Modelado matemático para la optimización

Proceso y ejemplos

Juan Guillermo Villegas Ramírez
Pablo Andrés Maya Duque
Karin Julieth Aguilar Imitola

Formación / Ciencias Exactas

Editorial
Universidad de Antioquia

Modelado matemático para la optimización

Proceso y ejemplos

Modelado matemático para la optimización

Proceso y ejemplos

Juan Guillermo Villegas Ramírez
Pablo Andrés Maya Duque
Karin Julieth Aguilar Imitola

Editorial Universidad de Antioquia

Formación / Ciencias Exactas

Colección *Formación / Ciencias Exactas*
© Juan Guillermo Villegas Ramírez, Pablo Andrés Maya Duque, Karin Julieth Aguilar Imitola, 2026
© De esta edición: Editorial Universidad de Antioquia®
ISBN: 978-958-501-249-3
ISBNe: 978-958-501-248-6
DOI: 10.17533/udea.978-958-501-248-6

Primera edición: mayo de 2026

Hecho en Colombia / Made in Colombia
Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o con cualquier propósito, sin la autorización escrita de la Editorial Universidad de Antioquia

Editorial Universidad de Antioquia®
(+57) 604 219 50 10
editorial@udea.edu.co
http://editorial.udea.edu.co
Calle 67 #53-108. Medellín, Colombia

Imprenta Universidad de Antioquia
(+57) 604 219 53 30
imprenta@udea.edu.co
Calle 67 #53-108. Medellín, Colombia

El contenido de la obra corresponde al derecho de expresión del autor y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad de Antioquia ni desata su responsabilidad frente a terceros. El autor asume la responsabilidad por los derechos de autor y conexos contenidos en la obra, así como por la eventual información sensible publicada en ella.

Villegas Ramírez, Juan Guillermo, autor.
Modelado matemático para la optimización : proceso y ejemplos / Juan Guillermo Villegas Ramírez, Pablo Andrés Maya Duque, Karin Julieth Aguilar Imitola. -- Medellín : Editorial Universidad de Antioquia, 2026.
xii, 188 páginas : gráficas, tablas.
(Formación/Ciencias Exactas)
Contiene referencias bibliográficas.
ISBN:978-958-501-249-3 (impreso)
ISBN: 978-958-501-248-6 (electrónico)
1. Optimización matemática. 2. Investigación operacional. 3. Manuales universitarios.
I. Maya Duque, Pablo Andrés, autor. II. Aguilar Imitola, Karin Julieth, autora. III. Título.
IV. Serie.
LC: QA402.5
CDD: 519.6 ed. 23

Catalogación en publicación de la Biblioteca Carlos Gaviria Díaz

Contenido

Presentación

La optimización es una herramienta matemática utilizada ampliamente para diseñar, mejorar y controlar sistemas en organizaciones públicas y privadas de muy diversa índole (manufactura, energía, servicios, telecomunicaciones, salud, transporte, finanzas, logística, etc.). La utilización de dicha herramienta exige la capacidad de modelación, tema que este libro espera cubrir de manera pedagógica para el desempeño del futuro ingeniero.

En especial, este libro se enfoca en la formulación como una competencia básica que se ha de desarrollar para la solución de problemas y la toma de decisiones con modelos de optimización. Aunque la construcción de modelos de optimización es vista por algunos autores como un arte, creemos que ver dicha construcción como un proceso hace más fácil su aprendizaje y reproducción. Por lo tanto, la estructura del libro sigue esta postura.

Para comenzar, en el capítulo uno, presentamos una breve reseña de la investigación de operaciones y la analítica de negocios para la toma de decisiones, disciplinas que se enmarcan dentro de las matemáticas aplicadas. Además, destacamos el papel de la optimización en la denominada analítica prescriptiva, así como los usos y las limitaciones de los modelos.

En el capítulo dos, se introducen los modelos de optimización, sus componentes y un proceso estándar para su construcción. Identificar los componentes de un modelo de optimización (*i. e.,* variables de decisión, función objetivo, restricciones y parámetros), definir la notación y verbalizar el modelo antes de construirlo son etapas esenciales del proceso que exponemos en el libro.

