ensuite une expression simple de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

❑ **Exercice 1.10.**** — On admet que pour tout *n* de $\mathbb{N}$, il existe un unique polynôme, noté E_n, élément de $\mathbb{R}_n[x]$, tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{2}\left(E_n(x+1) + E_n(x)\right) = \frac{x^n}{n!}$$

1. a) Vérifier que $E_0(x) = 1$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel *n* non nul, on a : $E_n(0) + E_n(1) = 0$.

c) Établir que, pour tout entier naturel *n* non nul, on a : $E_n' = E_{n-1}$.

d) Montrer que les trois propriétés précédentes caractérisent la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Déterminer E_1, E_2 et E_3.

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel *n*, on a : $E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x)$.

b) En déduire, pour tout *p* de $\mathbb{N}^*$, les valeurs de $E_{2p}(0)$, $E_{2p}(1)$ et $E_{2p-1}\left(\frac{1}{2}\right)$.

❑ **Exercice 1.11.*** — Soit *P* un polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ tel que $P(0) = 0$ et vérifiant, pour tout réel *x*, $P(x) = P(\sin x)$. Montrer que *P* est le polynôme nul.

❑ **Exercice 1.12.*** — Soit *n* un entier naturel non nul et *a* un réel fixé. On considère, pour tout *k* de $[\![0, n]\!]$, le polynôme T_k défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ T_k(x) = (x-a)^k$.

1. Montrer, en utilisant le résultat de l'**exercice 9.7** du **tome 1** que la famille $(T_0, T_1, ..., T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

2. En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

❑ **Exercice 1.13.** * — Soit P un polynôme de degré n ($n \geq 1$) tel que $P(a)$ est strictement positif, et tel que, pour tout k de $[\![1,n]\!]$, les dérivées $P^{(k)}(a)$ sont positives ou nulles. Montrer que P n'a aucune racine dans $[a\,;+\infty[$

D'après ULM

❑ **Exercice 1.14.** * — Un peu d'algèbre linéaire.
Soit f l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[x]$, associe le polynôme $f(P) = Q$, où Q est le polynôme quotient dans la division euclidienne de $P(x)$ par le polynôme D défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ D(x) = x - 2$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$.

2. a) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. L'endomorphisme f est-il injectif ?

b) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$. L'endomorphisme f est-il surjectif ?

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 1.2. Faire la division euclidienne de $x^4 - 4x^3 + ax^2 - 4x + b$ par $x^2 - 4x + 5$.
Exercice 1.4. Pour la question **2.b)**, raisonner par récurrence.
Exercice 1.5. Penser à distinguer les cas $a = b$ et $a \neq b$.
Exercice 1.6. Pour la question **2**, utiliser la question **1** pour émettre une conjecture puis la vérifier par récurrence.
Exercice 1.7. Pour la question **1**, chercher une racine évidente de A.
Pour la question **2**, on pourra poser $y = x^3$.

Pour les questions **3** et **4**, être astucieux ou factoriser d'abord dans $\mathbb{C}[x]$.

Exercice 1.8. Vérifier que les racines de $x^2 - 2x\cos a + 1$ sont racines de A_n.
Exercice 1.10. Pour la question **1.c)**, penser à dériver la relation donnée dans l'énoncé. Pour la question **1.d)**, raisonner par récurrence.
Pour la question **3.a)**, raisonner par récurrence.
Exercice 1.11. Choisir des « x » performants.

Exercice 1.12. Pour la question **2**, établir d'abord l'existence de réels $a_0, a_1, ..., a_n$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k$, puis penser à dériver un certain nombre de fois.

Exercice 1.13. Utiliser le résultat de l'**exercice 1.12**.

Exercice 1.14. Noter que le reste est un polynôme constant.

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
F	F	V	F	V	F	F	V	F	V

1. Il suffit de considérer $P(x)=x^n$ et $Q(x)=-x^n$. On a alors : $P+Q=0$.

2. Si $\deg P=n$ alors $\deg P^2=2n$: en effet, lorsqu'on multiplie x^n par x^n, on obtient x^{2n}.

3. Pour résoudre $x^4+x^2+1=0$, on pose $y=x^2$ et on se ramène à l'équation du second degré $y^2+y+1=0$ qui ne possède aucune racine réelle car le discriminant vaut -3.

