27ª EDICIÓN

PROBLEMAS DE FÍSICA

Estática, Cinemática y Dinámica

S. Burbano de Ercilla
E. Burbano García
C. Gracia Muñoz

Tébar

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

PROBLEMAS DE FÍSICA

27ª Edición

TOMO 1: Estática, cinemática y dinámica

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

PROBLEMAS DE FÍSICA

27ª Edición

TOMO 1: Estática, cinemática y dinámica

SANTIAGO BURBANO DE ERCILLA
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICAS Y QUÍMICAS

ENRIQUE BURBANO GARCÍA
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICAS

CARLOS GRACIA MUÑOZ
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICAS

Tébar

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Datos de catalogación bibliográfica:

PROBLEMAS DE FÍSICA
TOMO 1: Estática, Cinemática y Dinámica
27ª edicción
Enrique Burbano García
Carlos García Muñoz

EDITORIAL TÉBAR, S.L., Madrid, año 2006

ISBN digital: 978-84-7360-410-9
Materias: Física, 53

Formato: 210 × 297 mm Páginas: 348

www.editorialtebar.com

Todos los derechos reservados.
Queda prohibida, salvo excepción prevista en la Ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con la autorización expresa de Editorial Tébar. La infracción de estos derechos puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (arts. 270 y siguientes del Código Penal).

Problemas de Física
Tomo 1: Estática, Cinemática y Dinámica
© 2006 Editorial Tébar, S.L.
C/ de las Aguas, 4
28005 Madrid (España)
Tel.: 91 550 02 60
Fax: 91 550 02 61
pedidos@editorialtebar.com
www.editorialtebar.com

ISBN digital: 978-84-7360-410-9

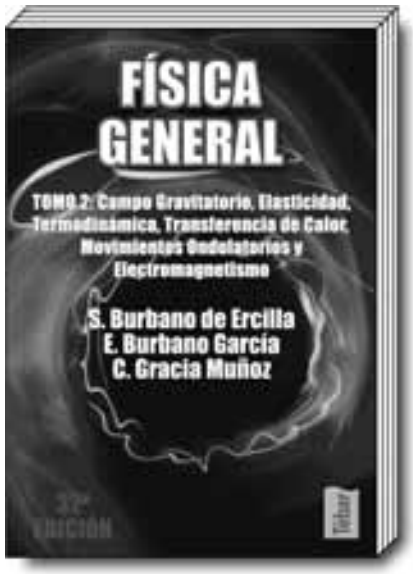
Diseño editorial: MonoComp, S.A. y Rebeca Irazábal
Diseño de portada: Omega Estudio Gráfico y Rebeca Irazábal

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

















© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

PRÓLOGO

En esta nueva edición (la número XXVIII) se han actualizado, reordenado y ampliado todos los temas, conteniendo nuevos tipos de problemas y empleando diferentes normas metodológicas en sus soluciones (muchos de los problemas que contiene este libro se han resuelto de dos o tres maneras diferentes), siempre con el fin de clarificar al alumno de Física los conceptos adquiridos en sus estudios teóricos.

Este libro pretende ser una ayuda en el aprendizaje de la resolución de problemas para los alumnos que estudien algún aspecto de la Física en sus primeros cursos universitarios.

*Contiene la obra más de **2100 problemas totalmente resueltos y explicados**, ordenados de acuerdo con lo indicado en los distintos apartados del libro Física General, de los mismos autores, y también publicado por Editorial Tébar.*

Encabeza la obra don Santiago Burbano de Ercilla, fallecido en 1967, puesto que fue su iniciador y no vemos que se pueda hacer mejor homenaje a un hombre que además de ser padre y maestro de uno de los autores, dedicó toda su vida a la enseñanza de la Física, dejándonos una profunda huella a todos los que le conocimos, no sólo por su gran humanidad, sino también por la manera tan particular que tenía de exponer de forma tan sencilla esta nada fácil disciplina, tanto como profesor que fue de la Facultad de Ciencias de Zaragoza, como en su tarea en la Enseñanza Media.

También queremos recordar a don Gabriel Díaz de Villegas Blasco, ya fallecido, que en su día fue colaborador de don Santiago Burbano de Ercilla.

Rogamos a quienes trabajen con este libro, profesores o alumnos, nos indiquen los errores que encuentren, así como las faltas de claridad. Ello irá en beneficio de futuros estudios. Muchas gracias.

Enrique Burbano García
Carlos Gracia Muñoz

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

CONTENIDO

TOMO 1
Estática, Cinemática y Dinámica

Capítulo I. Unidades físicas. Análisis dimensional. Errores en las medidas 13

Capítulo II. Cálculo vectorial. Sistemas de referencia 29

MECÁNICA

Capítulo III. Cinemática de la partícula. Magnitudes fundamentales. Movimiento rectilíneo 53

Capítulo IV. Cinemática del movimiento curvilíneo de la partícula 91

DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

Capítulo V. Fuerza y masa. Las tres leyes de Newton. Estática. Magnitudes angulares 129

Capítulo VI. Peso. Rozamiento. Oscilaciones 169

Capítulo VII. Trabajo y energía de la partícula. Teoría de campos. Principio de conservación de la energía 209

DINÁMICA DE LOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS

Capítulo VIII. Dinámica de los sistemas de partículas 247

Capítulo IX. Cinemática y estática del sólido rígido 275

Capítulo X. Dinámica del sólido rígido 301

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

CAPÍTULO I

UNIDADES FÍSICAS. ANÁLISIS DIMENSIONAL. ERRORES EN LAS MEDIDAS

A) UNIDADES Y SISTEMAS

FORMULARIO

UNIDADES FUNDAMENTALES DEL SI*

Magnitud física	*Unidad*	*Abreviatura*
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s
Corriente eléctrica	Amperio	A
Temperatura	Kelvin	K
Intensidad luminosa	Candela	cd
Cantidad de sustancia	Mol	mol

OTROS SISTEMAS DE UNIDADES NORMALMENTE UTILIZADOS

Sistema	*Magnitudes Fundamentales*	*Unidades*
UEE (CGS)	Longitud (L) Masa (M) Tiempo (T) Permitividad (ε)	Centímetro Gramo Segundo $\varepsilon_0 = 1/4\pi$
TÉCNICO	Longitud (L) Fuerza (F) Tiempo (T)	Metro Kilopondio Segundo
ABSOLUTO INGLÉS	Longitud (L) Masa (M) Tiempo (T) Intensidad (A)	Pie Libra-masa Segundo Amperio

* Este sistema es el que fundamentalmente emplearemos en este libro.

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

PREFIJOS, SÍMBOLOS Y VALORES RECOMENDADOS, POR LA CGPM PARA LAS UNIDADES SIMPLES DEL SISTEMA INTERNACIONAL

Factor por el cual ha de multiplicarse la unidad	Prefijo	Símbolo
$1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 = 10^{24}$	yotta	Y
$1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 = 10^{21}$	zetta	Z
$1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 = 10^{18}$	exa	E
$1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 = 10^{15}$	peta	P
$1\ 000\ 000\ 000\ 000 = 10^{12}$	tera	T
$1\ 000\ 000\ 000 = 10^{9}$	giga	G
$1\ 000\ 000 = 10^{6}$	mega	M
$1\ 000 = 10^{3}$	kilo	k
$100 = 10^{2}$	hecto	h
$10 = 10^{1}$	deca	da
$0{,}1 = 10^{-1}$	deci	d
$0{,}01 = 10^{-2}$	centi	c
$0{,}001 = 10^{-3}$	mili	m
$0{,}000\ 001 = 10^{-6}$	micro	μ
$0{,}000\ 000\ 001 = 10^{-9}$	nano	n
$0{,}000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-12}$	pico	p
$0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-15}$	femto	f
$0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-18}$	atto	a
$0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-21}$	zepto	z
$0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-24}$	yocto	y

UNIDADES DISTINTAS A LAS DEL SISTEMA INTERNACIONAL NORMALMENTE UTILIZADAS EN LOS DISTINTOS MEDIOS DE TRABAJO Y SU EQUIVALENCIA EN EL SISTEMA INTERNACIONAL

MASA		LONGITUD	
1 gramo (g)	$= 10^{-3}$ kg	*1* micra (μ)	$= 10^{-6}$ m
1 tonelada métrica (t)	$= 10^{3}$ kg	*1* milimicra (mμ)	$= 10^{-9}$ m
1 libra-masa (lbm)	$= 0{,}453\ 6$ kg	*1* angström (Å)	$= 10^{-10}$ m
1 slug	$= 14{,}59$ kg	*1* unidad X (uX)	$= 10^{-13}$ m
1 ton, long (*2 240* lb)	$= 1\ 016$ kg	*1* fermi (fm)	$= 10^{-15}$ m
1 ton, short (*2 000* lb)	$= 907{,}2$ kg	*1* año luz	$= 9{,}65 \times 10^{15}$ m
1 unidad de masa atómica (u)	$= 1{,}661 \times 10^{-27}$ kg	*1* parsec (pc)	$= 3{,}07 \times 10^{16}$ m
1 unidad técnica de masa (utm)	$= 9{,}806$ kg	*1* milla* (mile)	$= 1\ 609$ m
		1 pie (ft)	$= 0{,}304\ 8$ m
		1 pulgada (in)	$= 2{,}54 \times 10^{-2}$ m
		1 yarda (yd)	$= 0{,}914\ 4$ m
TIEMPO		INTENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA	
1 año (a)	$= 3{,}156 \times 10^{7}$ s	*1* UEEI	$= 3{,}336 \times 10^{-10}$ A
1 día (d)	$= 86\ 400$ s		
1 hora (h)	$= 3\ 600$ s		
1 minuto (min)	$= 60$ s		

* Esta es la milla terrestre. La milla marina equivale a *1 852* m.

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

UNIDADES SUPLEMENTARIAS Y DERIVADAS			
Magnitud	Unidad	Símbolo	Expresión en otras unidades SI
UNIDADES SUPLEMENTARIAS			
Ángulo plano	radián	rad	
Ángulo sólido	estereorradián	sr	
UNIDADES DERIVADAS			
Superficie	metro cuadrado	m^2	
Volumen	metro cúbico	m^3	
Frecuencia	hertz	Hz	$1/s$
Densidad	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3	
Velocidad	metro por segundo	m/s	
Velocidad angular	radián por segundo	rad/s	
Aceleración	metro por segundo cuadrado	m/s^2	
Aceleración angular	radián por segundo cuadrado	rad/s^2	
Fuerza	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
Presión (tensión mecánica)	pascal	Pa	N/m^2
Viscosidad cinemática	metro cuadrado por segundo	m^2/s	
Viscosidad dinámica	pascal por segundo	$Pa \cdot s$	$N \cdot s/m^2$
Trabajo, energía, cantidad de calor	julio	J	$N \cdot m$
Potencia	vatio	W	J/s
Cantidad de electricidad	culombio	C	$A \cdot s$
Tensión eléctrica, diferencia de potencial, fuerza electromotriz	voltio	V	W/A
Intensidad de campo eléctrico	voltio por metro	V/m	
Resistencia eléctrica	ohmio	Ω	V/A
Conductancia eléctrica	siemens	S	A/V
Capacidad eléctrica	faradio	F	C/V
Flujo de inducción magnética	weber	Wb	$V \cdot s$
Inducción electromagnética	henrio	H	Wb/A
Inducción magnética	tesla	T	Wb/m^2
Intensidad de campo magnético	amperio por metro	A/m	
Fuerza magnetomotriz	amperio	A	
Flujo luminoso	lumen	lm	$cd \cdot sr$
Luminancia	candela por metro cuadrado	cd/m^2	
Iluminación	lux	lx	lm/m^2
Número de ondas	una onda por metro	$1/m$	
Entropía	julio por kelvin	J/K	
Calor específico	julio por kilogramo kelvin	$J/(kg \cdot K)$	
Conductividad térmica	vatio por metro kelvin	$W/(m \cdot K)$	
Intensidad energética	vatio por estereorradián	W/sr	
Actividad (de una fuente radiactiva)	una desintegración por segundo	Bq	$1/s$

Problema I-1. Teniendo en cuenta la equivalencia entre las unidades fundamentales, determinar los factores de conversión de:

1. km/h a mile/h.