Posteriormente, en el capítulo tres, se presenta un conjunto de arquetipos, básicos y avanzados, de modelación que permiten traducir los componentes y las características de los sistemas que se quieren modelar en ecuaciones e inecuaciones matemáticas que los representan. En el capítulo cuatro, se exponen algunas recomendaciones que deben considerarse al formular modelos de optimización. Enseguida, en el capítulo cinco, se modelan algunos problemas clásicos de optimización para ilustrar el proceso de modelado y el uso de los arquetipos introducidos en el capítulo tres. Estos modelos representan situaciones realistas encontradas en el diseño, la planeación y la operación de sistemas que en su mayoría se encuentran en el ejercicio de la ingeniería industrial, pero que también aparecen en otras ramas de la ingeniería.

Una vez dominado el proceso de construcción de los modelos de optimización y los arquetipos básicos de modelación, en el capítulo seis, exploramos modelos avanzados que pueden construirse extendiendo los modelos básicos de múltiples maneras. En particular, abordamos los fundamentos de la optimización multiobjetivo para modelar situaciones en las cuales el tomador de decisiones quiere considerar más de una función objetivo para sopesar la calidad de las soluciones.

Cabe precisar que el uso práctico de modelos de optimización exige que sean implementados por vía computacional utilizando para ello distintos programas comerciales o libres. Por lo tanto, para cerrar el libro, presentamos un panorama general del *software* disponible para la implementación computacional de modelos de optimización en distintas plataformas. Así mismo, retomamos algunos de los modelos utilizados como ejemplos en los capítulos anteriores, a fin de mostrar su despliegue en algunas de dichas plataformas.

Como apéndices, el libro incluye cuatro actividades lúdicas (en los apéndices A a D) para la enseñanza de la optimización, que introducen la temática de manera amena y alternativa a través de problemas de la vida cotidiana para que sean resueltos en equipos por los estudiantes. Dichas actividades pueden usarse para acercar a los estudiantes a la práctica de la optimización, incluso sin usar la notación matemática que se aborda en el libro. Adicionalmente, el apéndice E ejemplifica la implementación computacional de los modelos de optimización en varios lenguajes de modelación, usando diferentes optimizadores y entornos de desarrollo.

Este libro se concibe como herramienta básica para enseñar y aprender a modelar problemas de optimización. El público al que se dirige son estudiantes y docentes de disciplinas en las que se utiliza la optimización matemática como herramienta de modelación de sistemas, por ejemplo, administración, economía, finanzas, estadística, matemáticas aplicadas e ingenierías (industrial, de telecomunicaciones, eléctrica, civil, de transporte, etc.). También es de interés para profesionales de estas y otras disciplinas que quieran incursionar en la optimización matemática como herramienta de apoyo en la toma de decisiones. Finalmente, dado que el foco principal del libro es la modelación y no la solución matemática de los problemas de optimización, el único conocimiento previo necesario es el de la notación algebraica tradicional, que utiliza variables, coeficientes, operadores matemáticos, exponentes y paréntesis.

Introducción a la optimización

1

En este capítulo se introducen la investigación de operaciones y la analítica de negocios para la toma de decisiones como dos disciplinas que enmarcan la modelación en optimización. Además, se contextualiza la optimización mediante una breve reseña histórica y su aplicación en diferentes campos.

1.1 Modelación, investigación de operaciones y analítica de negocios

Entre las múltiples acepciones de la palabra *modelo*, la que mejor se adapta al contexto de este libro es la que la define como "un esquema teórico, generalmente en forma matemática, que representa un sistema o una realidad compleja, como la evolución económica de un país, con el propósito de facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento" (Real Academia Española, 2014, definición 4). Como humanidad, construimos modelos con distintas finalidades, y muchas situaciones de la vida diaria pueden ser representadas o se ven afectadas por modelos matemáticos (Garduño Juárez, 2018, párr. 4). Por ejemplo, los modelos de la física clásica nos permiten entender el movimiento de los cuerpos, el modelo del que derivan las leyes de oferta y demanda describe el funcionamiento de las economías de mercado y los modelos epidemiológicos ayudan a predecir la evolución de una epidemia o una pandemia, entre otros.

