

Sylvie Benzoni-Gavage

Calcul différentiel et équations différentielles

Cours et exercices corrigés

2^e édition

DUNOD

Illustration de couverture : ©-izabell-istockphoto.com

© Dunod, 2014, 2021 pour la nouvelle présentation
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-083537-9

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	1
Préface de la 1^{re} édition	3
Introduction	5

PARTIE I CALCUL DIFFÉRENTIEL

Chapitre 1 • Différentiabilité	13
1.1 Notions de base	13
1.2 Théorème des accroissements finis	29
1.3 Théorème d'inversion locale	35
1.4 Théorème des fonctions implicites	40
Exercices	42
Solutions	51
Chapitre 2 • Différentielles d'ordre supérieur	69
2.1 Dérivées partielles d'ordre supérieur	69
2.2 Différentielle seconde	70
2.3 Différentielle d'ordre n	75
2.4 Formules de Taylor	80
Exercices	86
Solutions	88
Chapitre 3 • Extrema	97
3.1 Extrema libres	100
3.2 Extrema liés	103
3.3 Fonctions convexes	107
3.4 Introduction au calcul des variations	113
Exercices	116
Solutions	122

Table des matières

Chapitre 4 • Formes différentielles	135
4.1 Champs de vecteurs et 1-formes différentielles	135
4.2 Formes différentielles d'ordre supérieur	137
4.3 Théorème de Poincaré	145
4.4 Théorème de Frobenius	150
4.5 Théorème de Stokes	154
Exercices	160
Solutions	161

PARTIE II ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Chapitre 5 • Équations modèles et outils de base	167
5.1 Modélisation et applications	168
5.2 Résolution explicite	177
5.3 Lemme de Gronwall	181
5.4 Théorème de Cauchy–Lipschitz	182
5.5 Théorème du flot	190
5.6 Équations aux différentielles totales	195
Exercices	198
Solutions	201

Chapitre 6 • Équations linéaires	209
6.1 Existence globale	209
6.2 Résolvante	210
6.3 Coefficients constants	217
6.4 Dichotomies exponentielles et sous-espaces stables	233
6.5 Coefficients périodiques et théorie de Floquet	244
Exercices	250
Solutions	252

Chapitre 7 • Équations autonomes	261
7.1 Courbes intégrales	262
7.2 Flot et portraits de phase	267
7.3 Ensembles ω -limite	274
Exercices	279
Solutions	284

Chapitre 8 • Stabilité des solutions stationnaires	299
8.1 Théorie de Lyapunov	300
8.2 Approche spectrale	306
8.3 Points fixes hyperboliques	310
8.4 Variétés invariantes	317
8.5 Introduction aux bifurcations	324
Exercices	329
Solutions	333
Bibliographie	345
Index	349

AVANT-PROPOS

Cette seconde édition, revue et corrigée, se veut plus progressive notamment dans la partie qui traite de calcul différentiel. Idéalement, un étudiant en mathématiques devrait pouvoir suivre l'ouvrage pas à pas, depuis la deuxième année de licence jusqu'en master. Des exercices corrigés l'accompagnent au long de ce chemin. Souvent inspirés d'applications, ils sont l'occasion de mettre en pratique les outils introduits dans le texte, et leurs solutions mettent en évidence des relations entre les différents chapitres.

Si l'apprentissage du calcul différentiel a toujours été ressenti comme difficile, il l'est d'autant plus aujourd'hui que les études secondaires ne confrontent plus du tout les élèves à l'abstraction. Quant aux études supérieures, elles sont devenues très « compartimentées », de sorte que les étudiants ont souvent les plus grandes difficultés à mobiliser simultanément des connaissances venant de différentes parties des mathématiques : analyse, algèbre, géométrie, etc. Le calcul différentiel cristallise dans une certaine mesure ces difficultés. Pour autant, rien n'est inaccessible à qui s'en donne la peine.