2. lb/ft^3 a g/cm^3.

3. $t \cdot m/s^2$ a $slug \cdot yd/s^2$.

Solución

1) $1\,\frac{km}{h} = 10^3\,\frac{m}{h} = \frac{10^3}{1609}\,\frac{mile}{h} = 0{,}621\,5\,\frac{mile}{h}$

2) $1\,\frac{lb}{ft^3} = \frac{0{,}453\,6}{0{,}304\,8^3}\,\frac{kg}{m^3} = \frac{0{,}453\,6 \times 10^3}{0{,}304\,8^3 \times 10^6}\,\frac{g}{cm^3} = 0{,}016\,\frac{g}{cm^3}$

3) $1\,\frac{t \cdot m}{s^2} = 10^3\,\frac{kg \cdot m}{s^2} = \frac{10}{14{,}59 \times 0{,}914\,4} = \frac{slug \cdot yd}{s^2} = 74{,}956\,4\,\frac{slug \cdot yd}{s^2}$

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Problema I-2. Pasar al SI las siguientes unidades:
1. *1* yarda/s.
2. *1* milla/h.
3. *1* poundal (pdl) = *1* lb · ft/s^2.
4. *1* slug/ft^3.

Solución

1) $1\,\frac{\text{yd}}{\text{s}} = 0{,}914\,4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

2) $1\,\frac{\text{mile}}{\text{h}} = \frac{1\,609}{3\,600}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}446\,9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

3) $1\,\frac{\text{lb}\cdot\text{ft}}{\text{s}^2} = 0{,}453\,6 \times 0{,}304\,8\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2} = 0{,}138\,2\ \text{N}$

4) $1\,\frac{\text{slug}}{\text{ft}^3} = \frac{14{,}59}{0{,}304\,8^3}\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 515{,}241\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Problema I-3. Pasar al sistema absoluto inglés las siguientes unidades:
1. kg · m^2.
2. utm/cm^3.
3. kg · m^2/h.

Solución

1) $1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 = \frac{1}{0{,}453\,6 \times 0{,}304\,8^2}\ \text{lb}\cdot\text{ft}^2 = 23{,}73\ \text{lb}\cdot\text{ft}^2$

2) $1\,\frac{\text{utm}}{\text{cm}^3} = \frac{9{,}806 \times 10^6 \times 0{,}304\,8^3}{0{,}453\,6}\,\frac{\text{lb}}{\text{ft}^3} = 6{,}1216 \times 10^5\,\frac{\text{lb}}{\text{ft}^3}$

3) $1\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{h}} = \frac{1}{0{,}453\,6 \times 0{,}304\,8^2 \times 3\,600}\,\frac{\text{lb}\cdot\text{ft}^2}{\text{s}} = 6{,}592 \times 10^{-6}\,\frac{\text{lb}\cdot\text{ft}^2}{\text{s}}$

Problema I-4. Definir el ESTENO, unidad de fuerza en el sistema MTS (metro, tonelada masa, segundo). Calcular su equivalencia con la dina, el newton y el kilopondio.

Solución

Si en la ecuación fundamental de la dinámica: $F = Ma$

hacemos: $M = 1$ t $\wedge$ $a = 1$ m/s^2 $\Rightarrow$ $F = 1$ esteno

«El esteno es la fuerza que aplicada a una tonelada masa, le comunica una aceleración de un metro por segundo cada segundo.»

$$\left.\begin{array}{r} 1\ \text{t} = 10^6\ \text{g} \\ 1\ \text{m/s}^2 = 100\ \text{cm/s}^2 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad 1\ \text{esteno} = 10^8\ \text{dyn}$$

$$1\ \text{N} = 10^5\ \text{dyn} \quad \Rightarrow \quad 1\ \text{esteno} = \frac{10^8}{10^5} = 10^3\ \text{N}$$

$$1\ \text{kp} = 9{,}8\ \text{N} \quad \Rightarrow \quad 1\ \text{esteno} = \frac{10^3}{9{,}8} = 102{,}04\ \text{kp}$$

B) ANÁLISIS DIMENSIONAL

FORMULARIO

Ecuación dimensional de una magnitud *S* en base *L*, *M*, *T*:

$$[S] = L^a\,M^b\,T^c$$

Condiciones de equidimensionalidad (homogeneidad) de una magnitud tal que: $[S] = L^a\,M^b\,T^c$

cuando viene expresada en función de otras tres *P*, *Q* y *R* por la fórmula: $[S] = P^{x_1}\,Q^{x_2}\,R^{x_3}$

siendo:

$$\left.\begin{array}{l} [P] = L^{a_1}\,M^{b_1}\,T^{c_1} \\ [Q] = L^{a_2}\,M^{b_2}\,T^{c_2} \\ [R] = L^{a_3}\,M^{b_3}\,T^{c_3} \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = b \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = c \end{array}\right.$$

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Problema I-5. 1. Conocida la ecuación de dimensiones de la velocidad $[v] = LT^{-1}$ determinar las de la aceleración a y la fuerza F, sabiendo que $[a] = [v]/[t]$ y que $[F] = [M]\,[a]$, siendo t el tiempo y M la masa.

2. Determinar la ecuación de dimensiones de la constante de gravitación universal que interviene en la conocida ley de Newton: $F = GMM'/r^2$ (M y M' = masas; F = fuerza; r = distancia entre los cuerpos).

3. Determinar la ecuación de dimensiones del número π.

4. Determinar la ecuación de dimensiones de un seno, un coseno y una tangente.

5. Determinar la ecuación de dimensiones de la energía (W) sabiendo que $[W] = [F]\,[r]$.

6. Determinar la ecuación de dimensiones de la constante de tensión superficial (σ) sabiendo que: $[\sigma] = [W]/[A]$, (A: superficie).

7. Determinar la ecuación de dimensiones del coeficiente de viscosidad (η) sabiendo que $[\eta] = [F]\,[r]/[A]\,[v]$.

8. Determinar la ecuación de dimensiones del número de Reynolds (R), sabiendo que $[v] = [R]\,[\eta]/[\rho]\,[r]$ (ρ: densidad).

Solución

1) Sistema

Internacional: $[a] = \dfrac{[v]}{[t]} = \dfrac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}$ $\qquad [F] = [M]\,[a] = MLT^{-2}$

Técnico: $[a] = \dfrac{[v]}{[t]} = \dfrac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}$ $\qquad [F] = F$

2) Sistema

Internacional: $[G] = \dfrac{[r^2]\,[F]}{[M]\,[M']} = \dfrac{L^2 MLT^{-2}}{MM} = L^3 M^{-1} T^{-2}$

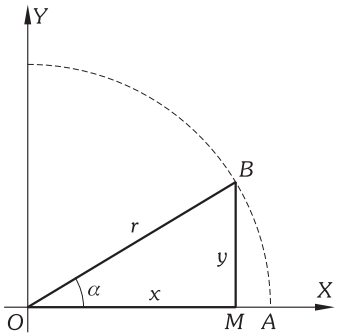
Técnico: $[G] = \dfrac{[r^2]\,[F]}{[M]\,[M']} = \dfrac{L^2 F}{\dfrac{F^2}{(LT^{-2})^2}} = L^4 T^{-4} F^{-1}$

3) $\pi = \dfrac{C}{D}$ | C: longitud de la circunferencia; D: longitud del diámetro | $[\pi] = \dfrac{[C]}{[D]} = \dfrac{L}{L} = 1$

4) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{y}{r}$ $\qquad [\operatorname{sen}\alpha] = \dfrac{[y]}{[r]} = \dfrac{L}{L} = 1$

$\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$ $\qquad [\cos\alpha] = \dfrac{[x]}{[r]} = \dfrac{L}{L} = 1$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$ $\qquad [\operatorname{tg}\alpha] = \dfrac{[y]}{[x]} = \dfrac{L}{L} = 1$



Problema I-5.

5) Sistema

Internacional: $[W] = [F]\,[r] = MLT^{-2}L = ML^2T^{-2}$

Técnico: $[W] = [F]\,[r] = FL$

6) Sistema

Internacional: $[\sigma] = \dfrac{[W]}{[A]} = \dfrac{ML^2T^{-2}}{L^2} = MT^{-2}$

Técnico: $[\sigma] = \dfrac{[W]}{[A]} = \dfrac{FL}{L^2} = FL^{-1}$

7) Sistema

Internacional: $[\eta] = \dfrac{[F]\,[r]}{[A]\,[v]} = \dfrac{MLT^{-2}L}{L^2LT^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}$

Técnico: $[\eta] = \dfrac{[F]\,[r]}{[A]\,[v]} = \dfrac{FL}{L^2LT^{-1}} = FL^{-2}T$

8) Sistema

Internacional: $[R] = \dfrac{[v]\,[\rho]\,[r]}{[\eta]} = \dfrac{LT^{-1}ML^{-3}L}{ML^{-1}T^{-1}} = 1$

Técnico: $[R] = \dfrac{[v]\,[\rho]\,[r]}{[\eta]} = \dfrac{LT^{-1}FL^{-1}T^2L^{-3}L}{FL^{-2}T} = 1$

El número de Reynolds es adimensional.

Problema I-6. Determinar en el SI la ecuación de dimensiones de las siguientes magnitudes eléctricas (Base: L, M, T, A).

1. De la constante de Coulomb (K) que interviene en la ley del mismo nombre: $F = Kqq'/r^2$, sabiendo que $[q] = [I]\,[t] = AT$.

2. De ε sabiendo que $K = 1/4\pi\varepsilon$.

3. Del potencial eléctrico (V): $[V] = [W]/[q]$.

4. De la resistencia eléctrica (R): $[R] = [V]/[I]$.

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

5. Del campo eléctrico E): $[E] = [F]/[q]$.
6. De la capacidad (C): $[C] = [q]/[V]$.
7. Del desplazamiento eléctrico (D): $[D] = [\varepsilon]\,[E]$.
8. De la inducción magnética (B): $[B] = [F]/[q]\,[v]$.
9. De la permeabilidad magnética (μ): $[B] = [\mu]\,[I]/[r]$.
10. De la autoinducción (L): $[L] = [B]\,[A]/[I]$.