Dos de las disciplinas que se ocupan de la construcción de modelos están íntimamente ligadas con la ingeniería: la investigación de operaciones y la ciencia de datos. La investigación de operaciones (en inglés, *operations/operational research)* puede describirse como "el proceso científico para la solución de problemas en el ámbito de la administración de sistemas complejos. En un entorno cambiante se busca el entendimiento que facilite la elección e implementación de soluciones más efectivas, que típicamente involucran las interacciones complejas de personas, materiales y dinero" (The Association of European Operational Research Societies [EURO], 2024, párr. 1).

La investigación de operaciones utiliza diversas herramientas para estructurar problemas y crear modelos conceptuales, incluyendo modelos de simulación, probabilísticos, de análisis de decisión, de optimización, estadísticos, de aprendizaje de máquina, entre otros (Clarkson *et al.*, 2009). Soportada en el uso de dichos modelos, la investigación de operaciones emplea métodos analíticos avanzados para optimizar la toma de decisiones. A través de técnicas como el modelado matemático, analiza situaciones complejas y desarrolla soluciones efectivas. Su enfoque se basa en el uso de datos completos, la evaluación de todas las alternativas, la predicción precisa de resultados y la estimación de riesgos, contribuyendo así a la creación de sistemas más eficientes y productivos (Institute for Operations Research and Management Science [INFORMS], *What Operations Research Is*).

Por su parte, la analítica de negocios, como una rama de la ciencia de datos, se refiere al uso extensivo de datos, adquiridos por diversas fuentes, análisis estadísticos y cuantitativos, modelos explicativos y predictivos, para tomar mejores decisiones en una organización (Lepenioti *et al.*, 2020). En este caso, se utilizan herramientas de diferentes disciplinas, como la ciencia de datos, la estadística, la investigación de operaciones y la inteligencia artificial. La figura 1.1 ilustra las tres ramas (descriptiva, predictiva y prescriptiva) en las que puede clasificarse la analítica de negocios, de acuerdo con las preguntas que permita responder.

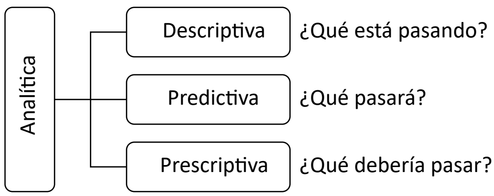

Figura 1.1 Ramas de la analítica de negocios

Como se ilustra en la figura 1.1, la analítica de negocios se divide en analítica descriptiva, analítica predictiva y analítica prescriptiva, según las herramientas que se utilicen y las preguntas que se respondan. La analítica descriptiva responde a preguntas tales como ¿Qué sucedió? y ¿Por qué sucedió?; la analítica predictiva, a preguntas como ¿Qué sucederá? y ¿Por qué sucederá?, y la analítica prescriptiva, a preguntas del tipo ¿Qué debo hacer que suceda? y ¿Qué debo hacer para que suceda? De esta manera, la analítica descriptiva ayuda a evidenciar y entender los fenómenos, mientras que la analítica predictiva busca anticiparse a los fenómenos; por su parte, la analítica prescriptiva busca recomendar los mejores cursos de acción posibles (Lepenioti *et al.*, 2020).

En particular, la analítica prescriptiva se refiere a la analítica que busca brindar recomendaciones óptimas durante el proceso de toma de decisiones. Entre las herramientas usadas en la analítica prescriptiva se encuentran los modelos probabilísticos, el aprendizaje de máquina, la minería de datos, la optimización a través de programación matemática, la metaheurística y la simulación (figura 1.2).