4. La proposition est fausse comme le montrent les exemples suivants :

$$P(x)=(x-1)^3 \text{ et } Q(x)=(x-1)^3(x^2+1)$$

5. *P* est périodique signifie que :

$$\exists T\in\mathbb{R}_+^*, \forall x\in\mathbb{R}, P(x+T)=P(x)$$

Avec $x = 0$, on obtient $P(T) = P(0)$, puis on montre par récurrence que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, P(nT)=P(0)$$

On raisonne par l'absurde : si l'on avait $\deg P \geq 1$, alors comme $T > 0$, lorsque n tend vers $+\infty$, le membre de gauche tendrait vers $+\infty$ si le coefficient dominant est positif, et vers $-\infty$ sinon, alors que le membre de droite est constant. En conclusion, $\deg P \leq 0$ donc P est constant.

6. Le polynôme Q défini par $Q(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)$ est de degré 3 et admet 1, 2 et 3 pour racines...

7. Seules les racines réelles sont dans $\mathbb{R}_-$.

8. Le monôme de degré n de $(x+1)^n$ est x^n et celui de $(x-1)^n$ est aussi x^n : ils se neutralisent par différence donc le degré de $(x+1)^n-(x-1)^n$ est inférieur ou égal à $n-1$.

Le monôme de degré $n-1$ de $(x+1)^n-(x-1)^n$ est $nx^{n-1}-(-n)x^{n-1}=2nx^{n-1}$ (en utilisant la formule du binôme de Newton). Le coefficient dominant est bien égal à $2n$.

Corrigé

9. $P^{(n)} = n!a_n$ puisque la dérivée $n^{ème}$ de x^n est $n!$.

10. Le polynôme nul est égal à son polynôme dérivé, c'est même le seul pour lequel c'est vrai !

❑ Les erreurs classiques

- Ne pas confondre polynôme de degré n et polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$.
- Il faut bien maîtriser les opérations sur les degrés des polynômes.
- Il ne faut pas oublier qu'un polynôme à coefficients réels peut avoir des racines complexes.

■■ Corrigé des exercices

Exercice 1.1

1. On trouve $A(x)=B(x)(x-2)-4x+4$. En effet :

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x^2 & x^2-x+2 \\ \cline{2-2} -(x^3-x^2+2x) & x-2 \\ \cline{1-1} -2x^2-2x & \\ -(-2x^2+2x-4) & \\ \cline{1-1} -4x+4 & \end{array}$$

2. De la même façon, on trouve :

$$A(x)=B(x)(-4x^2+4x-10)-x$$

3. On trouve (toujours de la même façon) :

$$A(x)=B(x)(x+1)+3x^2-2x+9$$

⇨ *Méthode 1.4*

Exercice 1.2

Effectuons la division euclidienne de $A(x)=x^4-4x^3+ax^2-4x+b$ par $B(x)=x^2-4x+5$.

$$\begin{array}{r|l} x^4-4x^3+ax^2-4x+b & x^2-4x+5 \\ \cline{2-2} -(x^4-4x^3+5x^2) & x^2+(a-5) \\ \cline{1-1} (a-5)x^2-4x+b & \\ -((a-5)x^2-4(a-5)x+5(a-5)) & \\ \cline{1-1} 4(a-6)x-5(a-5)+b & \end{array}$$

Ainsi, *B* divise *A* si et seulement si : $4(a-6)x-5(a-5)+b=0$, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\begin{cases} 4(a-6)=0 \\ -5(a-5)+b=0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} a=6 \\ b=5 \end{cases}$$

⇨ *Méthode 1.4*

Corrigé

Exercice 1.3

1. On obtient $P_n(x) = (n^2-1)x^{n+1} + (1-n-n^2)x^n + x + n - 1$.

2. En travaillant sur l'expression de départ, on trouve facilement que $P_n(1) = 0$.
Grâce au **théorème 1.7**, pour montrer que 1 est racine double de P_n, il suffit alors de prouver que $P_n'(1) = 0$ et $P_n''(1) \neq 0$.
On a :

$$P_n'(x) = (n+1)(n^2-1)x^n + n(1-n-n^2)x^{n-1} + 1$$

On en déduit :

$$P_n'(1) = (n+1)(n^2-1) + n(1-n-n^2) + 1 = 0$$

De plus, on a $P_n''(x) = n(n+1)(n^2-1)x^{n-1} + n(n-1)(1-n-n^2)x^{n-2}$ donc :

$$P_n''(1) = n(n+1)(n^2-1) + n(n-1)(1-n-n^2) = n(n-1)\left((n+1)^2 + 1 - n - n^2\right)$$

On en déduit que $P_n''(1) = n(n-1)(n+2)$ qui est bien différent de 0 puisque n est supérieur ou égal à 2.
En conclusion : 1 est bien racine double de P_n.