Solución

1) $[K] = \dfrac{[F][r^2]}{[q][q']} = \dfrac{MLT^{-2}L^2}{A^2T^2} = ML^3T^{-4}A^{-2}$

2) $[\varepsilon] = \dfrac{1}{[K]} = M^{-1}L^{-3}T^4A^2$

3) $[V] = \dfrac{[W]}{[q]} = \dfrac{ML^2T^{-2}}{AT} = ML^2T^{-3}A^{-1}$

4) $[R] = \dfrac{[V]}{[I]} = \dfrac{ML^2T^{-3}A^{-1}}{A} = ML^2T^{-3}A^{-2}$

5) $[E] = \dfrac{[F]}{[q]} = \dfrac{MLT^{-2}}{AT} = MLT^{-3}A^{-1}$

6) $[C] = \dfrac{[q]}{[V]} = \dfrac{AT}{ML^2T^{-3}A^{-1}} = M^{-1}L^{-2}T^4A^2$

7) $[D] = [\varepsilon]\,[E] = M^{-1}L^{-3}T^{-4}A^2MLT^{-3}A^{-1} = L^{-2}TA$

8) $[B] = \dfrac{[F]}{[q]\,[v]} = \dfrac{MLT^{-2}}{ATLT^{-1}} = MT^{-2}A^{-1}$

9) $[\mu] = \dfrac{[B]\,[r]}{[I]} = \dfrac{MT^{-2}A^{-1}L}{A} = MLT^{-2}A^{-2}$

10) $[L] = \dfrac{[B]\,[A]}{[I]} = \dfrac{MT^{-2}A^{-1}L^2}{A} = ML^2T^{-2}A^{-2}$

Problema I-7. Teniendo en cuenta los factores de conversión entre las unidades de las magnitudes fundamentales en los sistemas GIORGI, CGS y ABSOLUTO INGLÉS, determinar las equivalencias entre las unidades, en estos sistemas, de las magnitudes:
1. Fuerza ($[F] = [M]\,[a]$).
2. Potencial eléctrico ($[V] = [W]/[q]$).

Solución

1) $[F] = MLT^{-2} \Rightarrow$
1 unidad (GIORGI) de fuerza $= 1\ \text{N} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
1 unidad (CGS) de fuerza $= 1\ \text{dyn} = 1\ \text{g}\cdot\text{cm}\cdot\text{s}^{-2}$
1 unidad (AI) de fuerza $= 1\ \text{pdl} = 1\ \text{lb}\cdot\text{ft}\cdot\text{s}^{-2}$

luego:

$$1\ \text{N} = 1\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2} = 10^3 \times 10^2\,\frac{\text{g}\cdot\text{cm}}{\text{s}^2} = 10^5\ \text{dyn}$$

$$1\ \text{N} = 1\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{1}{0{,}453\,6 \times 0{,}304\,8}\,\frac{\text{lb}\cdot\text{ft}}{\text{s}^2} = 7{,}233\ \text{pdl}$$

$$1\ \text{dyn} = 10^{-5}\ \text{N} = 7{,}233 \times 10^{-5}\ \text{pdl}$$

$$1\ \text{pdl} = \frac{1}{7{,}233}\ \text{N} = 0{,}138\ 25\ \text{N} = 13\ 825\ \text{dyn}$$

2) $[V] = ML^2T^{-3}A^{-1} \Rightarrow$
1 unidad (GIORGI) de potencial $= 1\ \text{V} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}\cdot\text{A}^{-1}$
1 unidad (UEE) de potencial $= 1\ \text{g}\cdot\text{cm}^2\cdot\text{s}^{-3}\cdot(\text{UEEI})^{-1}$
1 unidad (AI) de potencial $= 1\ \text{lb}\cdot\text{ft}^2\cdot\text{s}^{-3}\cdot\text{A}^{-1}$

luego:

$$1\ \text{V} = 1\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{A}\cdot\text{s}^3} = 10^3 \times 10^4 \times 3{,}336 \times 10^{-10}\,\frac{\text{g}\cdot\text{cm}^2}{(\text{UEEI})\cdot\text{s}^3} = \frac{1}{300}\ \text{UEE de Potencial}$$

$$1\ \text{V} = 1\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{A}\cdot\text{s}^3} = \frac{1}{0{,}453\,6 \times 0{,}304\,8^2}\,\frac{\text{lb}\cdot\text{ft}^2}{\text{A}\cdot\text{s}^3} = 23{,}73\,\frac{\text{lb}\cdot\text{ft}^2}{\text{A}\cdot\text{s}^3}$$

$$1\ \text{UEE de Potencial} = 300\ \text{V} = 300 \times 23{,}73\,\frac{\text{lb}\cdot\text{ft}^2}{\text{A}\cdot\text{s}^3} = 7\ 119\,\frac{\text{lb}\cdot\text{ft}^2}{\text{A}\cdot\text{s}^3}$$

$$1\,\frac{\text{lb}\cdot\text{ft}^2}{\text{A}\cdot\text{s}^3} = 0{,}042\ \text{V} = 1{,}4 \times 10^{-4} = 13\ 825\ \text{UEE de Potencial}$$

Problema I-8. Sabemos que el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre (g_0) es $9{,}8$ m/s^2. ¿Cuál es la aceleración de la gravedad expresada en el sistema absoluto inglés?

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Solución

$$[g_0] = LT^{-2} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} 1 \text{ unidad (SI) de aceleración} = 1 \text{ m/s}^2 \\ 1 \text{ unidad (AI) de aceleración} = 1 \text{ ft/s}^2 \end{array} \right.$$

$$1 \text{ m/s}^2 = \frac{1}{0{,}304\,8} \text{ ft/s}^2 = 3{,}280\,8 \text{ ft/s}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{g_0 = 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 9{,}8 \times 3{,}280\,8 \text{ ft/s}^2 = 32{,}15 \text{ ft/s}^2}$$

Problema I-9. En las gasolineras inglesas los aparatos de medida de presión de neumáticos de coche se miden en pdl/in^2 (poundal/pulgada^2). Si queremos hinchar la rueda de nuestro coche, a la presión de $1{,}8$ kp/cm^2, ¿qué presión debe solicitarse en Inglaterra para obtener este resultado?

Solución

Sabemos que: $[P] = \dfrac{[F]}{[A]}$ y que por la definición del kilopondio se obtiene: 1 kp $= 9{,}8$ N

y como: 1 kp/cm$^2 = 9{,}8 \times 10^4$ N/m^2 tendremos que: $1{,}8$ kp/cm$^2 = 1{,}8 \times 9{,}8 \times 10^4$ N/m^2

En el problema 7 veíamos que: 1 N $= 7{,}233$ pdl y como: $1 \text{ m}^2 = \dfrac{1}{2{,}54^2 \times 10^{-4}} \text{ in}^2$

la presión que debe solicitarse será: $\boxed{p = 1{,}8 \times 9{,}8 \times 10^4 \times 7{,}233 \times 2{,}54^2 \times 10^{-4} = 823 \text{ pdl/in}^2}$

Problema I-10. Determinar la ecuación de dimensiones del momento de inercia y comprobar la homogeneidad de las siguientes fórmulas físicas

$$N = I\alpha \qquad Nt = \Delta(I\omega) \qquad N\varphi = \Delta\left(\frac{1}{2} I\omega^2\right)$$

[N = momento del par; I = momento inercia; t = tiempo; φ, ω y α son respectivamente el ángulo de giro, la velocidad angular y la aceleración angular].

Solución

Para la solución tenemos que determinar la ecuación de dimensiones de un ángulo, de una velocidad angular y de una aceleración angular.

$$[\varphi] = \frac{[\text{arco}]}{[\text{radio}]} = \frac{L}{L} = 1 \qquad \omega = \frac{[\varphi]}{[t]} = \frac{1}{T} = T^{-1} \qquad \alpha = \frac{[\omega]}{[t]} = T^{-2}$$

Ecuación de dimensiones de I: $I = \sum m_i r_i^2 \quad \Rightarrow \quad [I] = ML^2$

Ecuación de dimensiones del momento de un par: $[N] = [F]\,[r] \quad \Rightarrow \quad [N] = ML^2T^{-2}$

luego:

$$[N] = [I][\alpha] \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} [N] = ML^2T^{-2} \\ [I\alpha] = ML^2T^{-2} \end{array} \right| \quad \text{Homogénea}$$

$$[N][t] = [I][\omega] \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} [Nt] = ML^2T^{-1} \\ [I\omega] = ML^2T^{-1} \end{array} \right| \quad \text{Homogénea}$$

$$[N][\varphi] = [I][\omega^2] \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} [Iw^2] = ML^2T^{-2} \\ [N\varphi] = ML^2T^{-2} \end{array} \right| \quad \text{Homogénea}$$

Problema I-11. 1. Demostrar la homogeneidad de las siguientes fórmulas físicas: *Impulso = variación momento lineal*: $Ft = \Delta(Mv)$ (F = fuerza; t = tiempo; M = masa; v = velocidad) *Trabajo = variación energía cinética*: $Fs\cos\varphi = \Delta(Mv^2/2)$ (s = espacio; φ = ángulo formado por F y s).

2. Demostrar que el «*trinomio de Bernouilli*» es homogéneo, es decir, que sus tres sumando tienen la misma ecuación dimensional; el trinomio es:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + h\rho g = cte$$

(p = presión = fuerza/superficie; ρ = densidad = masa/volumen; v = velocidad; h = altura; g = aceleración de la gravedad).

Solución

1) Las fórmulas serán homogéneas si las ecuaciones de dimensiones de los dos miembros son idénticas.

Ecuación de dimensiones del impulso: $[F][t] = MLT^{-2}T = MLT^{-1}$
Ecuación de dimensiones, variación momento lineal: $[M][v] = MLT^{-1}$ | Homogénea

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Ecuación de dimensiones del trabajo: $[F][s] = MLT^{-2}L = ML^2T^{-2}$
Ecuación de dimensiones, variación energía cinética: $[Mv^2/2] = ML^2T^{-2}$
Homogénea

2) $[p] = \dfrac{[F]}{[A]} = \dfrac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$ $\quad \left[\dfrac{1}{2}\rho v^2\right] = ML^{-3}L^2T^{-2} = ML^{-1}T^{-2}$ $\quad [h\rho g] = LML^{-3}LT^{-2} = ML^{-1}T^{-2}$

Problema I-12. Teniendo en cuenta el problema 6, demostrar la homogeneidad de las siguientes fórmulas físicas:
1. $W = VIt = V^2t/R = I^2Rt$. **2.** $B = \mu I/2\pi r$. **3.** $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Solución

1) $[W] = ML^2T^{-2}$ $\wedge$
$[Vlt] = ML^2T^{-3}A^{-1}AT = ML^2T^{-2}$
$\left[\dfrac{V^2}{R}t\right] = \dfrac{M^2L^4T^{-6}A^{-2}}{ML^2T^{-3}A^{-2}}T = ML^2T^{-2}$
$[I^2Rt] = A^2ML^2T^{-3}A^{-2}T = ML^2T^{-2}$

2) $[B] = MT^{-2}A^{-1}$ $\quad \left[\dfrac{\mu I}{2\pi r}\right] = \dfrac{MLT^{-2}A^{-2}A}{L} = MT^{-2}A^{-1}$

3) $[v] = LT^{-1}$ $\quad \left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right] = \dfrac{1}{[\varepsilon]^{1/2}\,[\mu]^{1/2}} = \dfrac{1}{M^{-1/2}L^{-3/2}T^2AM^{1/2}L^{1/2}T^{-1}A^{-1}} = \dfrac{1}{L^{-1}T} = LT^{-1}$

Problema I-13. Demostrar que la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

es homogénea para cualquiera que sea ψ (longitud, presión, campo eléctrico, etc.) siendo v la velocidad de la onda.

Solución

Supongamos que $[\psi] = P$, entonces, tomando como base (L, T, P):

$$\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right] = \frac{[\psi]}{[t]^2} = PT^{-2} \qquad [v^2]\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right] = [v^2]\,\frac{[\psi]}{[x]^2} = L^2T^{-2}PL^{-2} = PT^{-2}$$

como queríamos demostrar.

Problema I-14. Suponiendo que el período de oscilación de un péndulo simple (T = tiempo que tarda en dar una oscilación) depende exclusivamente de la longitud del hilo (l), de la masa (m) de la partícula que oscila y de la aceleración de la gravedad (g), y que en la fórmula del período no intervienen más que las magnitudes indicadas, en producto entre sí (elevadas a exponentes diversos) y ligadas por un coeficiente numérico, deducir las leyes a que obedece el período de oscilación de dicho péndulo.