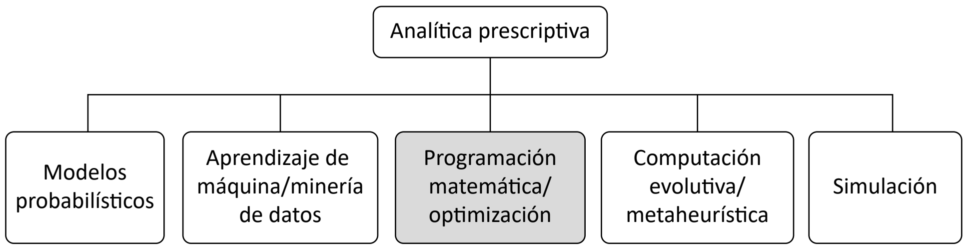

Figura 1.2 Técnicas de la analítica prescriptiva

Fuente: Adaptado de Lepenioti *et al.* (2020).

La utilización de modelos matemáticos busca mejorar la comprensión y el comportamiento de sistemas complejos. Según Geoffrion y Krishnan (2001), los modelos de investigación de operaciones y analítica de negocios ofrecen múltiples ventajas en el ámbito de las organizaciones, tales como:

— Racionalizan la toma de decisiones, el diseño y otras actividades gerenciales con la ayuda de herramientas analíticas.
— Apoyan la toma de decisiones en todas las áreas de la organización.
— Ofrecen una visión holística de los sistemas que se modelan, lo que facilita identificar sus elementos, métricas de desempeño, límites, restricciones, datos y variables controlables, entre otros.
— Permiten desarrollar un entendimiento más profundo de la organización o sistema que queremos modelar.
— Dan valor a los datos y permiten aprovechar mejor las revoluciones de los computadores, las comunicaciones, las aplicaciones y otras tecnologías de información actuales.
— Ayudan a los administradores a entender la complejidad de las organizaciones y los sistemas.
— Mejoran el entendimiento y la evaluación de la incertidumbre, el riesgo y los *trade-offs*.
— Facilitan la experimentación controlada con modelos computacionales de las organizaciones y los sistemas preexistentes o en fase de diseño.
— Permiten que se comuniquen ideas y conocimientos.
— Son una herramienta consistente y objetiva para evaluar diferentes políticas.
— Ayudan a mejorar la productividad, la competitividad y la calidad de las organizaciones.

1.2 ¿Qué es la optimización?

En este contexto, la optimización busca de manera *inteligente* la mejor de todas las opciones cuando hay virtualmente un conjunto innumerable de alternativas factibles (Clarkson *et al.*, 2009). Este problema generalmente se formula como la determinación del valor extremo de una función en un dominio dado. El valor extremo se refiere al valor máximo o mínimo de una función en su dominio, y se considera el valor óptimo para el problema, dependiendo de su aplicación y del problema específico abordado (Johansson, 2024). Los elementos principales de un problema de optimización y la manera de construir un modelo matemático para este son discutidos en el siguiente capítulo.

1.3 Orígenes y evolución de la optimización y la modelación

La historia de la optimización matemática se remonta a varios siglos atrás, con los primeros intentos de encontrar óptimos locales de funciones derivables. Por ejemplo, en el siglo XVII, Pierre de Fermat y Sir Isaac Newton descubrieron, de manera independiente, las condiciones de primer orden según las cuales igualamos la primera derivada a cero para encontrar los mínimos y máximos de funciones diferenciables. Otros matemáticos europeos, como Joseph-Louis Lagrange, Friedrich Gauss y Gottfried Wilhelm Leibniz, también hicieron uso de la optimización continua y de este principio en sus trabajos. Más adelante, en el siglo XVIII, el matemático suizo Leonhard Euler planteó el problema de los puentes de Königsberg, uno de los primeros problemas de optimización combinatoria conocidos, que dio origen a la teoría de grafos. A principios del siglo XX, Henry Gantt y Ford W. Harris introdujeron los conceptos de gráficos de programación de producción y cantidad económica de pedido, respectivamente. Durante este periodo, la optimización evolucionó gracias a las contribuciones independientes, pero aún no era una disciplina consolidada.