Exercice 1.4

1. a) On trouve :

$$A_2(x) = B(x)(2x+1)$$

b) On trouve :

$$A_3(x) = B(x)(3x^2 + 2x + 1)$$

⇨ *Méthode 1.4*

2. Soit n un entier naturel non nul.

a) $A_n(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1$ est divisible par $B(x) = (x-1)^2$ si et seulement si 1 est au moins racine double de $A_n(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1$, soit, si et seulement si : $\begin{cases} A_n(1) = 0 \\ A_n'(1) = 0 \end{cases}$ (S).

Or $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+1=0 \\ (n+1)a + nb = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ n(a+b)+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ -n+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1-n \\ a=n \end{cases}$.

On obtient ainsi :

A_n est divisible par B si et seulement si $\begin{cases} a=n \\ b=-(n+1) \end{cases}$.

b) Les deux exemples traités dans la première question laissent penser que le quotient cherché est $\sum_{i=1}^{n} i\,x^{i-1}$. On va donc montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n(x) = B(x)\sum_{i=1}^{n} i\,x^{i-1}$$

• Pour $n = 1$, on a $B(x)\sum_{i=1}^{1} i\,x^{i-1} = B(x) = A_1(x)$ (d'après la question **2.a)**, ce qui donne $a = 1$ et $b = -2$).

• Soit n un entier naturel non nul tel que $A_n(x) = B(x)\sum_{i=1}^{n} i\,x^{i-1}$.

On sait que $A_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ et $A_{n+1}(x) = (n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1$.

On cherche maintenant un lien entre A_{n+1} et A_n et faire la différence est tentant, puisque l'on se « débarrasse » du terme constant.

On a alors :

$$A_{n+1}(x) - A_n(x) = (n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} - nx^{n+1} + (n+1)x^n$$

On simplifie et on trouve :

$$A_{n+1}(x) - A_n(x) = (n+1)x^{n+2} - (2n+2)x^{n+1} + (n+1)x^n$$

En factorisant, on obtient :

$$A_{n+1}(x) - A_n(x) = (n+1)x^n\left(x^2 - 2x + 1\right) = (n+1)x^n(x-1)^2$$

Finalement :

$$A_{n+1}(x) = B(x)(n+1)x^n + A_n(x)$$

Or par hypothèse de récurrence, $A_n(x) = B(x)\sum_{i=1}^{n} i\,x^{i-1}$.

D'où :

$$A_{n+1}(x) = B(x)\left((n+1)x^n + \sum_{i=1}^{n} i\,x^{i-1}\right) = B(x)\sum_{i=1}^{n+1} i\,x^{i-1}$$

• Ainsi, pour tout entier naturel n non nul, le quotient de la division de $A_n(x)$ par $B(x)$ est $\sum_{i=1}^{n} i\,x^{i-1}$.

⇨ *Méthode 1.5*

Exercice 1.5

En effectuant la division euclidienne de P par B, on obtient : $P = BQ + R$ où $(Q, R) \in (\mathbb{R}[x])^2$ avec $\deg R < \deg B$.

B étant un polynôme de degré 2, R est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 donc R s'écrit $R(x) = rx + t$ avec r et t des réels.

• Si $a=b$, on a $B(x)=(x-a)^2$.

En évaluant l'égalité $P=BQ+R$ en *a*, on obtient : $P(a)=R(a)=ar+t$ car *a* est racine de *B*.

Pour obtenir une deuxième équation, on dérive l'égalité $P=BQ+R$ puis on évalue de nouveau en *a*. On obtient alors : $P'(a)=B'(a)Q(a)+B(a)Q'(a)+R'(a)=R'(a)=r$ (*a* étant racine double de *B*).

On a alors : $\begin{cases} ar+t=P(a) \\ r\quad\ =P'(a) \end{cases}$, soit $\begin{cases} t=P(a)-aP'(a) \\ r=P'(a) \end{cases}$.

Finalement, le reste de la division euclidienne de *P* par *B* est *R* défini par :

$$R(x)=P'(a)x+P(a)-aP'(a)$$

• Si $a\neq b$, on évalue l'égalité $P=BQ+R$ en *a* puis en *b*. On obtient le système suivant :

$$(S)\begin{cases} ar+t=P(a) \\ br+t=P(b) \end{cases}\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Leftrightarrow}\begin{cases} ar+t=P(a) \\ (b-a)r=P(b)-P(a) \end{cases}.$$

Comme $a\neq b$, on peut écrire : $(S)\Leftrightarrow\begin{cases} ar+t=P(a) \\ r=\dfrac{P(b)-P(a)}{b-a} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t=P(a)-a\dfrac{P(b)-P(a)}{b-a} \\ r=\dfrac{P(b)-P(a)}{b-a} \end{cases}$.