En guise de motivation, l'étudiant devrait prendre conscience que la beauté de certains concepts et raisonnements épargne à celui qui les maîtrise de fastidieux calculs. C'est particulièrement vrai pour l'analyse des équations différentielles : il est fini le temps où de grands savants se disputaient la meilleure manière de *résoudre* des équations différentielles au moyen de formules plus ou moins explicites. Les travaux de Poincaré sont passés par là et une véritable révolution s'est opérée. Les apprentis mathématiciens actuels ont cette chance : une fois consolidées leurs connaissances de base en calcul différentiel, ils peuvent accéder à une compréhension profonde du comportement des solutions des équations différentielles sans avoir besoin de les calculer explicitement, ce qui est au mieux pénible, sauf pour des équations modèles très simples, et au pire impossible.

Curieusement, cette révolution n'a pas encore vraiment imprégné les autres disciplines, bien que les physiciens, mécaniciens, chimistes, etc. aient plutôt bien intégré la révolution suivante, celle du calcul numérique. S'il ne leur est pas spécifiquement destiné, ce livre et les références qu'il contient pourraient leur être utiles. C'est en tous cas mon souhait, en cette année de célébration du bicentenaire de Lagrange, dont les travaux ont été plus que largement diffusés dans ces disciplines connexes aux mathématiques que sont la mécanique et la physique.

Avant-propos

Même s'ils sont antérieurs d'un siècle à ceux de Poincaré, certains fondements posés par Lagrange transparaissent notablement dans ce qui suit et font partie du bagage qu'on peut attendre d'un étudiant en mathématiques, physique ou mécanique. Puissent ces grands esprits du passé et tous les Euler, Laplace, Lyapunov, Noether, inspirer les nouvelles générations.

Lyon, le 30 septembre 2013.

PRÉFACE DE LA 1^{RE} ÉDITION

Je fais partie de cette génération nourrie à l'analyse des équations aux dérivées partielles (alors appelée abusivement *analyse numérique*), dans l'idée que l'analyse des équations différentielles ordinaires était « dépassée », au point qu'elle n'était guère plus enseignée qu'aux détours de cours de géométrie ou de mécanique. J'ai néanmoins pu apprécier au fil des années la richesse des interactions entre un domaine traditionnellement réservé aux géomètres, celui des *systèmes dynamiques*, et l'analyse appliquée à des modèles divers, que ce soient des équations différentielles ordinaires, des équations aux dérivées partielles, ou encore des équations différentielles fonctionnelles. C'est ce qui m'a incitée à mettre en place un cours d'équations différentielles ordinaires en première année du master « MAIM » (Mathématiques et Applications, Ingénierie Mathématique) à Lyon 1. Cet ouvrage est issu des notes rédigées pour l'occasion, et auparavant pour la préparation à l'épreuve de modélisation à l'agrégation, ainsi que de mes notes de calcul différentiel en troisième année de licence. La transformation en livre de ces notes éparses fut encouragée, sans qu'ils en aient nécessairement conscience, par plusieurs collègues : Michelle Schatzman et Denis Serre (que je remercie au passage pour leur fidèle et amical soutien), Francis Filbet (qui m'a fait bénéficier de sa toute fraîche expérience d'auteur chez Dunod), ainsi que ceux ayant manifesté leur intérêt pour mon « poly » (en ligne sur ma page personnelle). En espérant que cela en valait la peine, je remercie de tout cœur mes proches pour leur patience (et bien plus) pendant ces mois passés à remettre l'ouvrage sur le métier. Je tiens en outre à remercier Pascal Noble, avec qui j'ai eu plaisir à enseigner cette matière et à qui je dois divers énoncés d'exercices, ainsi que des critiques constructives. Quant aux exercices de calcul différentiel, ils proviennent pour l'essentiel de sujets d'examen posés en L3 : je remercie notamment Danièle Tarral, Laurent Pujo-Menjouet et Daniel Sondaz pour leurs contributions. Je remercie enfin Sarah Delcourte pour sa relecture attentive.