A medida que la optimización se fue desarrollando se empezó a aplicar a problemas concretos. Durante la Segunda Guerra Mundial, se utilizó para apoyar la toma de decisiones en el ámbito militar y logístico en el despliegue de recursos, lo que llevó al desarrollo de la investigación de operaciones como una disciplina independiente. En la posguerra, George Dantzig marcó un hito importante en la optimización al desarrollar en 1947 el método simplex para programación lineal. En las décadas siguientes se dieron otros hitos relevantes, como el uso de la computación para resolver programas lineales, el descubrimiento de las condiciones de optimalidad y la introducción de metaheurísticas para resolver problemas de optimización. En la era moderna, la optimización ha experimentado un avance significativo gracias al desarrollo de nuevas técnicas y al uso de tecnología de vanguardia. Esto ha permitido la resolución de grandes problemas mediante la optimización en la nube y el uso de herramientas de análisis prescriptivo. El auge de la optimización se apoya en gran medida en el uso de *software* especializado, lo cual ha impulsado la enseñanza y el aprendizaje de la optimización y ha permitido su aplicación de manera práctica y eficiente. Para una descripción detallada de la historia de la optimización y la investigación de operaciones, puede recurrirse a Du *et al.* (2009) y Gass y Assad (2005), respectivamente. Así mismo, para profundizar en la historia de la optimización, puede visitarse la línea de tiempo interactiva descrita en Villegas (2021a) y la historia de la optimización recopilada por el Institute for Operations Research and Management Science (INFORMS, *Optimization/Mathematical Programming*).

1.4 Aplicaciones de optimización y modelación en la toma de decisiones

Actualmente, los modelos de optimización se utilizan en una multitud de contextos e industrias. En Colombia, se han reportado aplicaciones de la optimización en sistemas reales; algunas de estas se enumeran en la tabla 1.1.

Tabla 1.1 Aplicaciones de optimización en el contexto nacional

Área	*Aplicaciones*
Agroindustria	Ubicación de centros logísticos para el acopio de productos agrícolas (Mejía *et al.*, 2021). Planeación integrada de la cadena de suministro de pollos de engorde (Solano-Blanco *et al.*, 2020). Asignación de máquinas cosechadoras a cultivos de arroz (Puentes *et al.*, 2019). Diseño de cadenas de abastecimiento sostenible en la industria pesquera (Clavijo Buriticá *et al.*, 2017). Diseño de la cadena de suministro de la feijoa de exportación (Cañón *et al.*, 2014).
Construcción	Selección de materiales ambientalmente amigables (Castro-Lacouture *et al.*, 2009).
Educación	Planeación y medición del desempeño en educación superior (Villegas *et al.*, 2021). Programación de clases y asignación de salones en universidades o colegios (Arias-Osorio y Mora-Esquivel, 2020; Marín Ángel y Maya Duque, 2016; Torres-Ovalle *et al.*, 2014). Asignación de cupos escolares (Maya Duque, 2008).
Finanzas	Transporte de efectivo (Osorio Muriel y Toro, 2012). Selección de proyectos de inversión (Medaglia et al., 2008). Optimización multiobjetivo de portafolios de inversión (De Greiff y Rivera, 2018).
Gestión de la producción	Balanceo de líneas de producción en la industria farmacéutica (Orejuela Cabrera y Flórez González, 2019). Programación de corte de materia prima (Orejuela Cabrera *et al.*, 2014; Rodríguez Noriega *et al.*, 2016). Planificación integrada de producción y distribución en la industria metalúrgica (Gutiérrez-Franco *et al.*, 2010). Programación de producción en la industria de la moda (Vargas-Nieto y Montoya-Torres, 2008).
Logística	Gestión de inventarios en productos de consumo masivo (Vidal Holguín *et al.*, 2004) y de carne de cerdo en punto de venta (Ordóñez Castaño *et al.*, 2015). Diseño de la red de acopio de café de exportación (Villegas *et al.*, 2006) y de programas de asistencia alimenticia (Rueda-Velasco *et al.*, 2019). Distribución de alimentos preparados (Martínez y Amaya, 2013) y alimentos congelados (Mejía y Castro, 2007). Selección de tecnologías para la reducción del impacto

Tabla 1.1 (continuación)