Solución

La fórmula del péndulo tendrá que ser de la frorma: $T = Kl^x m^y g^z$

Siendo la ecuación de dimensiones de g (aceleración) LT^{-2}, se debe verificar para que la igualdad anterior sea homogénea:

$$T = L^xM^yL^zT^{-2z} = L^{x+z}M^yT^{-2z}$$

y por tanto: $x + z = 0$ $\quad y = 0$ $\quad -2z = 1$ $\Rightarrow$ $z = -\dfrac{1}{2}$ $\quad x = \dfrac{1}{2}$ $\quad y = 0$

Luego la ecuación será: $T = Kl^{1/2}m^0g^{-1/2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{T = K\sqrt{\dfrac{l}{g}}}$

(el período es independiente de la masa; la hipótesis hecha en el enunciado, no es cierta.)

Problema I-15. Sabiendo que la velocidad de salida de un líquido por un pequeño orificio practicado en la pared de una vasija es proporcional a la distancia vertical (h) del centro del orificio a la superficie libre del líquido y a la aceleración de la gravedad (g); dudamos si tal velocidad es proporcional también a la densidad del líquido. Deseamos resolver nuestra duda y hallar la forma de la función: $v = f(h, g, \rho)$.

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Solución

Hagamos: $v = K h^x g^y \rho^z$ (K = constante de ecuación dimensional 1);

entonces: $[v] = LT^{-1}$ $[h] = L$ $[g] = LT^{-2}$ $[\rho] = ML^{-3}$

Igualemos las ecuaciones de dimensiones del primero y segundo miembro

$$LT^{-1} = L^x L^y T^{-2y} M^z L^{-3z} = L^{x+y-3z} M^z T^{-2y}$$

los exponentes de las mismas magnitudes simples, habrán de ser iguales en el primero y segundo miembro, por lo que obtenemos el sistema de eucaciones:

$$\begin{array}{l|l} 0 = z & z = 0 \\ 1 = x + y - 3z & y = 1/2 \\ -1 = -2y & x = 1/2 \end{array}$$

Valores que sustituidos en el de v, dan: $\boxed{v = Kh^{1/2} g^{1/2} = K\sqrt{hg}}$

Hemos obtenido la forma de la función y deducido que la velocidad de salida de un líquido por un orificio practicado en la pared de una vasija, es independiente de la densidad de tal líquido.

Problema I-16. Sabemos que la energía disipada en forma de calor (Q) por el efecto Joule en una resistencia eléctrica depende de la intensidad de corriente que la atraviesa (I), de la resistencia (R) y del tiempo (t) que circula la corriente por ella. Calcular la forma de la función: $Q = f(I, R, t)$.

Solución

La función tendrá que ser de la forma: $Q = K I^x R^y t^z$

siendo: $[Q] = M L^2 T^{-2}$ $[I] = A$ $[R] = M L^2 T^{-3} A^{-2}$ $[t] = T$

tendrá que verificarse: $M L^2 T^{-2} = A^x M^y L^{2y} T^{-3y} A^{-2y} T^z \quad \Rightarrow \quad M L^2 T^{-2} = M^y L^{2y} T^{z-3y} A^{x-2y}$

y por tanto: $y = 1$ $z - 3y = -2 \quad \Rightarrow \quad z = 1 \quad \wedge \quad x - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

luego la ecuación será: $\boxed{Q = K I^2 R t}$

C) CÁLCULO DE ERRORES

FORMULARIO

Error absoluto: «Es la diferencia entre la medida exacta de una magnitud (x_0) y la medida obtenida experimentalmente (x)».

$$\varepsilon = \Delta x = x_0 - x$$

Error relativo: «Es el cociente del error absoluto al valor exacto de la magitud». $E = \dfrac{\Delta x}{x_0}$

Media aritmética de un conjunto de *n* datos: $\overline{x} = \dfrac{\sum x_i}{n}$ $\overline{x} = \dfrac{\sum n_i x_i}{n}$

n_i: frecuencia, veces que se repite un determinado dato, $n = \sum n_i$.

Error en la media aritmética de un conjunto de *n* datos (fórmula de Gaus):

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}} \qquad \varepsilon = \pm \sqrt{\frac{\sum n_i (x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}}$$

Cálculo del error relativo en medidas indirectas: supongamos que la magnitud a queda determinada al conocer las medidas de b y c por la fórmula:

$$a = k \frac{b^n}{c^m}$$

en la que k, n y m son constantes conocidas. Se trata de calcular el error relativo de a una vez calculados los de b y c. Tomando logaritmos neperianos en la expresión anterior:

$$\ln a = \ln k + n \ln b - m \ln c \quad \Rightarrow \quad \frac{da}{a} = n \frac{db}{d} - m \frac{dc}{c}$$

sustituyendo las diferenciales por incrementos finitos, haciendo positivos todos los términos del segundo miembro:

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

$$\varepsilon = \frac{\Delta a}{a} = n\,\frac{\Delta b}{b} + m\,\frac{\Delta c}{c}$$

quedando, así, determinado el error máximo de *a* en función de los de *b* y *c*.

Se ha dado signo + a todos los términos del segundo miembro puesto que la probabilidad de errores accidentales por exceso y defecto es la misma y de esta manera nos colocamos en las condiciones *más desfavorables* (sin compensación de errores) obteniendo el *máximo error relativo*.

Acotación de errores: en una medida directa, el valor de la magnitud problema está comprendido entre los valores máximo y mínimo obtenidos al realizar varias determinaciones experimentales. Las cifras comunes de tales medidas extremas, pueden considerarse ciertas.

En el caso de las medidas indirectas nos pondremos en las *condiciones más desfavorables*, para obtener los valores extremos; es decir si:

$$a = k\,\frac{b^2}{c^3}$$

calcularemos el valor *máximo* de la medida de *a*, empleando el valor máximo experiemental de *b*, y el mínimo de *c*; para obtener el *mínimo* valor de la medida de *a*, emplearemos el mínimo de *b*, y el máximo de *c*; *a* estará comprendida entre los dos valores obtenidos y las cifras comunes de ellos pueden considerarse como ciertas.

Problema I-17. 1. En la medida de *1* m se ha cometido un error de *1* mm, y en *300* km, *300* m. ¿Qué error relativo es mayor?

2. ¿Qué preferirías ganar, dos euros por cada veinticinco euros o el *8%*?

Solución

1) $E_1 = \dfrac{0{,}001}{1} = \dfrac{1}{1\,000}$; $E_2 = \dfrac{300}{300\,000} = \dfrac{1}{1\,000}$ $\Rightarrow$ Los dos son iguales

2) 8% de 25 euros $= \dfrac{8 \times 25}{100} = 2$ euros $\Rightarrow$ La ganancia es la misma

Problema I-18. Como medida de un radio de *7* dm hemos obtenido *70,7* cm. Calcular:

1. El error absoluto.

2. El error relativo.

3. El error absoluto y relativo en la medida de la longitud de la circunferencia de tal radio.

4. El error absoluto y relativo en la medida del área del círculo.

5. El error absoluto y relativo en la medida del volumen de una esfera de *7* dm de radio.

Solución

1) $\Delta x = 70{,}7 - 70 = 0{,}7$ cm

2) $E = \dfrac{0{,}7}{70} = 0{,}01 = 1\%$

3) $\Delta x = 2\pi\,(70{,}7 - 70) = 2\pi\,0{,}7 = 1{,}4\pi$ cm ; $E = \dfrac{1{,}4\pi}{2\pi\,70} = \dfrac{1{,}4}{140} = 0{,}01 = 1\%$

4) $\Delta x = \pi\,(70{,}7^2 - 70^2) = 98{,}49\pi$ cm^2 ; $E = \dfrac{98{,}49\pi}{70^2\pi} = \dfrac{98{,}49}{70^2} = 0{,}020\,1 = 2{,}01\%$

5) $\Delta x = \dfrac{4}{3}\pi\,(70{,}7^3 - 70^3) = 13\,857{,}66\pi$ cm^3 ; $E = \dfrac{\frac{4}{3}\pi\,(70{,}7^3 - 70^3)}{\frac{4}{3}\pi\,70^3} = 0{,}03 = 3\%$

Problema I-19. Hemos realizado diez veces la pesada de un cuerpo obteniendo los siguientes resultados expresados en gramos:

12,372	*12,373*	*12,372*	*12,371*	*12,370*
12,374	*12,372*	*12,372*	*12,371*	*12,373*

calcular el error de la medida aritmética.

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Solución

N.º de la pesada	x_i en gramos	$x_i - \bar{x}$ en mg	$(x_i - \bar{x})^2$
1.ª	*12,372*	*0*	*0*
2.ª	*12,373*	*+1*	*1*
3.ª	*12,372*	*0*	*0*
4.ª	*12,371*	*–1*	*1*
5.ª	*12,370*	*–2*	*4*
6.ª	*12,374*	*+2*	*4*
7.ª	*12,372*	*0*	*0*
8.ª	*12,372*	*0*	*0*
9.ª	*12,371*	*–1*	*1*
10.ª	*12,373*	*+1*	*1*
$n(n-1) = 10 \times 9 = 90$	$\bar{x} = 12{,}372$ g		$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 12$

$$\Delta x = \pm \sqrt{\frac{12}{90}} = \pm 0{,}36 \text{ mg}$$

Como *0,000 36* es menor que la sensibilidad del aparato, el resultado de la pesada se debe expresar:

$$m = 12{,}372 \pm 0{,}001 \text{ g}$$

que corresponde a un error relativo:

$$E = \frac{0{,}001 \times 100}{12{,}372} = 8 \times 10^{-3}\%$$

Problema I-20. En la medida de una longitud hemos determinado los siguientes valores:

1,32 cm *1,30* cm *1,32* cm *1,33* cm *1,32* cm
1,31 cm *1,32* cm *1,31* cm *1,31* cm *1,31* cm

Hallar el error de la medida aritmética y los errores relativos de las medidas del área y volumen de un cuadrado y un cubo que tenga por arista tal longitud.

Solución

N.ª de la medida	x en décimas de milímetro	$x_i - \bar{x}$ en centésimas de milímetro	$(x_i - \bar{x})^2$
1.ª	*132*	*+5*	*25*
2.ª	*131*	*–5*	*25*
3.ª	*130*	*–15*	*225*
4.ª	*132*	*+5*	*25*
5.ª	*132*	*+5*	*25*
6.ª	*131*	*–5*	*25*
7.ª	*133*	*+15*	*225*
8.ª	*131*	*–5*	*25*
9.ª	*132*	*+5*	*25*
10.ª	*131*	*–5*	*25*
$n(n-1) = 90$	$\bar{x} = 131{,}5$		$\sum_1^n (x_1 - \bar{x})^2 = 650$

$$\Delta l = \varepsilon = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} [x_i - \bar{x}]^2}{n(n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{650}{90}} \simeq \pm 2{,}687 \text{ centésimas de mm}$$

Puesto que la sensibilidad del aparato de medida es *0,01* cm el error absoluto en la medida será este valor.

$$A = l^2 \quad \Rightarrow \quad \ln A = 2 \ln l \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{A} = 2\frac{dl}{l} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta A}{A} = 2\frac{\Delta l}{l} = 2\frac{0{,}01}{1{,}31} = 1{,}5 \times 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{1{,}5\%}$$

$$V = l^3 \quad \Rightarrow \quad \ln V = 3 \ln l \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{V} = 3\frac{dl}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta V}{V} = 3\frac{\Delta l}{l} = \frac{3}{2}\frac{\Delta A}{A} = \frac{3}{2} 1{,}5 \times 10^{-2} = 2{,}25 \times 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{2{,}25\%}$$

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Problema I-21. Se han determinado el radio (*2* cm) y la generatriz (*5* cm) de un cilindro con un error absoluto de ±*0,1* mm. Calcular cómo influyen tales errores en la medida del volumen.