Malgré le soin que je me suis efforcée d'apporter à la rédaction, le lecteur¹ trouvera sûrement des imperfections, qu'il voudra bien me pardonner ou me signaler. Il pourra aussi regretter des omissions criantes à ses yeux : sur ce point je ne peux qu'assumer mes choix, dictés par mes goûts et la place allouée par l'éditeur.

Lyon, le 29 mai 2009.

1. Si je ne cède pas aux travers de la féminisation du langage, je n'en espère pas moins avoir autant de lectrices que de lecteurs !

INTRODUCTION

Cet ouvrage se présente en deux parties qu'il est conseillé d'aborder dans l'ordre, ou du moins est-il préférable d'avoir étudié le début de la première avant de s'attaquer à la deuxième.

La première partie reprend le calcul différentiel à la base, en passant un peu vite sur les fonctions d'une variable réelle (supposées relativement familières au public visé) pour arriver aux fonctions de plusieurs variables réelles et plus généralement aux fonctions définies sur des *ouverts* de $\mathbb{R}$ -*espaces vectoriels normés*¹. Un objectif avoué est d'amener progressivement le lecteur à se libérer des coordonnées et à être capable de mener des calculs les plus intrinsèques possibles, ce qui est évidemment indispensable en dimension infinie. La notion de *différentielle*, dont l'origine remonte à Leibniz, « co-inventeur » avec Newton du calcul différentiel, est centrale dans cette partie. Bien sûr le regard qu'on lui porte aujourd'hui est bien plus net qu'au XVII^e siècle, la notion de *limite* ayant été éclaircie au XIX^e.

Le calcul différentiel est présenté ici dans un cadre qui généralise de façon assez naturelle le calcul dans $\mathbb{R}^n$. La traduction dans $\mathbb{R}^n$ des résultats énoncés dans un espace vectoriel normé général est en effet immédiate : mise à part l'absence de *compacité* locale (lorsque l'espace est de dimension infinie), il n'y a pas de difficulté supplémentaire (on supposera l'espace *complet* chaque fois que nécessaire). On pourrait bien entendu considérer des cadres encore plus généraux, comme les espaces de Fréchet ou les variétés, mais cela aurait pour défaut de noyer l'essentiel derrière des considérations techniques, et n'apporterait pas grand chose en vue de la seconde partie. La notion même de *variété* (différentiable) ne sera abordée qu'au détour du théorème des multiplicateurs de Lagrange dans le chapitre sur les *extrema* et à l'occasion de l'*analyse qualitative* des équations différentielles dans le tout dernier chapitre. On présentera donc les grands classiques du calcul différentiel (théorèmes des accroissements finis, d'inversion locale, des fonctions implicites, formules de Taylor) dans les $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés, le plus souvent supposés complets et alors appelés *espaces de Banach*.

Le chapitre consacré aux problèmes d'extremum peut être vu comme une introduction à l'optimisation continue, à l'analyse convexe et au calcul des variations. Ce dernier est d'ailleurs l'une des motivations pour faire du calcul différentiel en dimension infinie. Ce sont de vastes domaines, dont on présentera seulement quelques bases permettant d'aborder la lecture d'ouvrages plus avancés. Ce chapi-

1. Les termes en italiques sont expliqués plus loin, on peut les retrouver grâce à l'index.

tre est de plus l'occasion de présenter une classe importante d'équations différentielles, à savoir les équations d'Euler-Lagrange.

Cette partie s'achève par un chapitre sur la théorie des *formes différentielles*, souvent absente des cursus d'enseignements universitaires, et pourtant cruciale non seulement en mathématiques dites « pures » mais aussi dans les applications des mathématiques (thermodynamique, électromagnétisme, dynamique des fluides, etc.). On définira les notions essentielles que sont le *produit extérieur* et la *différentielle extérieure* de q -formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$, et l'on présentera dans ce cadre les théorèmes de Poincaré, Frobenius et Stokes. Ce chapitre, bien qu'en apparence difficile, nécessite assez peu de pré-requis et peut servir de *vade mecum* sur le sujet.