Área	*Aplicaciones*
	ambiental de la cadena de suministro del cemento (Cadavid-Giraldo *et al.*, 2016) y la evaluación del efecto de impuestos al carbono (Cadavid-Giraldo *et al.*, 2020). Programación de despachos para minimizar las entregas tardías (Vélez-Gallego *et al.*, 2020). Selección de unidades de empaque (Mejía Argueta *et al.*, 2015). Logística urbana (Ramírez-Villamil *et al.*, 2020).
Planeación pública y urbana	Selección de lugares para actividad física pública gratuita (Abolghasem *et al.*, 2019). Selección de políticas públicas de mejora de la calidad del aire (Sefair *et al.*, 2019). Localización de unidades de atención inmediata de la Policía (Guarín *et al.*, 2015).
Recolección de residuos y logística inversa	Diseño de la red de recolección de llantas usadas (Flórez Calderón *et al.*, 2012) y residuos hospitalarios peligrosos (Medaglia *et al.*, 2009). Enrutamiento de vehículos para la recolección de residuos industriales (Arias Osorio, 2012), residuos de origen animal (Aguirre-González y Villegas, 2017) y domiciliarios (Patiño Chirva *et al.*, 2016). Localización de estaciones de transferencia (Valencia *et al.*, 2015) y rellenos sanitarios (Manyoma *et al.*, 2015). Logística inversa en la industria de palma de aceite (Alfonso-Lizarazo *et al.*, 2013).
Minería, energía y sistemas eléctricos	Reubicación de transformadores de distribución (Bolaños *et al.*, 2014). Planeación de la operación en zonas no interconectadas (Acuña *et al.*, 2021). Planeación de la localización de estaciones de carga (Villa *et al.*, 2020) y programación de la recarga (Villa *et al.*, 2019). Diseño de la estrategia de recarga y competencia en carreras de vehículos solares (Betancur *et al.*, 2017). Optimización de la cadena de suministro de biodiésel (Gutiérrez-Franco *et al.*, 2011). Planeación de la extracción en minas de cobre (Sepúlveda *et al.*, 2020).
Salud	Planeación de donación de sangre (Osorio Muriel *et al.*, 2014). Planeación y programación de servicios de cirugía (Álvarez Tobón *et al.*, 2015). Zonificación de pacientes en atención médica domiciliaria (Cortés *et al.*, 2018; Gutiérrez-Gutiérrez y Vidal, 2015). Ubicación de ambulancias para la atención de accidentes de tránsito (Castañeda y Villegas, 2017). Distribución de elementos de protección en la atención de la pandemia del covid-19 (Martínez Reyes *et al.*, 2020). Planeación de programas de medicina preventiva en escuelas (Barrera *et al.*, 2012). Evaluación de rutas de personal de asistencia (Espejo-Díaz *et al.*, 2020) y localización de centros de atención especializada (Paredes Bayona *et al.*, 2020).
Servicios	Planeación de personal en parqueaderos privados (Restrepo *et al.*, 2012). Enrutamiento de servicios de mantenimiento en acueducto y alcantarillado (Mendoza *et al.*, 2009) y enrutamiento en compañías de control de plagas (Escobar, 2017).
Transporte de pasajeros	Planeación robusta de vuelos en aerolíneas pequeñas (Cadavid Tobón *et al.*, 2015). Planeación de turnos de conductores (Moreno *et al.*, 2019) y programación de rutas (Baldoquin y Rengifo-Campo, 2018) en sistemas de transporte masivo.

En el ámbito global, se han utilizado modelos de optimización y de investigación de operaciones en general para lograr aplicaciones reales de alto impacto, como las que se resaltan con los premios Edelman del Institute for Operations Research and Management Science (INFORMS), los cuales incluyen aplicaciones en muy diversas industrias y países (Gorman *et al.*, 2020; INFORMS, *2022 Edelman Competition Videos*). De igual manera, los premios europeos para la excelencia en la práctica reúnen una buena recopilación de ejemplos reales de aplicación de la investigación de operaciones (The Association of European Operational Research Societies [EURO], 2023).