Finalement, le reste de la division euclidienne de *P* par *B* est :

$$R(x)=\frac{P(b)-P(a)}{b-a}x+P(a)-a\frac{P(b)-P(a)}{b-a}$$

⇨ *Méthode 1.7*

Exercice 1.6

1. En donnant à *n* les valeurs 1, 2 et 3, on trouve :

$P_1(x)=x+1$

$P_2(x)=1+x+\dfrac{x(x+1)}{2}=\dfrac{1}{2}(x+1)(x+2)$

$P_3(x)=1+x+\dfrac{x(1+x)}{2}+\dfrac{x(x+1)(x+2)}{6}=\dfrac{1}{6}(x+1)(x+2)(x+3)$.

2. Montrons par récurrence la propriété $R(n):"P_n=\dfrac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(x+k)"$.

• *R*(1) est vraie (voir question **1**.).

• Soit *n* un entier naturel fixé non nul tel que *R*(*n*) soit vraie.

On remarque que :

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x(x+1)...(x+n)}{(n+1)!}$$

On a donc $P_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(x+k) + \frac{x(x+1)...(x+n)}{(n+1)!}$ par hypothèse de récurrence.

On obtient alors :

$$P_{n+1}(x) = \left(\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(x+k)\right)\left(1+\frac{x}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(x+k)\right)\left(\frac{x+n+1}{n+1}\right)$$

On a alors $P_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n+1}(x+k)$, ce qui prouve que $R(n+1)$ est vraie.

• Par récurrence, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(x+k)$$

Exercice 1.7

1. Remarquons tout d'abord que 1 est racine évidente de $A(x)$ donc $x-1$ divise $A(x)$.

On trouve alors $A(x) = (x-1)(x^2-x-2)$ (on pourra faire la division euclidienne pour s'en persuader).

De plus, -1 et 2 sont racines de x^2-x-2 et on a $x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$. Ainsi, $A(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$ est la factorisation de $A(x)$ dans $\mathbb{R}[x]$.

2. On remarque que : $B(x) = (x^3)^2 - 7x^3 - 8$.

Posons $y = x^3$ et cherchons la factorisation de $y^2 - 7y - 8$.

Les racines sont –1 et 8 et ainsi : $y^2 - 7y - 8 = (y+1)(y-8)$.

On a donc :

$$B(x) = (x^3+1)(x^3-8)$$

• Ici, –1 est racine évidente de x^3+1 et, par division (ou identification), on obtient :
$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ et x^2-x+1 n'a pas de racine réelle.

• De même, 2 est racine évidente de x^3-8 et, par un procédé analogue, on trouve :
$x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$ et x^2+2x+4 n'a pas de racine réelle.

La factorisation de $B(x)$ dans $\mathbb{R}[x]$ est donc :

$$B(x) = (x+1)(x-2)(x^2-x+1)(x^2+2x+4)$$

⇨ *Méthode 1.3*

3. • Astucieusement, on remarque que :

$$C(x) = x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = \left(x^2 + 1\right)^2 - x^2$$

Grâce à l'identité remarquable "$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$", on obtient :

$$x^4 + x^2 + 1 = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right)$$

• Sans être astucieux, en posant $y = x^2$, on avait $C(x) = y^2 + y + 1$, dont les racines sont $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\bar{j} = e^{\frac{-2i\pi}{3}}$. On obtenait alors :

$$C(x) = \left(x^2 - j\right)\left(x^2 - \bar{j}\right)$$

On trouvait ensuite les solutions de l'équation $x^2 - j = 0$, qui sont $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}}$, alors que celles de $x^2 - \bar{j} = 0$ sont $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{4\pi}{3}}$.

On obtenait alors la factorisation suivante :

$$C(x) = \left(x - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(x - e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)\left(x - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(x - e^{-i\frac{4\pi}{3}}\right)$$

En regroupant les facteurs 1 et 3 entre eux et les facteurs 2 et 4 entre eux, on trouvait, grâce à la **méthode 1.9** :

$$C(x) = \left(x^2 - 2\cos(\pi/3)x + 1\right)\left(x^2 - 2\cos(4\pi/3)x + 1\right) = \left(x^2 - x + 1\right)\left(x^2 + x + 1\right)$$

⇨ *Méthode 1.9*

Exercice 1.8

On désigne par n un entier naturel non nul et par a un réel.

• Supposons $a \neq 2k\pi$.

On remarque alors que $x^2 - 2x\cos a + 1$ a 2 racines distinctes qui sont e^{ia} et e^{-ia}, donc A_n est divisible par $x^2 - 2x\cos a + 1$ si, et seulement si, e^{ia} et e^{-ia} sont racines de A_n.