Hormis son dernier chapitre donc, la première partie constitue le bagage que l'on peut attendre en calcul différentiel d'un étudiant en fin de licence. Les outils ainsi introduits permettent d'aborder sereinement la seconde partie.

Elle concerne les équations différentielles dites « ordinaires » (EDO), elles aussi considérées dans des $\mathbb{R}$ -espaces de Banach en général. Ce choix est motivé par l'étude de modèles mathématiques pouvant être vus comme des EDO en dimension infinie : par exemple les équations différentielles sur réseaux, issues ou non de la discrétisation en espace d'équations aux dérivées partielles (EDP) d'évolution, ou encore les équations différentielles dans des espaces fonctionnels comme $L^2(\mathbb{R})$ (certaines EDP d'évolution pouvant être vues comme telles) ; c'est expliqué plus détail dans le chapitre intitulé *Équations modèles et outils de base*.

Le cadre est celui des équations différentielles « non pathologiques », au sens où elles sont supposées résolues (en la dérivée d'ordre le plus élevé) et sans problème de régularité (on choisit de ne pas s'aventurer sur le terrain des solutions généralisées, pour des équations dont les données seraient peu régulières). C'est une partie comportant bien sûr des *outils*, sous forme de lemmes, formules, théorèmes, etc. (comme le lemme de Gronwall, la formule de Duhamel, le théorème de Cauchy-Lipschitz pour ne citer que les outils de base), mais elle est aussi l'occasion d'insister sur diverses *méthodes*, et notamment celles de Picard, Lyapunov-Schmidt et Melnikov. Sans négliger les aspects « élémentaires », comme la résolution explicite dans les cas les plus simples et la classification des points fixes dans le plan, elle va (bien) au-delà du théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz. Ceci commence par la question de la dépendance des solutions par rapport aux « conditions initiales » (avec le théorème du flot) et aux paramètres, et se poursuit par un approfondissement de la théorie pour les équations linéaires d'une part, et pour les équations non-linéaires autonomes d'autre part. Pour les premières, cela comprend la notion de résolvante, la théorie de Floquet, des éléments d'analyse spectrale, les notions de projecteurs spectraux et de dichotomies exponentielles. Pour les secondes, il s'agit essentiellement de l'étude de l'existence et des propriétés qualitatives (comportement asymptotique, stabilité par rapport aux paramètres) de solutions particulières (stationnaires, périodiques, orbites homo/hétéroclines), sans chercher à les calculer explicitement, avec notamment la théorie de Lyapunov et les théorèmes de Poincaré-Bendixson, de la variété stable et de bifurcation de Hopf. Cette partie *équations différentielles* peut faire l'objet d'un solide cours de première année de master.

Même si l'ouvrage se veut « auto-contenu » sur tout ce qui touche au calcul différentiel et aux équations différentielles, il s'appuie nécessairement sur d'autres domaines des mathématiques. Dans la mesure du possible, les notions indispensables de topologie, calcul intégral, analyse fonctionnelle, analyse complexe, algèbre linéaire ou géométrie, sont rappelées au fil du texte et accompagnées de références. Les notions les plus couramment utilisées sont rappelées ci-après.

Définitions, notations et résultats utiles

• On suppose connue la notion d'espace vectoriel. Le corps de base des espaces vectoriels considérés sera $\mathbb{R}$ (ou éventuellement $\mathbb{C}$). Dans un espace vectoriel normé E , on notera en général $\|\cdot\|_E$ la *norme*, ou simplement $\|\cdot\|$ s'il n'y a pas d'ambiguïté possible. Une norme est caractérisée par les trois propriétés suivantes :

- 1) quels que soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- 2) le seul vecteur x tel que $\|x\|_E = 0$ est $x = 0_E$;
- 3) et l'on a l'*inégalité triangulaire* :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \text{ quels que soient } x, y \in E.$$

Une partie V d'un espace vectoriel normé E est un *voisinage* de $x \in E$ s'il existe une boule ouverte de centre x et de rayon $R > 0$,

$$B(x; R) = \{y \in E; \|y - x\| < R\},$$

incluse dans V . Un *ouvert* est une partie de E qui est un voisinage de tous ses points. Un *fermé* est un sous-ensemble de E dont le complémentaire est ouvert. Un *compact* est un sous-ensemble de E dans lequel toute suite admet une sous-suite convergente (une *sous-suite* d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une suite de la forme $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante). L'image d'un compact par une application *continue* est compact. Les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les fermés bornés (théorème de Bolzano-Weierstrass).