Solución

$$V = \pi r^2 l \quad \Rightarrow \quad \ln V = \ln \pi + 2 \ln r + \ln l \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{V} = 2\frac{dr}{r} + \frac{dl}{l} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta V}{V} = 2\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta l}{l}$$

Expresando las longitudes en mm, el error relativo es:

$$E = \frac{\Delta V}{V} = \frac{2 \times 0{,}1}{20} + \frac{0{,}1}{50} = \frac{0{,}6}{50} = 1{,}2\%$$

Problema I-22. Midiendo una longitud con una cinta de agrimensor cometemos errores del *0,5%*. ¿Cuál es el error absoluto y el relativo en la medida del área de un terreno rectangular de 100×50 m?

Solución

$$\left.\begin{array}{l} A = ab \\ \ln A = \ln a + \ln b \\ \dfrac{dA}{A} = \dfrac{da}{a} + \dfrac{db}{b} \\ \dfrac{\Delta A}{A} = \dfrac{\Delta a}{a} + \dfrac{\Delta b}{b} \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} \dfrac{\Delta a}{a} = 0{,}5\% \\ \dfrac{\Delta b}{b} = 0{,}5\% \end{array}\right| \qquad \boxed{\frac{\Delta A}{A} = 1\%} \qquad \frac{\Delta A}{5\,000} = \frac{1}{100} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta A = 50 \text{ m}^2}$$

Problema I-23. 1. Demostrar que los errores relativos de $a = b/c$ y de $a' = bc$, son iguales.
2. Demostrar que el error relativo en la medida del volumen de un cubo es tres veces mayor que en el de su arista.

Solución

1) $$\left.\begin{array}{l} \ln a = \ln b - \ln c \\ \dfrac{da}{a} = \dfrac{db}{b} - \dfrac{dc}{c} \\ \dfrac{\Delta a}{a} = \dfrac{\Delta b}{b} + \dfrac{\Delta c}{c} \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} \ln a' = \ln b + \ln c \\ \dfrac{da'}{a'} = \dfrac{db}{b} + \dfrac{dc}{c} \\ \dfrac{\Delta a'}{a'} = \dfrac{\Delta b}{b} + \dfrac{\Delta c}{c} \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta a'}{a}}$$

2) $$V = l^3 \quad \Rightarrow \quad \ln V = 3 \ln l \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{V} = 3\frac{dl}{l} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\Delta V}{V} = 3\frac{\Delta l}{l}}$$

Problema I-24. Determinar el error relativo en la medida de la aceleración de la gravedad, conocidos los errores relativos en las medidas de la longitud de un péndulo simple y de su período. Se suponen oscilaciones suficientemente pequeñas para que cumpla la ley: $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

Solución

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Rightarrow \quad g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

tomando logaritmos:

$$\ln g = \ln 4 + 2 \ln \pi + \ln l - 2 \ln T \quad \Rightarrow \quad \frac{dg}{g} = \frac{dl}{l} - 2\frac{dT}{T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{T}}$$

Problema I-25. La ecuación de estado de los gases perfectos es: $pV = nRT$; al aplicarla para calcular la temperatura de un gas una vez medidos la presión, *1,22* atm con un error de ±*1* mm de Hg, y el volumen *1,92* l, con un error de ±*1* cm^3, nos dio *125* °C. ¿Cuál es el error absoluto máximo que se puede esperar en esta última cantidad si se considera como exacto *n* (número de moles), siendo *R* la constante universal de los gases perfectos?

Solución

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad \ln p + \ln V = \ln n + \ln R + \ln T \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$$

ya que: $\dfrac{dn}{n} = 0$ $\dfrac{dR}{R} = 0$ luego: $\dfrac{\Delta p}{p} + \dfrac{\Delta V}{V} = \dfrac{\Delta T}{T}$

y como: $\Delta p = 1$ mm de Hg $= \dfrac{0{,}1}{76}$ atm $\Delta V = 1 \text{ cm}^3 = 10^{-3}$ l $T = 398$ K

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

obtenemos: $\dfrac{0,1}{76 \times 1,22} + \dfrac{10^{-3}}{1,92} = \dfrac{\Delta T}{398} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta T = 0,64\ \text{K}} \quad \Rightarrow \quad T = 398 \pm 0,64\ \text{K}$

Problema I-26. Al determinar el valor de la expresión: $x = 7a^2/b$ se han hallado para a y b los siguientes valores:

valores de a:	valores de b:
2,200 0	4,100 0
2,199 0	4,099 0
2,201 0	4,100 1
2,198 5	4,100 2

Acotar el valor de x.

Solución

$$\left.\begin{array}{l}\text{Valor máximo de } x = 7\,\dfrac{2,201^2}{4,099} = 8,272\,9 \\ \text{Valor mínimo de } x = 7\,\dfrac{2,198\,5^2}{4,100\,2} = 8,2517\end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{8,272\,9 \geq x \geq 8,2517}$$

D) MEDIDAS DE LONGITUDES, ÁNGULOS Y MASAS. DENSIDAD

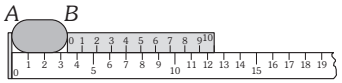
FORMULARIO

Precisión del Nonius: $p = D - d = \dfrac{D}{n}$

D: longitud de la división de la regla. d: longitud de la división del nonius. n: número de divisiones del nonius.



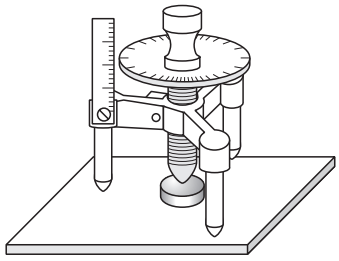
Nonius decimal.



Medida de la distancia AB con un nonius decimal.

Esferómetro: $R = \dfrac{f^2 + r^2}{2f} \qquad r = \dfrac{l}{\sqrt{3}}$

R: radio de la esfera a medir. f: «flecha» (Medida efectuada con el aparato). l: media aritmética de los tres lados del triángulo que determinan las tres patas del esferómetro. r: radio de la circunferencia que pasa por los puntos en que se apoyan las patas del esferómetro.



Esferómetro.

Densidad: $\rho = \dfrac{dm}{dV} \quad \Leftrightarrow \quad M = \displaystyle\int_V \rho\, dV$

Problema I-27. Calcular la precisión de un nonius que tiene 20 divisiones si la regla está dividida en mm.

Solución

$$\boxed{p = \frac{D}{n} = \frac{1\,\text{mm}}{20} = 0,05\,\text{mm}}$$

Problema I-28. Se tiene una regla dividida en medios milímetros y se desea colocarle un nonius para que se aprecien centésimas de milímetro. ¿Cómo hay que construirlo?

Solución

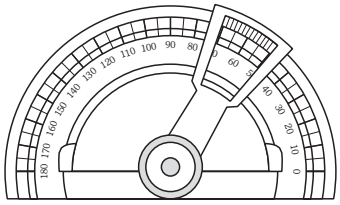
$$p = \frac{D}{n}$$

(p = precisión; D = longitud de una división de la regla; n = número de divisiones del nonius que tienen la misma longitud que $n - 1$ divisiones de la regla).

$n = \dfrac{0,5}{0,01} = 50 \quad \Rightarrow \quad$ Se tomarán 49 divisiones de la regla y se dividirán en 50 partes iguales en el nonius

Problema I-29. Un limbo circular está dividido en medios grados y se le aplica un nonius construido de forma que 29 divisiones del limbo se han dividido en 30 partes iguales en el nonius. ¿Cuál es su precisión?

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial



Problema I-29.– Nonius circular.

Solución

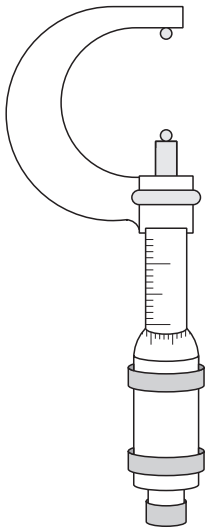
$$p = \frac{D}{n} = \frac{0{,}5 \text{ grados}}{30} = \frac{30 \text{ minutos}}{30} = 1 \text{ minuto}$$

Problema I-30. El paso de rosca de un palmer es de medio milímetro y su cabeza tiene *50* divisiones. ¿Cuál es el espesor de un objeto si se han dado *6* vueltas y *23* divisiones?

Solución

$$p = \frac{D}{n} \quad (D\text{: paso de rosca. } n\text{: número de divisiones del tambor}) \quad \Rightarrow \quad p = \frac{0{,}5 \text{ mm}}{50} = 0{,}01 \text{ mm}$$

luego el espesor (e) será: $\boxed{e = 6 \times 0{,}5 + 23 \times 0{,}01 = 3{,}23 \text{ mm}}$



Problema I-30.– Palmer.

Problema I-31. Las patas de un esferómetro forman un triángulo equilátero de lado *8,65* cm. Aplicando el aparato a una superficie esférica, la medida de su flecha es de *0,1* cm. Calcular en litros la capacidad de la esfera.

Solución

El radio de la circunferencia que pasa por los puntos en que se apoyan las patas del esferómetro es:

$$r = \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{8{,}65}{\sqrt{3}} = 5 \text{ cm}$$

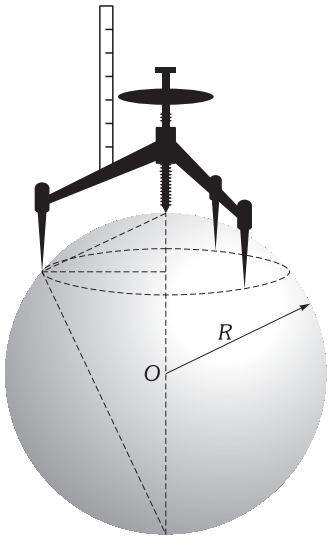
El radio de la esfera viene dado por la fórmula: $r = \dfrac{f^2 + r^2}{2f} = \dfrac{0{,}1^2 + 5^2}{2 \times 0{,}1} \simeq 125 \text{ cm}$

El volumen de la esfera es: $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 8\,181\,231 \text{ cm}^3 \simeq 8\,181 \text{ l}}$

Problema I-32. Supongamos que al aplicar un esferómetro a un casquete esférico, la medida de la flecha (f) es la tercera parte de la longitud del lado (l) del triángulo equilátero que forman los puntos de apoyo del esferómetro. Demostrar que el radio de la esfera es de doble longitud que la flecha.

Solución

$$R = \frac{f^2 + r^2}{2f} \left| \begin{array}{l} r = \dfrac{l}{\sqrt{3}} \\ f = \dfrac{l}{3} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{f^2 + \frac{l^2}{3}}{2f} = \frac{f^2 + \frac{9f^2}{3}}{2f} = 2f}$$



Problema I-31.– Medida del radio de una esfera con un esferómetro.

Problema I-33. Un recipiente tiene una masa de *38,52* g cuando está vacío y de *137,26* g cuando se llena de agua de *1,00* g/cm^3 de densidad. Se llena el recipiente con otro líquido y entonces la masa total es *106,21* g. ¿Cuál es la densidad del líquido?

Solución

La masa de agua será: $M_1 = 137{,}26 - 38{,}52 = 98{,}74$ g, entonces el volumen ocupado por el agua se calcula: $V = M_1/\rho_1 = 98{,}74$ cm^3.