Comme $A_n\left(e^{ia}\right) = e^{i(n+1)a}\cos\left((n-1)a\right) - e^{ina}\cos(na) - e^{ia}\cos a + 1$, alors, en utilisant la formule d'Euler sur les expressions $\cos\left((n-1)a\right)$, $\cos(na)$ et $\cos a$, on trouve :

$$A_n\left(e^{ia}\right) = e^{i(n+1)a}\frac{e^{i(n-1)a} + e^{-i(n-1)a}}{2} - e^{ina}\frac{e^{ina} + e^{-ina}}{2} - e^{ia}\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} + 1$$

On a donc :

$$A_n\left(e^{ia}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i2na} + e^{i2a} - e^{i2na} - 1 - e^{2ia} - 1 + 2\right)$$

Et finalement :

$$A_n\left(e^{ia}\right) = 0$$

Enfin, puisque A_n est un polynôme à coefficients réels, $\overline{e^{ia}} = e^{-ia}$ est aussi racine de A_n.

On en déduit que A_n est divisible par B.

• Supposons $a = 2k\pi$.

On a alors $A_n(x) = x^{n+1} - x^n - x + 1 = x^n(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^n - 1)$ et $B(x) = (x-1)^2$.

Comme 1 est racine évidente de $x^n - 1$, on est sûr que 1 est racine au moins double de A_n, ce qui garantit que A_n est divisible par B.

⇨ *Méthode 1.5*

Exercice 1.9

1. Développons le produit PQ de deux manières différentes.

• D'une part, $(PQ)(x) = (1+x)^n (1+x)^m = (1+x)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k$ (par la formule du binôme).

• D'autre part, d'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \text{ et } Q(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k$$

On en déduit, d'après la **méthode 1.2**, que :

$(PQ)(x) = \sum_{p=0}^{n+m} c_p x^p$ avec, pour tout p de $[\![0, n+m]\!]$, $c_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$.

⇨ *Méthodes 1.1, 1.2*

2. a) Dans la première expression de $(PQ)(x)$, le coefficient du monôme de degré p est $\binom{n+m}{p}$, et dans la seconde, ce coefficient vaut : $c_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$.

Par identification, on obtient :

$$c_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$$

b) En considérant le cas $n = m = p$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

Et puisque $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Corrigé

Exercice 1.10

1. a) Examinons la relation pour $n=0$.
Le polynôme E_0 est l'unique élément de $\mathbb{R}_0[x]$ tel que :

$$E_0(x+1)+E_0(x)=2$$

$\mathbb{R}_0[x]$ étant l'ensemble des polynômes constants, il s'agit de chercher un réel a tel que $a+a=2$. Finalement $E_0=1$ convient.

b) En évaluant en 0 la relation qui définit E_n, on a : $E_n(1)+E_n(0)=2\dfrac{0^n}{n!}=0$ (car $n \geq 1$).

c) Soit n un entier naturel non nul.
Si E_n est un élément de $\mathbb{R}_n[x]$, E_n' est un élément de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
En dérivant la relation de l'énoncé, on obtient :

$$\frac{1}{2}\left(E_n'(x+1)+E_n'(x)\right)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Mais E_{n-1} est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ vérifiant $\dfrac{1}{2}\left(E_{n-1}(x+1)+E_{n-1}(x)\right)=\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ donc on peut en déduire (par unicité) que :

$$E_n'=E_{n-1}$$

d) Posons, pour tout entier naturel n, $P(n)$: « E_n est bien défini ».
• $P(0)$ est vraie. En effet, E_0 a été déterminé à la question **1.a)**.
• Supposons $P(n)$ vraie pour un entier naturel n fixé.
D'après la question **1.c)**, $E_{n+1}'=E_n$. D'où $E_{n+1}=F_n$, où F_n est une primitive de E_n.
Le polynôme E_{n+1} est ainsi connu à une constante près.
Grâce à la relation de la question **1.b)**, le polynôme E_{n+1} sera complètement défini.
Par conséquent, $P(n+1)$ est vraie.
Ainsi, par récurrence, pour tout entier naturel n, E_n est bien défini.
La suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc parfaitement définie par les trois propriétés précédentes.

2. Appliquons le protocole utilisé dans l'hérédité de la récurrence précédente.
• Comme $E_1'(x)=E_0(x)=1$, on sait déjà que $E_1(x)=x+k$, où k est un réel.
La relation $E_1(1)+E_1(0)=0$ se traduit en $2k+1=0$, soit $k=-\dfrac{1}{2}$.
On a ainsi :

$$E_1(x)=x-\frac{1}{2}$$

• On a alors $E_2(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+k$, où k est un réel.