• Un $\mathbb{R}$ -*espace de Banach* est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé *complet*, c'est-à-dire où toutes les *suites de Cauchy* sont convergentes (une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant dite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n, p \geq N$, $\|x_n - x_p\| \leq \varepsilon$).

• Si E et F sont des espaces de Banach, l'espace vectoriel des applications *linéaires continues* de E dans F , muni de la norme

$$\|\ell\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|\ell(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

est un espace de Banach. Il sera noté $\mathcal{L}(E; F)$, ou simplement $\mathcal{L}(E)$ dans le cas $E = F$. En outre, le sous-ensemble des *isomorphismes* de E sur F :

$$\text{Isom}(E; F) := \{u \in \mathcal{L}(E; F); \exists v \in \mathcal{L}(F; E), v \circ u = \text{Id}_E \text{ et } u \circ v = \text{Id}_F\}$$

est un ouvert de $\mathcal{L}(E; F)$. En vertu du théorème d'analyse fonctionnelle suivant, $\text{Isom}(E; F)$ coïncide avec l'ensemble des isomorphismes au sens algébrique.

Théorème 0.1 *Théorème de Banach*

Si E et F sont des espaces de Banach, la réciproque d'une application *linéaire* continue et bijective de E sur F , est continue.

(Voir [2, Cor. II.6 p. 19].) Autrement dit, pour vérifier qu'une application u est un isomorphisme de E sur F , il « suffit » de vérifier que u est *linéaire continue et bijective*. En dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues : ce théorème n'a donc d'intérêt qu'en dimension infinie.

- Si $E_1, \dots, E_n$ sont des espaces de Banach, le produit cartésien $E = E_1 \times \dots \times E_n$, muni de

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_E = \|x_1\|_{E_1} + \dots + \|x_n\|_{E_n},$$

est aussi un espace de Banach. Une application $\phi : E \rightarrow F$ est *n-linéaire* (et lorsqu'on ne veut pas préciser n on dit *multi-linéaire*) si pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ et pour tout $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_{j-1} \times E_{j+1} \times \dots \times E_n$ (avec les conventions naturelles lorsque $j = 1$ ou $j = n$), l'application partielle

$$x \in E_j \mapsto \phi(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

est *linéaire*. Si de plus ϕ est continue, toutes les applications partielles sont continues et il existe $C \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que

$$\|\phi(h_1, \dots, h_n)\|_F \leq C \prod_{j=1}^n \|h_j\|_{E_j}$$

quels que soient les vecteurs $h_j \in E_j$. L'ensemble des applications n -linéaires continues forme un espace vectoriel que l'on notera $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ (à ne pas confondre avec l'espace $\mathcal{L}(E_1 \times \dots \times E_n; F)$ des applications linéaires sur E). Muni de la norme définie par

$$\|\phi\|_{\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)} = \max\{\|\phi(h_1, \dots, h_n)\|_F; \|h_j\|_{E_j} \leq 1\},$$

l'espace $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ est complet.

Lorsque $E_1 = \dots = E_n = G$, on notera simplement $\mathcal{L}_n(G; F)$ l'espace des applications n -linéaires continues sur G^n , et $\mathcal{L}_n^s(G; F)$ le sous-espace des applications n -linéaires *symétriques*, c'est-à-dire invariantes par permutation des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ composant les vecteurs de G^n .