2 Proceso de modelación en optimización

Un modelo de optimización representa la selección de valores de un vector de variables, de manera que se maximice o minimice una función objetivo, respetando un conjunto de restricciones que representan los límites técnicos de las posibles elecciones. Matemáticamente, un modelo de optimización se puede expresar de distintas maneras; una forma compacta de hacerlo es la siguiente:

$min\ o\ max\ f(x)$

Sujeto a:

$x \in \Omega$

En esta formulación, x representa un vector de variables de decisión, $f(x)$ representa la función objetivo que se desea optimizar (ya sea maximizando o minimizando su valor según sea el caso) y Ω se refiere a la región factible acotada por un conjunto de restricciones que una solución x debe cumplir para considerarse posible.

Antes de construir un modelo de optimización, es necesario definir una notación y modelar las decisiones que se quieren abordar mediante expresiones matemáticas que describen los tres elementos de dicho modelo: variable(s) x, la función objetivo $f(x)$ y las restricciones que definen Ω. Para ilustrar esto, considere el siguiente problema de optimización:

Una compañía de turismo alquila un autobús de 50 puestos a grupos de 35 personas o más. Si un grupo es de exactamente 35 personas, paga $60 por cada una. En grupos más grandes la tarifa se reduce a $1 por cada persona que sobrepase las 35. En este contexto, si la compañía pudiese elegir el tamaño de los grupos a los cuales les alquila el bus, podría estar interesada en determinar el tamaño del grupo que maximiza sus ingresos. Por lo tanto, la compañía tendría que decidir el tamaño del grupo a atender para maximizar sus ingresos, cumpliendo con el requisito de que el tamaño del grupo esté entre 35 y 50 personas. Para formular y resolver esta decisión como un problema de optimización primero se define la notación:

Sea x el tamaño del grupo, que es la única variable de decisión.

La función objetivo es $f(x) = x\,p(x)$, que corresponde a la función de ingresos que se quiere maximizar, donde $p(x)$ representa el precio por persona para un grupo de tamaño x. La estructura de descuento establece que $p(x) = 60 - (x - 35)$.

Finalmente, la condición principal que debe cumplir el grupo es que debe estar entre 35 y 50 personas. Por lo tanto, el conjunto Ω está definido por la condición $\Omega = \{x\colon 35 \leq x \leq 50, x \in \mathbb{Z}\}$, dado que los grupos de personas deben respetar el tamaño mínimo establecido por la compañía, no deben exceder la capacidad del bus y, además, deben ser números enteros.

La optimización no es del todo nueva para un estudiante universitario, ya que en los cursos de cálculo diferencial se estudia la optimización de funciones diferenciables utilizando las condiciones de primer orden, es decir, igualando a cero la primera derivada de la función a optimizar. Se utilizará este conocimiento para resolver el problema del ejemplo. Después de reemplazar $p(x)$ en la función de ingresos, se obtiene:

$$f(x) = x[60 - (x - 35)] = 60x - x^2 + 35x = 95x - x^2$$

De esta manera, se puede expresar el problema de optimización así:

$$\max f(x) = 95x - x^2$$

Sujeto a:

$$35 \leq x \leq 50$$

$$x \in \mathbb{Z}$$

Si se aplican las condiciones de primer orden (igualando la derivada a 0), se tiene:

$$f'(x) = 95 - 2x = 0$$

Al resolver para x, se obtiene $x = \frac{95}{2} = 47.5$, que se encuentra en el rango entre 35 y 50 personas. Sin embargo, dado que la variable de decisión debe ser entera, exploraremos qué ocurre con la función objetivo si se redondea el valor de x hacia arriba o hacia abajo. Si bien este procedimiento no puede aplicarse a todos los problemas de optimización, en este caso, como la función objetivo es cuadrática (tal como lo muestra la figura 2.1), podemos garantizar que tiene un único valor óptimo en el caso continuo ($x \geq 0$) y que para el caso entero el valor óptimo estará entre 47 y 48. Al evaluar la función objetivo en ambos valores, vemos que su valor coincide:

$$f(47) = 95(47) - (47)^2 = 2256$$