La relation $E_2(1)+E_2(0)=0$ se traduit en $2k=0$, soit $k = 0$.

On a ainsi :

$$E_2(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$$

• On en déduit que : $E_3(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2+k$, où k est un réel.

La relation $E_3(1)+E_3(0)=0$ donne $2k-\frac{1}{12}=0$, soit $k=\frac{1}{24}$.

On trouve ainsi :

$$E_3(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{24}$$

3. a) Soit n un entier naturel. Posons : $R(n):"E_n(1-x)=(-1)^n E_n(x)"$.

• $R(0)$ est vraie. En effet, $E_0(1-x)=1=(-1)^0\times 1=(-1)^0 E_0(x)$.

• Supposons $R(n)$ vraie pour un entier naturel n fixé.

Posons $P_{n+1}(x)=E_{n+1}(1-x)$, alors $P'_{n+1}(x)=-E'_{n+1}(1-x)=-E_n(1-x)$.

Or $E_n(1-x)=(-1)^n E_n(x)$ par hypothèse de récurrence, d'où : $P'_{n+1}(x)=(-1)^{n+1}E_n(x)$.

On en déduit alors, grâce à la question **1.c)**, que $P_{n+1}(x)=(-1)^{n+1}E_{n+1}(x)+a$, où a est un réel.

Calculons $P_{n+1}(0)+P_{n+1}(1)$ de deux façons différentes :

• De ce qui précède immédiatement, on a :

$P_{n+1}(0)+P_{n+1}(1)=(-1)^{n+1}E_{n+1}(0)+a+(-1)^{n+1}E_{n+1}(1)+a$ et la question **1.b)** permet de conclure que :

$$P_{n+1}(0)+P_{n+1}(1)=2a$$

• Par définition de P_{n+1}, on a aussi : $P_{n+1}(0)+P_{n+1}(1)=E_{n+1}(1)+E_{n+1}(0)$ donc, d'après la question **1.b)** :

$$P_{n+1}(0)+P_{n+1}(1)=0$$

• En identifiant les deux expressions de $P_{n+1}(0)+P_{n+1}(1)$, on trouve : $a=0$.

On a donc $P_{n+1}(x)=(-1)^{n+1}E_{n+1}(x)$, ce qui prouve que $R(n+1)$ est vraie.

Ainsi, par récurrence, pour tout entier naturel n, on a :

$$E_n(1-x)=(-1)^n E_n(x)$$

b) La relation précédente avec $n=2p$ ($p\in\mathbb{N}^*$), évaluée en 0, donne :

$$E_{2p}(1)-E_{2p}(0)=0$$

La relation de la question **1.b)** donne :

$$E_{2p}(1)+E_{2p}(0)=0$$

Avec les deux égalités précédentes, on trouve :

$$E_{2p}(1)=E_{2p}(0)=0$$

La relation de la question **3.a)** appliquée en $n=2p-1$ (avec p élément de $\mathbb{N}^*$) et évaluée en $\frac{1}{2}$ donne :

$$E_{2p-1}\left(\frac{1}{2}\right)=-E_{2p-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

On trouve ainsi :

$$E_{2p-1}\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

Exercice 1.11

Pour tout k de $\mathbb{Z}$, on a $P(\sin(k\pi)) = P(0) = 0$.
Par hypothèse, on a $P(x) = P(\sin x)$, on en déduit :

$$\forall k\in\mathbb{Z},\ P(k\pi)=0$$

Le polynôme P a donc une infinité de racines (tous les multiples entiers de π), c'est donc le polynôme nul.

⇨ *Méthode 1.6*

Exercice 1.12

1. D'après l'**exercice 9.7** du **tome 1** la famille $(T_0, T_1, ..., T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ car c'est une famille de polynômes de degrés 2 à 2 distincts.

2. Par définition d'une base, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$, il existe des réels $a_0, a_1, ..., a_n$ tels que $P=\sum_{i=0}^{n} a_i T_i$. On en déduit :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i (x-a)^i$$

En dérivant k fois, avec k élément de $[\![0, n]\!]$, les termes d'indices strictement inférieurs à k disparaissent et on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ P^{(k)}(x)=\sum_{i=k}^{n} a_i \frac{i!}{(i-k)!}(x-a)^{i-k}$$

En évaluant en a, les termes d'indices strictement supérieurs à k s'annulent car $(a-a)^{i-k}=0^{i-k}=0$ (car $i-k\geq 1$) et il ne reste que le terme d'indice k, ce qui donne :

$$P^{(k)}(a)=a_k\, k!$$

On trouve alors :

$$a_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$$

En conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Exercice 1.13

D'après le résultat de l'exercice précédent, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Comme, pour tout k de $[\![1,n]\!]$, les dérivées $P^{(k)}(a)$ sont positives, alors pour tout x supérieur ou égal à a, on a $\sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \geq 0$. De plus, l'énoncé précise que $P(a)$ est strictement positif, donc, en écrivant $P(x) = P(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, on obtient $P(x) > 0$.