La masa del líquido problema es: $M_2 = 106{,}21 - 38{,}52 = 67{,}69$ g, y por tanto su densidad:

$$\boxed{\rho_2 = \frac{M_2}{V} = \frac{67{,}69}{98{,}74} = 0{,}69 \text{ g/cm}^3}$$

Problema I-34. Se desea obtener un litro de jarabe de densidad con relación al agua *1,3*, mezclando otros dos de densidades *1,2* y *1,5*. ¿Qué volumen de cada uno de ellos se debe emplear?

Solución

La masa resultante es: $M = V\rho = 10^3 \times 1{,}3 = 1\,300$ g

esta masa ha de ser la suma de la de las componentes de la mezcla; si el volumen del primero lo llamamos x (en cm^3), el del segundo es $(10^3 - x)$ y sus masas: $M_1 = 1{,}2x$, $M_2 = (10^3 - x)\,1{,}5$, y como:

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

$$M = M_1 + M_2 \quad \Rightarrow \quad 1\,300 = 1{,}2x + (10^3 - x)\,1{,}5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{200}{0{,}3} = 666{,}67 \text{ cm}^3}$$

el volumen del segundo jarabe será: $\boxed{x' = 10^3 - x = 333{,}33 \text{ cm}^3}$

Problema I-35. ¿Qué volumen de agua se debe añadir a un litro de lejía de sosa de densidad con relación al agua *1,3* para que su densidad sea *1,2*?

Solución

M_1 = masa de lejía
M_2 = masa de agua
V = volumen total

$$M_1 + M_2 = 1{,}2\,V \quad \Rightarrow \quad 10^3 \times 1{,}3 + x = (10^3 + x)\,1{,}2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{100}{0{,}2} = 500 \text{ cm}^3}$$

Problema I-36. Un comerciante ladrón vende leche en su establecimiento con una densidad de *1,030* g/cm^3 cuando la densidad de la leche pura es de *1,042* g/cm^3. Determinar la proporción de agua que le ha añadido.

Solución

m_a y ρ_a: masa y densidad del agua. m y ρ: masa y densidad de la leche pura. ρ_m: densidad de la mezcla.

$$(m + m_a)\,\rho_m = m\rho + m_a\rho_a \quad \Rightarrow \quad \rho_m + \frac{m_a}{m}\,\rho_m = \rho + \frac{m_a}{m}\,\rho_a \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{m_a}{m} = \frac{\rho - \rho_m}{\rho_m - \rho_a} = \frac{0{,}012}{0{,}030} = \frac{2}{5}}$$

por cada *5* partes de leche pura hay *2* de agua en peso.

Problema I-37. *100* g de latón están formados por *30* g de Zn y *70* de Cu, cuyas densidades respectivas son *7* y *9* g/cm^3. Calcular la densidad del latón.

Solución

V = volumen de latón
V_1 = volumen del Zn
V_2 = volumen del Cu

$$V = V_1 + V_2 \quad \wedge \quad V = \frac{M}{\rho}$$

tendremos: $$\frac{M}{\rho} = \frac{M_1}{\rho_1} + \frac{M_2}{\rho_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{100}{\rho} = \frac{30}{7} + \frac{70}{9} = \frac{760}{63} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{63 \times 100}{760} = 8{,}3 \text{ g/cm}^3}$$

Problema I-38. Una estrella de neutrones característica tiene una masa de 2×10^{30} kg con un radio de *10* km. Calcular el peso que tendría *1* cm^3 de esa estrella en la superficie de la Tierra.

Solución

La densidad (masa de la unidad de volumen) de una estrella de neutrones será:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{3 \times 2 \times 10^{30}}{4\pi\, 10^{12}} = 5 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3 = 5 \times 10^{11} \text{ kg/cm}^3$$

luego el peso de 5×10^{11} kg que ocupa *1* cm^3 en la superficie de la Tierra en la que $g = 9{,}8$ N/kg, será:

$$\boxed{P = Mg = 5 \times 10^{11} \times 9{,}8 = 4{,}9 \times 10^{12} \text{ N}}$$

Problema I-39. Mediante la dispersión de partículas α dotadas de alta energía, se ha determinado que la sección eficaz del núcleo del átomo de plomo es aproximadamente $\sigma = 1{,}54 \times 10^{-28}$ m^2.

1. Calcular la densidad del núcleo del plomo.

2. Relación existente con la densidad macroscópica del plomo cuyo valor es *11,34* g/cm^3. Masa atómica del plomo *207,19* u. $N_A = 6{,}022 \times 10^{23}$.

Solución

1) Considerando el núcleo del plomo como esférico, su radio R es:

$$\sigma = \pi R^2 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} = \sqrt{\frac{1{,}54 \times 10^{-28}}{\pi}} = 7{,}00 \times 10^{-15} \text{ m}$$

y teniendo en cuenta que su masa atómica es:

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

$$m_{Pb} = 207{,}19 \text{ u} = \frac{207{,}19}{6{,}022 \times 10^{23}} \text{ g} = 3{,}44 \times 10^{-25} \text{ kg}$$

obtenemos para la densidad nuclear ρ_n del Pb:

$$\rho_n = \frac{m_{Pb}}{V} = \frac{3m_{Pb}}{4\pi R^3} = \frac{3 \times 3{,}44 \times 10^{-25}}{4\pi \times 7^3 \times 10^{-45}} = 2{,}39 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$$

2) La relación pedida será: $$\eta = \frac{\rho_\eta}{\rho} = \frac{2{,}39 \times 10^{17}}{11\,340} = 2{,}11 \times 10^{13}$$

Problema I-40. Experimentalmente se comprueba que el radio nuclear resulta ser: $R = R_0 A^{1/3}$ donde A es la masa atómica y R_0 es una constante que tiene el mismo valor para todos los núcleos y que es igual al radio del núcleo de ${}_1^1\text{H}$ por tener éste $A = 1$ y cuyo valor, medido por el espacio ocupado por la carga nuclear, se obtiene: $R_0 = 1{,}2 \times 10^{-15}$ m. Tomando como válida la ecuación dada determínese la densidad de la materia en estado nucleónico, admitiendo que la masa del protón y del neutrón son iguales e igual a 1 u. $N_A = 6{,}022 \times 10^{23}$.

Solución

Sin tener en cuenta la energía de ligadura (que se estudiará en el último capítulo), la masa de cualquier núcleo será: $M = mA$, siendo m la masa del protón o del neutrón:

$$m = m_p = m_n = 1 \text{ u} = \frac{1}{6{,}022 \times 10^{23}} \text{ g} = 1{,}660 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

luego el valor pedido será:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3mA}{4\pi R^3} = \frac{3mA}{4\pi R_0^3 A} = \frac{3m}{4\pi R_0^3} = \frac{3 \times 1{,}660 \times 10^{27}}{4\pi\,(1{,}2 \times 10^{-15})^3} = 2{,}3 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$$

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

CAPÍTULO II

CÁLCULO VECTORIAL*. SISTEMAS DE REFERENCIA

A) ALGEBRA VECTORIAL

FORMULARIO

Diversas formas de expresar un vector en función de sus componentes coordenadas:

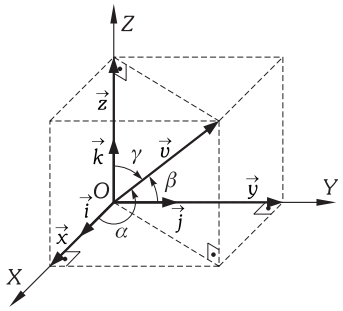
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \qquad \boldsymbol{v}\,(x, y, z) \qquad \boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

Módulo y cosenos directores: $v = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\cos\alpha = \frac{x}{v} \qquad \cos\beta = \frac{y}{v} \qquad \cos\gamma = \frac{z}{v} \qquad \wedge \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Suma de vectores: $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 + \ldots + \boldsymbol{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i$

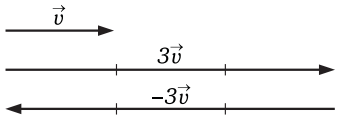
siendo:
$$\left|\begin{array}{l} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{z}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{y}_n + \boldsymbol{z}_n \end{array}\right. \qquad \boldsymbol{s} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum x_i \\ y = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \sum y_i \\ z = z_1 + z_2 + \ldots + z_n = \sum z_i \end{array}\right.$$



Componentes coordenadas de un vector. Vectores unitarios en los ejes coordenados.

Producto de un escalar por un vector: es un vector: $\alpha\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \qquad a = \alpha b$

Vectores unitarios: Son los que tienen de módulo uno: $\boldsymbol{u} = \dfrac{\boldsymbol{v}}{v} = \dfrac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$



Multiplicación del vector $\vec{v}$ por los escales 3 y –3.

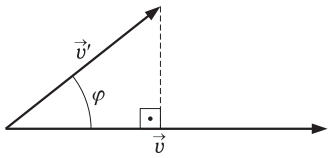
Producto escalar de dos vectores: Es un escalar:

$$\left|\begin{array}{l} \boldsymbol{v}(x, y, z) \\ \boldsymbol{v}'(x', y', z') \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}' = vv' \cos\varphi = v\ \text{proy}_v\ \boldsymbol{v}'$$

en función de las componentes de los vectores: $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}' = xx' + yy' + zz'$

Propiedades:

a) Goza de las propiedades conmutativa y distributiva.
b) Si dos vectores son perpendiculares su producto escalar es cero.
c) Si dos vectores tienen la misma dirección y sentido su producto escalar es igual al producto de sus módulos.



Producto escalar de dos vectores.

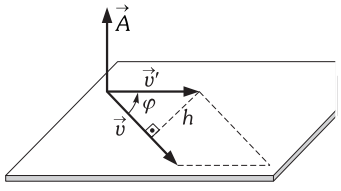
Producto vectorial de dos vectores: Es un vector: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}' \qquad A = vv' \operatorname{sen}\varphi = vh$

lo que nos indica que el módulo es el área del paralelogramo que tiene $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{v}'$ como lados.

En función de las componentes de los vectores:
$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}' = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

Propiedades:

a) Goza de las propiedades anticonmutativa y distributiva.
b) Si dos vectores son paralelos su producto vectorial es nulo.



Producto vectorial.

Producto mixto: Es un escalar cuyo valor es el volumen del paralelepípedo que tiene los tres vectores como lados.

$$V = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$$

Propiedad: $V = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})$

* Los problemas referentes a operadores (**grad**, **rot**, div, etc.) se verán en Teoría de Campos (capítulo VII).

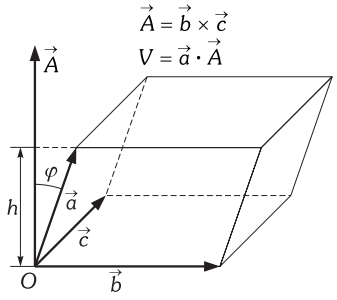
© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

En función de las componentes coordenadas de los vectores:

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Doble producto vectorial: Es un vector: $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$

Propiedad: $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}$

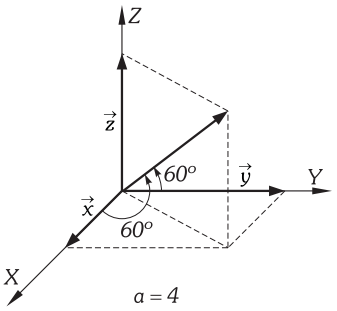


Producto mixto.

Problema II-1. Si un vector forma con los ejes *X* e *Y* ángulos de *60°* y tiene de módulo *4* unidades. Calcular:

1. Sus componentes coordenadas.

2. Ángulo que forma con el eje *Z*.



Problema II-1.