- Dans les espaces vectoriels normés de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, et tous ces espaces sont complets (indépendamment de la norme choisie). C'est le cas en particulier de $\mathbb{R}^n$, pour lequel des normes classiques sont

$$\|x\|_k = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^k \right)^{1/k} \quad \text{si } k < \infty \quad \text{et } \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq j \leq n} |x_j|,$$

où $x_1, \dots, x_n$ désignent les composantes de $x \in \mathbb{R}^n$. De même, l'espace des matrices $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ à p lignes et q colonnes, est complet quelle que soit la norme choisie. On peut notamment considérer les normes subordonnées aux normes $\|\cdot\|_k$ dans $\mathbb{R}^q$ et $\mathbb{R}^p$, définies par

$$\|M\|_k = \sup_{x \in \mathbb{R}^q, x \neq 0} \frac{\|Mx\|_k}{\|x\|_k}.$$

Si M a pour coefficients $m_{i,j}$ on a (voir par exemple [34, p. 43])

$$\begin{aligned}\|M\|_1 &= \max_j \sum_i |m_{i,j}|, \\ \|M\|_\infty &= \max_i \sum_j |m_{i,j}|, \\ \|M\|_2 &= \sqrt{\varrho(M^t M)},\end{aligned}$$

où $\varrho(M^t M)$ désigne le *rayon spectral*, c'est-à-dire la plus grande valeur propre (en valeur absolue) de la matrice symétrique positive $M^t M$, la matrice M^t étant par définition la *transposée* de M , de coefficients $(m_{j,i})_{j \leq q, i \leq p}$.

- Si $E_1, \dots, E_n$ sont des espaces de Banach, le produit cartésien $E = E_1 \times \dots \times E_n$ peut être muni de l'une quelconque des normes, équivalentes entre elles,

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_{k,E} = \|(\|x_1\|_{E_1}, \dots, \|x_n\|_{E_n})\|_k.$$

- Des exemples classiques d'espaces de Banach de dimension infinie sont les espaces de suites

$$\ell^p(\mathbb{N}) := \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}; \sum_n |u_n|^p < +\infty\},$$

munis des normes définies par

$$\|u\|_p = \left(\sum_n |u_n|^p \right)^{1/p},$$

pour $p < +\infty$, et

$$\ell^\infty(\mathbb{N}) := \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}; \|u\|_\infty := \sup_n |u_n| < +\infty\},$$

ainsi que divers espaces de fonctions, comme l'espace $\mathcal{C}(K; E)$ des fonctions continues sur un compact K et à valeurs dans un espace de Banach E , muni de la « norme sup », définie par

$$\|f\| = \max_{x \in K} \|f(x)\|_E.$$

Introduction

Moyennant l'identification des fonctions coïncidant presque partout, les *espaces de Lebesgue* (voir par exemple [32, chap. 3])

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } \int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx < +\infty \right\} ,$$

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable essentiellement bornée} \} ,$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, munis des normes

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} , \quad \|f\|_\infty := \sup_{x \in \Omega} |f(x)| ,$$

sont également des espaces de Banach de dimension infinie. Plus généralement, il est possible de définir des espaces $L^p(\Omega; E)$ pour des fonctions à valeurs dans un espace de Banach E (par exemple un autre espace L^p) : cependant cela soulève des questions délicates de mesurabilité (on renvoie à [11] pour de plus amples détails).

- Les *espaces de Hilbert* sur $\mathbb{R}$ sont des cas particuliers de $\mathbb{R}$ -espaces de Banach, dans lesquels la norme est définie par un *produit scalaire*, forme bilinéaire symétrique définie positive $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2} .$$

Les espaces de Hilbert sur $\mathbb{C}$, où la norme est associée à un *produit hermitien*, forme sesquilinéaire hermitienne définie positive, sont quant à eux des $\mathbb{C}$ -espaces de Banach. Une propriété fondamentale des espaces de Hilbert est l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* : quels que soient u et v dans un espace de Hilbert,

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| .$$

Partie I

Calcul différentiel