Conclusion : P n'a aucune racine dans $[a\,;+\infty[$.

Exercice 1.14

1. Soit P un élément de $\mathbb{R}_3[x]$ et $Q = f(P)$ le quotient dans la division euclidienne de $P(x)$ par $x-2$.

$Q(x)$ étant le quotient dans la division euclidienne de $P(x)$ par $x-2$ (qui est de degré 1), on a la relation : $\deg Q = \deg P - 1$ si P est au moins de degré 1, ou $Q = 0$ si P est constant. Ainsi, Q, c'est-à-dire $f(P)$, est un élément de $\mathbb{R}_3[x]$.

Considérons maintenant deux éléments P_1 et P_2 de $\mathbb{R}_3[x]$ et λ un réel.

Grâce au théorème de la division euclidienne, on a :

- $P_1(x) = f(P_1)(x) \times (x-2) + R_1(x)$, où R_1 est un polynôme constant.
- $P_2(x) = f(P_2)(x) \times (x-2) + R_2(x)$, où R_2 est un polynôme constant.

On combine ces deux relations et on obtient :

$(\lambda P_1 + P_2)(x) = (\lambda f(P_1) + f(P_2))(x) \times (x-2) + (\lambda R_1 + R_2)(x)$

Le polynôme $\lambda R_1 + R_2$ étant constant (en tant que somme de polynômes constants), cette relation traduit bien la division euclidienne de $(\lambda P_1 + P_2)(x)$ par $x-2$.

Par définition de f, on a aussi : $(\lambda P_1 + P_2)(x) = f(\lambda P_1 + P_2)(x) \times (x-2) + R(x)$, avec R un polynôme constant.

Par unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne de $(\lambda P_1 + P_2)(x)$ par $(x-2)$, on en déduit :

$$f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$$

L'application f est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$.

2. a) Soit P un élément de $\mathbb{R}_3[x]$.

P est dans $\text{Ker}(f)$ si seulement si le quotient de $P(x)$ dans la division euclidienne par $x-2$ est nul.

Par définition de la division euclidienne, on a alors : $P(x) = 0 \times (x-2) + R(x)$, avec R polynôme constant. Finalement, P est dans $\text{Ker}(f)$ si et seulement si P est un polynôme constant.

On a donc $\text{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[x]$. Ainsi $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$ et f n'est pas injectif.

b) • On remarque tout d'abord que tout élément de $\text{Im}(f)$ est dans $\mathbb{R}_2[X]$. En effet, si P est un élément de $\mathbb{R}_3[x]$ alors $f(P)(x)$ est le quotient dans la division euclidienne de $P(x)$ par $x-2$ et est donc de degré au plus 2. Ainsi, $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_2[x]$.

• Réciproquement, tout élément Q de $\mathbb{R}_2[x]$, défini par $Q(x) = a + bx + cx^2$, possède au moins un antécédent par f, par exemple le polynôme P défini par $P(x) = (x-2)(a + bx + cx^2)$ qui est bien un élément de $\mathbb{R}_3[x]$.

On en déduit que $\mathbb{R}_2[x] \subset \text{Im}(f)$.

Finalement :

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}_2[x]$$

Comme $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}_3[x]$, f n'est pas surjectif.

Chapitre 2

Somme de sous-espaces. Projecteurs et symétries

UN MATHÉMATICIEN



L'œuvre de **David Hilbert** (1862-1943) touche à tous les domaines des mathématiques. Il reste avant tout célèbre pour son axiomatique de la géométrie mais surtout pour les 23 problèmes qu'il propose en 1900 pour guider les mathématiques tout au long du XX^{e} siècle. Sans cesse à la recherche de méthodes nouvelles, Hilbert joue un rôle fondamental dans le développement des mathématiques dont il est probablement le dernier à dominer toutes les branches.

Un peu d'histoire

Depuis l'Antiquité, projections et symétries ont joué un rôle important en géométrie et concernaient de nombreux théorèmes. Ces notions n'ont été formalisées que dans le cadre de l'élaboration du concept de structures algébriques qui s'est étalée tout au long du XIX^{e} siècle. En particulier, la structure d'espace euclidien, telle que nous la définissons de nos jours, est censée représenter l'espace qui nous entoure ; dans ce cadre là, les projections et les symétries sont considérées comme des applications. À la fin du XIX^{e} siècle, David Hilbert généralise ces notions à des espaces de dimension infinie dont les éléments peuvent être des polynômes ou des fonctions. Ceci permet d'appliquer notre intuition géométrique à des problèmes d'analyse. Son élève Erhard Schmidt poursuit ces travaux et, par une succession de projections, construit des bases orthonormées en partant de bases quelconques.

Objectifs

Les incontournables

▷ Connaître les notions de somme, somme directe et supplémentarité de sous-espaces vectoriels.

▷ Reconnaître un projecteur, une symétrie.

Et plus si affinités

▷ Savoir manipuler des sommes de r sous-espaces vectoriels.

■■ Résumé de cours

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

■ Somme de sous-espaces vectoriels

❑ Somme de deux sous-espaces

Dans ce paragraphe, F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E.

Définition 2.1. — On appelle *somme* de F_1 et F_2 l'ensemble, noté $F_1 + F_2$, défini par :

$$F_1 + F_2 = \left\{ x_1 + x_2,\ (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 \right\}$$

Théorème 2.1. — La somme de deux sous-espaces de E est un sous-espace de E.

Remarque 2.1. — On a les inclusions suivantes : $F_1 \subset F_1 + F_2$ et $F_2 \subset F_1 + F_2$.

Théorème 2.2. — Formule de Grassmann.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on a :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Théorème 2.3. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces de E, de bases respectives $\mathcal{B}_1 = (f_1, f_2, ..., f_p)$ et $\mathcal{B}_2 = (g_1, g_2, ..., g_q)$.
La famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, ..., f_p, g_1, g_2, ..., g_q)$ est une famille génératrice de $F + G$.

Remarque 2.2. — La famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, ..., f_p, g_1, g_2, ..., g_q)$ obtenue par juxtaposition des bases de F et G n'est, en général, pas une base de $F + G$ (voir l'**exercice 2.6** ainsi que le **théorème 2.8**).

Définition 2.2. — On dit que la somme $F_1 + F_2$ est *directe* lorsque $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$. Dans ce cas, la somme $F_1 + F_2$ est notée $F_1 \oplus F_2$.

⇨ **Méthode 2.1. Comment montrer que la somme de deux sous-espaces est directe ?**

Définition 2.3. — On dit que E est somme directe de F_1 et F_2 (ou que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E) si $E = F_1 \oplus F_2$.
On dit aussi que F_2 est un supplémentaire de F_1, ou que F_1 est un supplémentaire de F_2.

Théorème 2.4. — Tout sous-espace vectoriel F de E admet au moins un sous-espace supplémentaire G dans E et on a : $\dim G = \dim E - \dim F$.

Théorème 2.5. — E est somme directe de F_1 et F_2 si, et seulement si, pour tout vecteur x de E, il existe un unique couple (x_1, x_2) de $F_1 \times F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.

⇨ **Méthode 2.2. Comment montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires**

Théorème 2.6. — $E = F_1 \oplus F_2 \Leftrightarrow \begin{cases} F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \\ \dim F_1 + \dim F_2 = \dim E \end{cases}$.

Théorème 2.7. — Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a :

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} F + G = E \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases}$$

⇨ **Méthode 2.3. Comment montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires avec les dimensions?**

Théorème 2.8. — Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces de E, de bases respectives $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. La famille $\mathcal{B}$ obtenue par juxtaposition des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est une base de E si, et seulement si, F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E.

❑ Généralisation : somme de *r* sous-espaces

Dans ce paragraphe, r désigne un entier supérieur ou égal à 2 et F_1, F_2, ..., F_r sont des sous-espaces vectoriels de E.

Définition 2.4. — On appelle *somme* de F_1, F_2, ..., F_r, l'ensemble noté $F_1 + F_2 + ... + F_r$ ou $\sum_{i=1}^{r} F_i$ défini par : $F_1 + F_2 + ... + F_r = \{x_1 + x_2 + ... + x_r, (x_1, x_2, ..., x_r) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_r\}$.

Théorème 2.9. — La somme de r sous-espaces de E est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 2.5. — On dit que la somme $F = \sum_{i=1}^{r} F_i$ est *directe* si pour tout vecteur x de F, il existe un unique r-uplet $(x_1, x_2, ..., x_r)$ de $F_1 \times F_2 \times ... \times F_r$ tel que : $x = x_1 + x_2 + ... + x_r$.

Dans ce cas, on note $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_r$ ou $F = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.