Solución

1.er MÉTODO

1) Sea $\boldsymbol{a}(x, y, z)$ el vector que nos piden, entonces:

$$\boxed{x=a\cos\alpha=4\,\frac{1}{2}=2} \qquad \boxed{y=a\cos\beta=4\,\frac{1}{2}=2}$$

como: $a^2=x^2+y^2+z^2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}=\sqrt{16-4-4}=2\sqrt{2}}$

2) $\cos\gamma=\dfrac{z}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\gamma=45^o}$

2.º MÉTODO:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\cos^2\gamma=1 \quad\Rightarrow\quad \cos\gamma=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\gamma=45^o}$$

$$\boxed{x=a\cos\alpha=4\,\frac{1}{2}=2} \qquad \boxed{y=a\cos\beta=4\,\frac{1}{2}=2} \qquad \boxed{z=a\cos\gamma=4\,\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}}$$

COMPROBACION:

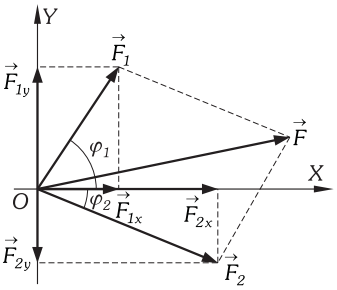
$$a^2=x^2+y^2+z^2 \quad\Rightarrow\quad a^2=4+4+4\times2=16 \quad\Rightarrow\quad a=4$$

Problema II-2. Se tienen dos fuerzas coplanarias y concurrentes cuyos módulos son: $F_1=5$ kp y $F_2=7$ kp, que forman respectivamente los siguientes ángulos con el eje *OX*: *60°* y *–30°*. Calcular:

1. La fuerza resultante.

2. Su módulo.

3. Ángulo que forma con el eje *OX*.



Problema II-2.

Solución

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{F}_x+\boldsymbol{F}_y=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j} \qquad \begin{vmatrix} F_x=F_{1x}+F_{2x} \\ F_y=F_{1y}+F_{2y} \end{vmatrix} \qquad \operatorname{tg}\varphi=\frac{F_y}{F_x}$$

$$\varphi_1=60^o \qquad \begin{vmatrix} F_{1x}=F_1\cos\varphi_1=\dfrac{5}{2}\ \text{kp} \\ F_{1y}=F_1\,\text{sen}\,\varphi_1=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\ \text{kp} \end{vmatrix} \qquad F_x=\frac{5+7\sqrt{3}}{2}\ \text{kp}$$

$$\varphi_2=-30^o \qquad \begin{vmatrix} F_{2x}=F_2\cos\varphi_2=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}\ \text{kp} \\ F_{2y}=F_2\,\text{sen}\,\varphi_2=-\dfrac{7}{2}\ \text{kp} \end{vmatrix} \qquad F_y=\frac{5\sqrt{3}-7}{2}\ \text{kp}$$

$$\boxed{\boldsymbol{F}=\frac{5+7\sqrt{3}}{2}\,\boldsymbol{i}+\frac{5\sqrt{3}-7}{2}\,\boldsymbol{j}\ \text{kp}} \qquad \boxed{F=\sqrt{\left(\frac{5+7\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{3}-7}{2}\right)^2}=8{,}6\ \text{kp}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{5\sqrt{3}-7}{5+7\sqrt{3}} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\varphi=5^o\,32'\,15''}$$

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Problema II-3. Se tienen tres fuerzas concurrentes cuyos módulos son: $F_1 = 6$ kp, $F_2 = 3$ kp, $F_3 = 4$ kp, que forman, respectivamente, los siguientes ángulos con el eje OX: $45°$, $30°$ y $-60°$. Las tres fuerzas están en el mismo plano. Calcular el módulo de la resultante y el coseno del ángulo que forma con el eje OX.

Solución

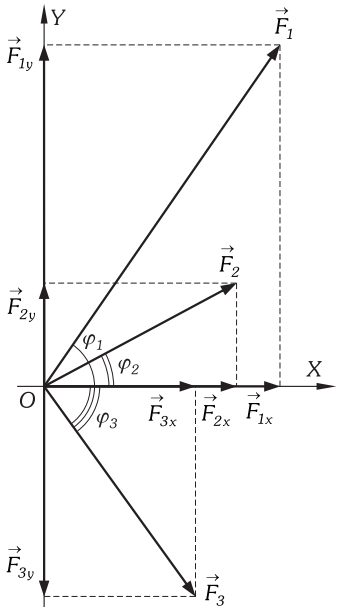
$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} \qquad \left|\begin{array}{l} F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} \\ F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{F_x}{F} \end{array}\right.$$

$$\boldsymbol{F}_1 \left|\begin{array}{l} F_{1x} = F_1\cos\varphi_1 = 6\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\ \text{kp} \\ F_{1y} = F_1\,\text{sen}\,\varphi_1 = 6\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\ \text{kp} \end{array}\right.$$

$$\boldsymbol{F}_2 \left|\begin{array}{l} F_{2x} = F_2\cos\varphi_2 = 3\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \text{kp} \\ F_{2y} = F_2\,\text{sen}\,\varphi_2 = 3\,\dfrac{1}{2}\ \text{kp} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l} F_x = 3\sqrt{2} + 3\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2 = 8{,}84\ \text{kp} \\ F_y = 3\sqrt{2} + 3\,\dfrac{1}{2} - 2\sqrt{3} = 2{,}28\ \text{kp} \end{array}\right.$$

$$\boldsymbol{F}_3 \left|\begin{array}{l} F_{3x} = F_3\cos\varphi_3 = 4\,\dfrac{1}{2} = 2\ \text{kp} \\ F_{3y} = F_3\,\text{sen}\,\varphi_3 = 4\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}\ \text{kp} \end{array}\right.$$

$$\boldsymbol{F} = 8{,}84\,\boldsymbol{i} + 2{,}28\,\boldsymbol{j}\ \text{kp} \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l} \boxed{F = \sqrt{8{,}84^2 + 2{,}28^2} = 9{,}1\ \text{kp}} \\ \boxed{\cos\varphi = \dfrac{8{,}84}{9{,}1} = 0{,}97} \end{array}\right.$$



Problema II-3.

Problema II-4. Teniendo en cuenta que la fuerza de interacción Newtoniana entre dos partículas de masa m y m' que distan entre sí r, es:

$$\boldsymbol{F} = -G\,\frac{mm'}{r^3}\,\boldsymbol{r} \qquad \left[G = 6{,}67\times10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\right]$$

resolver el siguiente problema: supongamos que en el espacio intergaláctico (fuera de toda influencia de cuerpos celestes) definimos un sistema de ejes rectangulares. Tres partículas de masa 4 kg las colocamos en $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(2, -2)$ medidas estas coordenadas en metros. Calcular la fuerza que ejercerán sobre una partícula de masa 1 kg colocada en $(4, 0)$ m.

Solución

$$m_1 = m_2 = m_3 = 4\ \text{kg} \quad \wedge \quad r_1 = 4\ \text{m} \qquad r_2 = r_3 = 2\sqrt{2}\ \text{m}$$

Los módulos de las fuerzas que actúan sobre la partícula de masa $m = 1$ kg son:

$$\left|\begin{array}{l} F_1 = G\,\dfrac{mm_1}{r_1^2} = 6{,}67\times10^{-11}\,\dfrac{1\times4}{16} = 1{,}667\times10^{-11}\ \text{N} \\ F_2 = G\,\dfrac{mm_2}{r_2^2} = 6{,}67\times10^{-11}\,\dfrac{1\times4}{8} = 3{,}335\times10^{-11}\ \text{N} \\ F_3 = G\,\dfrac{mm_3}{r_3^2} = 6{,}67\times10^{-11}\,\dfrac{1\times4}{8} = 3{,}335\times10^{-11}\ \text{N} \end{array}\right. \qquad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j}$$

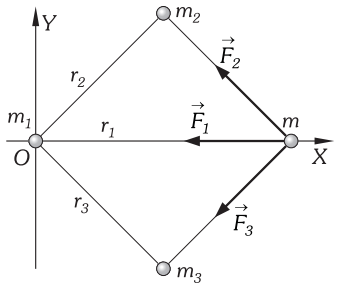
siendo: $\varphi_1 = 180°$ $\varphi_2 = 135°$ $\varphi_3 = 225°$

obtenemos:

$$\boldsymbol{F}_1 \left|\begin{array}{l} F_{1x} = F_1\cos\varphi_1 = -F_1 = -1{,}667\times10^{-11}\ \text{N} \\ F_{1y} = F_1\,\text{sen}\,\varphi_1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\boldsymbol{F}_2 \left|\begin{array}{l} F_{2x} = F_2\cos\varphi_2 = -3{,}335\times10^{-11}\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -2{,}358\times10^{-11}\ \text{N} \\ F_{2y} = F_2\,\text{sen}\,\varphi_2 = 2{,}358\times10^{-11}\ \text{N} \end{array}\right.$$

$$\boldsymbol{F}_3 \left|\begin{array}{l} F_{3x} = F_3\cos\varphi_3 = -2{,}358\times10^{-11}\ \text{N} \\ F_{3y} = F_3\,\text{sen}\,\varphi_3 = -2{,}358\times10^{-11}\ \text{N} \end{array}\right.$$



Problema II-4.

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = -6{,}384 \times 10^{-11}\ \text{N} \\ F_y &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0 \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{F} = -6384 \times 10^{-11}\ \boldsymbol{i}\ \text{N}}$$

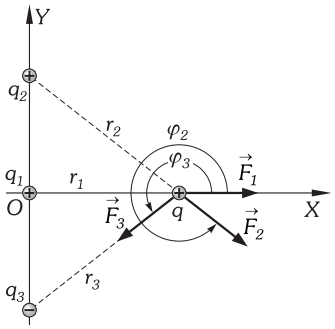
La fuerza resultante está en el eje *X* y su sentido es hacia el origen.

Problema II-5. Si la expresión de la ley de Coulomb es:

$$\boldsymbol{F} = K_0 \frac{qq'}{r^3}\boldsymbol{r} \qquad \left(K_0 = 9 \times 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}\right)$$

Calcular la fuerza que actúa sobre una carga de *1* μC colocada en el punto (*6*, *0*) m debida a la siguiente distribución: En el origen de coordenadas una carga $q_1 = 2$ μC, en el punto (*0*, *3*) m una carga $q_2 = 3$ μC y en el punto (*0*, *–3*) m una carga $q_3 = -3$ μC (suponemos las cargas en el vacío).

Solución



Problema II-5.

$r_1 = 6$ m $\qquad r_2 = r_3 = \sqrt{45}$ m $\qquad$ y los módulos de las fuerzas que actúan sobre *q* son:

$$F_1 = K_0 \frac{qq_1}{r_1^2} = 9 \times 10^9\ \frac{10^{-6} \times 2 \times 10^{-6}}{36} = 5 \times 10^{-4}\ \text{N}$$

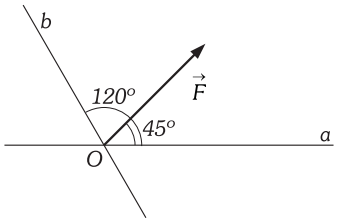
$$F_2 = K_0 \frac{qq_2}{r_2^2} = 9 \times 10^9\ \frac{10^{-6} \times 3 \times 10^{-6}}{45} = 6 \times 10^{-4}\ \text{N}$$

$$F_3 = K_0 \frac{qq_3}{r_3^2} = 9 \times 10^9\ \frac{10^{-6} \times 3 \times 10^{-6}}{45} = 6 \times 10^{-4}\ \text{N}$$

Siendo: $\varphi_1 = 0^o$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi_2 &= \frac{6}{\sqrt{45}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \text{sen}\,\varphi_2 &= -\frac{3}{\sqrt{45}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}\right| \qquad \begin{aligned} \cos\varphi_3 &= -\frac{6}{\sqrt{45}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \text{sen}\,\varphi_3 &= -\frac{3}{\sqrt{45}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{F}_1 &\left|\begin{aligned} F_{1x} &= 5 \times 10^{-4}\ \text{N} \\ F_{1y} &= 0 \end{aligned}\right. \\ \boldsymbol{F}_2 &\left|\begin{aligned} F_{2x} &= \frac{12}{\sqrt{5}} = 10^{-4}\ \text{N} \\ F_{2y} &= -\frac{6}{\sqrt{5}}\,10^{-4}\ \text{N} \end{aligned}\right. \\ \boldsymbol{F}_3 &\left|\begin{aligned} F_{3x} &= -\frac{12}{\sqrt{5}}\,10^{-4}\ \text{N} \\ F_{3y} &= -\frac{6}{\sqrt{5}}\,10^{-4}\ \text{N} \end{aligned}\right. \end{aligned}\right| \qquad \left.\begin{aligned} F_x &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 5 \times 10^{-4}\ \text{N} \\ F_y &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = -\frac{12}{\sqrt{5}}\,10^{-4}\ \text{N} \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{F} = 5 \times 10^{-4}\ \boldsymbol{i} - \frac{12}{\sqrt{5}}\,10^{-4}\ \boldsymbol{j}\ \text{N}}$$



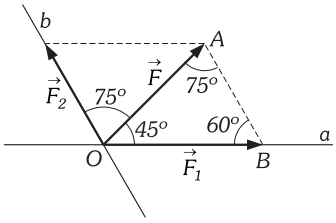
Problema II-6.

Problema II-6. Descomponer la fuerza de módulo $F = 20{,}0$ N en las direcciones *a* y *b* indicadas en la figura.

Solución

En el triángulo *OAB* de la Fig. 1ª conocemos los tres ángulos y el lado $OA = 20$ N, aplicándole el teorema de los senos, obtenemos:

$$\frac{20}{\text{sen}\,60^o} = \frac{F_1}{\text{sen}\,75^o} = \frac{F_2}{\text{sen}\,45^o} \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{aligned} &\boxed{F_1 = \frac{20\ \text{sen}\,75^o}{\text{sen}\,60^o} = 22{,}3\ \text{N}} \\ &\boxed{F_2 = \frac{20\ \text{sen}\,45^o}{\text{sen}\,60^o} = 16{,}3\ \text{N}} \end{aligned}\right.$$



Problema II-6-1ª.

Problema II-7. Si tienen tres vectores no coplanarios $\boldsymbol{OA} = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{OB} = \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{OC} = \boldsymbol{c}$. Designamos por *M* el punto medio del segmento rectilíneo *AB* y por *G* el baricentro del tríangulo *ABC*; se pide obtener razonada y sucesivamente:

1. Expresión de $\boldsymbol{OM}$ en función de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.
2. Expresión de $\boldsymbol{MC}$ en función de $\boldsymbol{OM}$ y $\boldsymbol{c}$, así como la de $\boldsymbol{GC}$ en función de $\boldsymbol{MC}$.
3. Expresión de $\boldsymbol{OG}$ en función de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$.

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

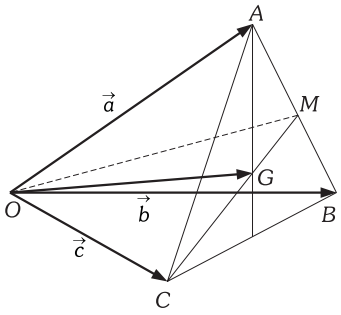
Solución

1) $\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{OM} + \boldsymbol{MA} \\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{OM} + \boldsymbol{MB} \\ \boldsymbol{MA} = -\boldsymbol{MB} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{OM} = \dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}}$

2) $\boxed{\boldsymbol{MC} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{OM} = \boldsymbol{c} - \dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}} \qquad \boxed{\boldsymbol{GC} = \dfrac{2}{3}\boldsymbol{MC} = \dfrac{2}{3}\left[\boldsymbol{c} - \dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}\right]}$

3) $\boxed{\boldsymbol{OG} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{GC} = \boldsymbol{c} - \dfrac{2}{3}\left[\boldsymbol{c} - \dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}\right] = \dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3}}$

(coordenadas del centro de gravedad de un triángulo).



Problema II-7.

Problema II-8. Dados los vectores: $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{b} = -4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, calcular:

1. El vector suma y su módulo.

2. El vector diferencia y el ángulo que forma con el eje *OX*.

3. El vector $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$ y el vector unitario que define la dirección y sentido de $\boldsymbol{c}$.

Solución

1) $\boxed{\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}} \Rightarrow \boxed{s = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}}$

2) $\boxed{\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = 7\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{3}{7} \Rightarrow \boxed{\varphi = -23^\circ\, 11'\, 55''}$

3) $\left.\begin{array}{l} 2\boldsymbol{a} = 6\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} \\ -3\boldsymbol{b} = 12\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{c} = 18\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j}} \Rightarrow c = \sqrt{18^2 + 7^2} = \sqrt{373} \Rightarrow \boxed{\dfrac{\boldsymbol{c}}{c} = \dfrac{18}{\sqrt{373}}\,\boldsymbol{i} - \dfrac{7}{\sqrt{373}}\,\boldsymbol{j}}$

Problema II-9. Dados los vectores: $\boldsymbol{a}$ de módulo *3* y cosenos directores proporcionales a *2*, *1* y *–2*, $\boldsymbol{b}$ que tiene de origen respecto de cierto sistema el punto *O* (*–1*, *–2*, *1*) y de extremo el punto *P* (*3*, *0*, *2*) y el vector $\boldsymbol{c}$ (*2*, *0*, *–3*). Calcular:

1. $2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$

2. $|3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}|$

Solución

Calculamos primero las componentes coordenadas de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$: si $\boldsymbol{a}(x_1, y_1, z_1)$, como:

$$\frac{\cos\alpha}{2} = \frac{\cos\beta}{1} = \frac{\cos\gamma}{-2} = K \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \cos\alpha = 2K \\ \cos\beta = K \\ \cos\gamma = -2K \end{array}\right| \wedge \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

nos queda:

$$4K^2 + K^2 + 4K^2 = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{3} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{2}{3} \\ \cos\beta = \dfrac{1}{3} \\ \cos\gamma = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 = a\cos\alpha = 2 \\ y_1 = a\cos\beta = 1 \\ z_1 = a\cos\gamma = -2 \end{array}\right| \Rightarrow \boldsymbol{a}(2, 1, -2)$$

Si $\boldsymbol{b}(x_2, y_2, z_2)$ entonces:

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = 3 - (-1) = 4 \\ y_2 = 0 - (-2) = 2 \\ z_2 = 2 - 1 = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \boldsymbol{b}(4, 2, 1)$$

1) $\left.\begin{array}{rl} 2\boldsymbol{a} = & 4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k} \\ -3\boldsymbol{b} = & -12\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{c} = & 2\boldsymbol{i} \quad\quad - 3\boldsymbol{k} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = -6\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 10\boldsymbol{k}}$

2) $\left.\begin{array}{rl} 3\boldsymbol{a} = & 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k} \\ -2\boldsymbol{b} = & -8\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k} \\ 2\boldsymbol{c} = & 4\boldsymbol{i} \quad\quad - 6\boldsymbol{k} \end{array}\right| \Rightarrow 3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 14\boldsymbol{k}$

$$\boxed{|3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c}| = \sqrt{4 + 1 + 196} = \sqrt{201}}$$

Problema II-10. Un vector tiene por origen respecto de cierto sistema de referencia el punto *O* (*–1*, *2*, *0*) y de extremo *P* (*3*, *–1*, *2*). Calcular:

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

1. Componentes del vector ***OP***.
2. Módulo y cosenos directores.
3. Un vector unitario en la dirección de él pero de sentido contrario.

Solución

1) $\boldsymbol{OP}(x, y, z)$ $\left.\begin{array}{l} x = 3-(-1) = 4 \\ y = -1-2 = -3 \\ z = 2-0 = 2 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{OP} = 4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}}$

2) $\boxed{OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{29}}$

$\boxed{\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{29}}}$ $\boxed{\cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{29}}}$ $\boxed{\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{29}}}$

3) $\boxed{-\frac{\boldsymbol{OP}}{OP} = -\frac{4}{\sqrt{29}}\,\boldsymbol{i} + \frac{3}{\sqrt{29}}\,\boldsymbol{j} - \frac{2}{\sqrt{29}}\,\boldsymbol{k}}$

Problema II-11. Dados los vectores $\boldsymbol{a}\,(2, 4, 6)$ y $\boldsymbol{b}\,(1, -2, 3)$. Calcular:
1. El vector suma $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, su módulo y cosenos directores.
2. El vector diferencia $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ y el vector unitario que define su dirección y sentido.

Solución

1) $\boxed{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{s}\,(2+1,\ 4-2,\ 6+3) = \boldsymbol{s}\,(3, 2, 9)} \Rightarrow \boxed{s = \sqrt{9 + 4 + 81} = \sqrt{94}}$

$\boxed{\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{94}}}$ $\boxed{\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{94}}}$ $\boxed{\cos\gamma = \frac{9}{\sqrt{94}}}$

2) $\boxed{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{d}\,(2-1,\ 4+2,\ 6-3) = \boldsymbol{d} = (1, 6, 3)} \Rightarrow d = \sqrt{1 + 36 + 9} = \sqrt{46}$

$\boxed{\frac{\boldsymbol{d}}{d} = \frac{1}{\sqrt{46}}\,\boldsymbol{i} + \frac{6}{\sqrt{46}}\,\boldsymbol{j} + \frac{3}{\sqrt{46}}\,\boldsymbol{k}}$

Problema II-12. Dados los vectores: $\boldsymbol{a}\,(1, -1, 2)$ y $\boldsymbol{b}\,(-1, 3, 4)$. Calcular:
1. El producto escalar de ambos vectores.
2. El ángulo que forman.
3. La proyección de $\boldsymbol{b}$ sobre $\boldsymbol{a}$.

Solución

1) $\boxed{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1\,(-1) + (-1)\ 3 + 2 \times 4 = 4}$

2) $\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\varphi \\ a = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6} \\ b = \sqrt{1 + 9 + 16} = \sqrt{26} \end{array}\right| \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{ab} = \frac{4}{\sqrt{6}\,\sqrt{26}} \Rightarrow \boxed{\varphi = 71^\circ\ 19'\ 18''}$

3) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a\ \text{proy}_{\boldsymbol{a}}\ \boldsymbol{b} \Rightarrow \text{proy}_{\boldsymbol{a}}\ \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{a} \Rightarrow \boxed{\text{proy}_{\boldsymbol{a}}\ \boldsymbol{b} = \frac{4}{\sqrt{6}}}$

Problema II-13. Demostrar que el vector unitario $\boldsymbol{a}$, cuyos cosenos directores son: $\cos\alpha = 1/3$, $\cos\beta = 2/3$ y $\cos\gamma > 0$, es perpendicular al vector $\boldsymbol{b}\,(6, -9, 6)$.

Solución

«Para que dos vectores sean perpendiculares, su producto escalar tiene que ser cero.»

Siendo: $\left.\begin{array}{l} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \\ \cos\gamma > 0 \end{array}\right| \Rightarrow \cos^2\gamma = \frac{4}{9} \Rightarrow \cos\gamma = \frac{2}{3} \Rightarrow \boldsymbol{a}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

y como: $\boxed{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \frac{1}{3}\,6 + \frac{2}{3}\,(-9) + \frac{2}{3}\,6 = 2 - 6 + 4 = 0}$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son perpendiculares.

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial