

CÉCILE HARDOUIN

LES MATHS AU CAPES DE SCIENCES ÉCONOMIQUES ET SOCIALES

CAPES/AGRÉGATION
SCIENCES ÉCONOMIQUES
ET SOCIALES

DUNOD

Création graphique de la couverture : Hokus Pokus Créations

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2015

5 rue Laromiguière, 75005 Paris

www.dunod.com

ISBN : 978-2-10-074069-7

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Introduction	1
1 Taux de variation, pourcentages	5
1 Taux de variation	5
2 Coefficient multiplicateur	6
3 Taux successifs, taux moyen	6
3.1 Taux successifs	6
3.2 Taux moyen	7
Exercices	9
Corrigés	12
2 Indices	19
1 Moyennes	19
1.1 Moyenne arithmétique	19
1.2 Moyenne géométrique	20
1.3 Moyenne harmonique	20
2 Indices	20
2.1 Indice élémentaire	20
2.2 Indice synthétique	21
3 Indices de Laspeyres, Paasche, Fischer	23
3.1 L'indice de Laspeyres	23
3.2 L'indice de Paasche	24
3.3 L'indice de Fisher	25
4 Euros courants et constants	26
Exercices	27
Corrigés	29

TABLE DES MATIÈRES

3	Suites	33
1	Généralités	33
2	Suites arithmétiques	34
3	Suites géométriques	35
4	Suites arithmético-géométriques	37
	Exercices	38
	Corrigés	44
4	Taux d'intérêts, Emprunts	53
1	Introduction	53
2	Taux d'intérêts	53
2.1	Taux proportionnels, taux équivalents	53
2.2	Intérêts simples et composés	54
3	Emprunts	55
3.1	Valeur actualisée	55
3.2	Emprunts par annuités constantes	56
3.3	Amortissement	57
	Exercices	59
	Corrigés	63
5	Choix d'investissement	73
1	Valeur actualisée	73
2	Taux de rendement interne	74
	Exercices	75
	Corrigés	78
6	Fonctions usuelles	85
1	Rappels sur les fonctions	85
1.1	Etude d'une fonction réelle	85
1.2	Convexité	87
1.3	Résolution d'équations	89
2	Primitives, calcul intégral	89
2.1	Primitive et intégrale	89
2.2	Quelques propriétés des intégrales	90
2.3	Applications des intégrales	91
3	Fonctions puissance, exponentielle et logarithme	92
3.1	Fonctions puissance	92
3.2	Fonction exponentielle	93

3.3	Fonction Logarithme	94
3.4	Croissances comparées	95
Exercices		96
Corrigés		103
7	Fonctions de coût	113
1	Coût total, coût moyen, coût marginal	113
1.1	Fonction de coût total	113
1.2	Fonction de coût moyen	113
1.3	Fonction de coût marginal	113
2	Relations entre les fonctions de coût	114
2.1	Coût total et coût marginal	114
2.2	Coût moyen et coût marginal	114
2.3	Coût total et coût moyen	114
Exercices		115
Corrigés		119
8	Offre et demande, Elasticité	127
1	Fonctions d'offre et de demande	127
2	Surplus du consommateur, du producteur	127
2.1	Le surplus du consommateur	128
2.2	Le surplus du producteur	128
3	Elasticité	128
3.1	Elasticité de la demande	129
3.2	Calcul de l'élasticité	129
3.3	Autres élasticités	130
Exercices		131
Corrigés		137
9	Concentration	147
1	Courbe de Lorenz	147
2	Indice de Gini	148
Exercices		150
Corrigés		156
10	Fonctions de deux variables	163
1	Utilité	163
2	Optimisation sous contrainte	163
Exercices		165

TABLE DES MATIÈRES

Corrigés	167
11 Probabilités	169
1 Événement, Probabilité	169
1.1 Univers	169
1.2 Événement	169
1.3 Probabilité	171
1.4 Equiprobabilité	172
2 Probabilités conditionnelles, indépendance	172
2.1 Probabilité conditionnelle	172
2.2 Formule des probabilités totales, formule de Bayes	173
2.3 Indépendance	173
Exercices	175
Corrigés	176
12 Variables aléatoires discrètes	177
1 Variable aléatoire et loi de probabilité	177
2 Fonction de répartition	178
3 Espérance, variance	178
3.1 Espérance	179
3.2 Variance, écart-type	179
4 Le schéma de Bernoulli	180
4.1 Loi de Bernoulli	180
4.2 Loi binomiale	181
Exercices	183
Corrigés	187
13 Variables aléatoires continues	191
1 Densité de probabilité	191
2 Espérance et variance	192
3 Fonction de répartition	193
3.1 Fonction de répartition	193
3.2 Propriétés	193
3.3 Quantiles	194
4 La loi uniforme continue	194
5 Loi normale	195
5.1 La loi normale centrée réduite	195
5.2 La loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ	197

5.3	Intervalle de fluctuations	199
6	Approximation de la loi binomiale par la loi normale	199
	Exercices	201
	Corrigés	205
14	Systèmes d'équations, matrices	209
1	Systèmes linéaires	209
1.1	Système linéaire de n équations à n inconnues	209
1.2	Résolution d'un système d'équations	210
2	Matrices	211
2.1	Définitions	211
2.2	Opérations sur les matrices	212
3	Applications des matrices	213
3.1	Résolution d'un système linéaire	213
3.2	Autres applications	213
	Exercices	214
	Corrigés	217
15	Modèle entrée sortie, matrice de Leontief	223
1	Système fermé	223
2	Système ouvert	224
	Exercices	227
	Corrigés	229
16	Graphes	231
1	Premières définitions, vocabulaire	231
1.1	Définitions	231
1.2	Chaîne et cycle	231
2	Chaînes et cycles eulériens	232
3	Matrice d'adjacence	233
4	Graphe pondéré	234
4.1	Définitions	234
4.2	Recherche du plus court chemin, algorithme de Dijkstra	234
4.3	Graphes probabilistes	235
5	Coloriage d'un graphe	235
	Exercices	237
	Corrigés	238

TABLE DES MATIÈRES

17 Graphes probabilistes	239
1 Définitions	239
1.1 Etat probabiliste	239
1.2 Graphe probabiliste	239
1.3 Matrice de transition	240
2 Evolution	240
Exercices	243
Corrigés	245
18 Statistiques descriptives	249
1 Généralités	249
1.1 Type de variable	249
1.2 Organisation des données	250
2 Traitement d'une variable qualitative	250
3 Traitement d'une variable quantitative discrète	251
3.1 Représentation graphique	251
3.2 Caractéristiques de position ou de valeur centrale	251
3.3 Caractéristiques de dispersion	251
3.4 Fonction de répartition	252
19 Statistiques descriptives pour une variable continue	253
1 Représentation graphique	253
1.1 Histogramme	253
1.2 Polygone des fréquences	255
2 Fonction de répartition	256
2.1 Définitions	256
2.2 Propriétés	256
2.3 Calcul de $F(x)$	257
2.4 Représentation graphique	257
3 Paramètres de tendance centrale	257
3.1 La classe modale	257
3.2 La moyenne	257
3.3 La médiane	258
3.4 Comparaison	259
4 Caractéristiques de dispersion	259
4.1 L'étendue	259
4.2 Variance, écart-type	259
4.3 Les quantiles	260

5	Concentration	262
5.1	La médiale	263
5.2	Courbe de Lorenz et indice de Gini	264
5.3	Approximation graphique de la médiale	265
6	Ajustement à la loi normale	266
	Exercices	269
	Corrigés	273
20	Estimation	281
1	Echantillon	281
2	Fluctuations d'échantillonnage de la fréquence empirique	282
2.1	Fréquence empirique	282
2.2	Distribution de la fréquence empirique F_n	282
3	Estimation ponctuelle	284
3.1	Estimation de la moyenne et de l'écart-type d'une variable quantitative	284
3.2	Estimation d'une proportion	285
4	Intervalle de confiance	286
	Exercices	289
	Corrigés	290
21	Statistique bivariée	293
1	Etude simultanée de deux caractères quantitatifs	293
1.1	Représentation graphique	293
1.2	Covariance, corrélation	294
2	Modèle linéaire simple	295
2.1	Ajustement par la méthode de Mayer	295
2.2	Méthode des moindres carrés ordinaires	296
	Exercices	300
	Corrigés	302
22	Séries chronologiques	307
1	Tendance	307
2	Saisonnalité	309
3	Modélisation	310
3.1	Le modèle additif	312
3.2	Le modèle multiplicatif	313
3.3	Désaisonnalisation	315
3.4	Prévision	315

TABLE DES MATIÈRES

4	Choix de modèle	316
	Exercices	317
	Corrigés	318
A	Tables des dérivées usuelles	321
B	Tables des primitives usuelles	325

Introduction

Ce livre fait partie d'une série de trois ouvrages préparant au concours du Capes de Sciences Economiques et Sociales ; les deux autres livres, disponibles dans la même collection, portent sur l'économie et la sociologie.

Cet ouvrage est destiné aux candidats préparant le Capes ou l'Agrégation de Sciences Economiques et Sociales. Il repose sur le programme du Capes. Le programme de l'Agrégation est plus vaste que celui du Capes, mais on observe cependant une coïncidence dans les rapports de jury entre les exercices proposés au Capes externe et à l'Agrégation interne. En ce sens, ce livre est une aide solide à la préparation de l'Agrégation interne, et constitue une base pour les candidats à l'Agrégation externe. Il peut également se révéler d'une grande utilité pour les enseignants de SES qui veulent se remettre à niveau en mathématiques afin de préparer au mieux leurs cours.

Les mathématiques sont une discipline connexe aux sciences économiques et sociales ; le programme de mathématiques du Capes résume les concepts indispensables pour appréhender et enseigner les sciences économiques et sociales. Il ne s'agit pas simplement de connaître des formules et utiliser des recettes, il faut comprendre les méthodes, savoir l'origine de la formule et son développement, expliquer et justifier l'approche. Enfin, comprendre le résultat final et l'interpréter.

Les futurs professeurs (et les actuels) doivent maîtriser les savoir-faire de base en mathématiques qu'ils auront à mettre en oeuvre dans le cadre de leur enseignement. On s'attend à ce qu'ils utilisent des schémas et des représentations graphiques pour illustrer leur cours, qu'ils énoncent les modèles et décrivent clairement leurs propriétés, ainsi que les méthodes mathématiques ou statistiques utilisées. Pour un nombre important de points du programme, il est difficile d'imaginer une séquence pédagogique sans appui sur des indicateurs économiques synthétiques, issus de calculs ou de résultats mathématiques ou de statistiques simples. L'exploitation de documents demande une analyse et une interprétation claires des données qu'ils présentent.

Les nombreux rapports de jury rappellent l'importance d'une culture mathématique de base pour enseigner les sciences économiques et sociales, et le rôle discriminant de l'épreuve de mathématiques dans la réussite au concours. Les candidats admis ont, en général, pu montrer leur savoir-faire quant à l'utilisation appropriée des outils mathématiques et statistiques.

Les épreuves de mathématiques dans les concours de SES

Capes externe, Troisième Capes et Troisième Cafep-Capes

L'exercice de mathématiques s'inscrit dans l'une des épreuves orales d'admission ; cependant, il est évident que les principaux concepts mathématiques et statistiques doivent être maîtrisés pour les autres épreuves.

Les deux épreuves d'admissibilité sont une composition de sociologie ou d'économie et une nouvelle épreuve intitulée "Exploitation d'un dossier documentaire". Cette dernière consiste à préparer une séquence pédagogique. Dans les documents proposés, on trouve des graphiques, des tables de données statistiques, différents indicateurs économiques ou sociologiques ; il est donc important de comprendre les tableaux et graphiques, savoir les analyser, traiter les données du dossier en calculant par exemple des taux d'évolution, des quantiles, retracer des courbes d'offre et demande, comparer les caractéristiques de régions ou pays différents, synthétiser, modéliser...

Pour l'admission, l'épreuve orale de "Mise en situation professionnelle" est composée d'un exposé relatif à l'un des thèmes des programmes en vigueur dans les classes de lycée général. De même, si le thème est par exemple celui de l'offre et de la demande, il devient nécessaire d'utiliser les outils mathématiques relatifs aux fonctions, et de les appliquer au cadre de la théorie du consommateur et du producteur.

Enfin, "l'épreuve d'entretien à partir d'un dossier" comporte la résolution d'un ou deux problèmes de mathématiques. Après deux heures de préparation, le candidat a une heure d'entretien avec le jury ; il commence par présenter un exposé, d'une durée de vingt minutes (maximum), suivi d'une discussion avec le jury, d'une durée de vingt-cinq minutes maximum ; la dernière partie, d'une durée de quinze minutes (maximum), est consacrée à la résolution de l'exercice de mathématiques. Les rapports de jury précisent que l'évaluation se fait sous la forme d'un entretien qui porte sur les réponses préparées par le candidat aux questions de l'exercice proposé mais aussi éventuellement sur l'utilisation des outils évoqués dans le cadre de l'analyse des documents du dossier de sciences économiques et sociales. Dans l'utilisation du dossier, *les documents statistiques donnent l'occasion de lire et d'interpréter des données chiffrées. Si ce n'est pas réalisé lors de l'exposé, cela n'est pas en soi sanctionné, mais le jury vérifie alors systématiquement, lors de l'entretien, la maîtrise des savoir-faire quantitatifs. Une mauvaise lecture ou une mauvaise interprétation des documents statistiques peuvent être rédhibitoires* (extrait du rapport de jury du Capes externe 2014).

Le ou les exercices de mathématiques représentent donc un quart de l'épreuve d'entretien du point de vue de la durée ; il est supposé qu'il est noté sur 6 points.

Il est attendu que le candidat montre ses connaissances aussi bien en analyse qu'en probabilités, statistiques ou calcul matriciel.

La calculatrice

L'utilisation de la calculatrice intervient dans de nombreux points du programme : pour l'étude de fonctions, le tracé de leur graphe sera fait avec la calculatrice ; mais c'est aussi un outil pour la recherche de racines, le calcul matriciel, le calcul des coefficients des droites

de régression, le calcul de paramètres statistiques simples (moyenne, écart-type), ou de probabilités (quantiles de lois normales). Il est absolument indispensable que le candidat sache utiliser à bon escient et correctement sa calculatrice.

Deux calculatrices de type “graphique” sont conseillées : la Casio 35+ et la Texas TI 82 ou 83. Dans cet ouvrage, nous indiquons dans les corrigés des exercices les résultats des calculs effectués à l’aide de la calculatrice ; cependant, nous ne donnons pas les détails des différentes manipulations ; les manuels des calculatrices sont disponibles en ligne et proposent des exemples pour expliquer l’usage de telle ou telle fonction. Il appartient à chacun de s’entraîner pour maîtriser cet outil indispensable.

Les autres concours

Outre les épreuves sur dossier, à l’oral ou à l’écrit, où il est nécessaire, comme on l’a vu précédemment, d’évaluer, analyser et commenter les différents tableaux et graphiques proposés, les concours du Capes interne, de l’Agrégation interne et externe ont également une épreuve spécifique de mathématiques.

- L’épreuve orale professionnelle d’admission du Capes interne comporte un exposé suivi d’un entretien, ainsi qu’un exercice de mathématiques.
- L’épreuve orale d’admission sur dossier de l’Agrégation interne inclut une ou deux questions d’ordre mathématique ou statistique.
- L’une des trois épreuves orales d’admission de l’Agrégation externe concerne spécifiquement les mathématiques et statistiques.

Organisation de l’ouvrage

Ce livre est organisé en chapitres suivant les différents points du programme du concours du Capes externe. Notons que ce programme recouvre en partie le programme de mathématiques des classes du lycée général. N’étant pas possible de résumer trois années de lycée en un seul ouvrage, nous avons choisi de présenter ce qui est relatif au programme du concours du Capes externe de SES. Il est supposé que le programme des années de lycée est connu et nous invitons le lecteur à se référer à des manuels si besoin.

Chaque chapitre est découpé en trois parties, qui consistent en un résumé de cours, des énoncés d’exercices et des corrigés de ces exercices. La partie “cours” rappelle les notions importantes du thème abordé. Elle peut parfois comporter certaines démonstrations ; lorsque c’est le cas, les preuves sont classiques, considérées comme devant être connues, et peuvent être exigées par le jury. Nous avons illustré le cours par des graphiques et des exemples.

Les énoncés des exercices sont pour la plupart tirés des rapports des jurys des concours du Capes interne et externe, et de l’Agrégation interne. Il est en effet notoire que certains exercices de l’Agrégation interne et du Capes externe se retrouvent dans les rapports des jurys de ces deux concours. Nous avons parfois complété ces énoncés de quelques exercices d’introduction.

Remerciements

Ce livre doit sa conception aux étudiants de la préparation au Capes SES de l'université Paris Ouest Nanterre la Défense. Leur écoute, leur travail sérieux et régulier les ont conduit à l'admission ; je les remercie ici de leur motivation, et espère que mes cours à l'université les aident encore à construire leurs séquences de cours de Sciences Economiques et Sociales en lycée, comme ils ont pu les aider à réussir ce concours difficile.

Je souhaite que ce livre aide les étudiants, futurs professeurs, dans leur préparation des concours d'enseignement, j'espère qu'il leur servira de référence dans l'exercice de leur métier.

Je tiens à remercier Sylvia Dobyinsky, qui m'a proposé de la rejoindre dans cet enseignement à Nanterre, Alexandra Raedecker, responsable du master MEEF à Nanterre, avec qui je partage les espoirs et déceptions que chaque nouvelle réforme nous apporte, Madalina Olteanu, qui assure les cours de préparation au Capes et à l'Agrégation de SES à l'université Paris 1, et qui a eu la gentillesse de relire ce livre ; elle s'est acquittée de cette tâche avec une grande minutie. Ce sont trois collègues et amies, je les remercie particulièrement.

Je remercie également ma famille, que j'ai délaissée quelques heures de nos week-end pour écrire ce livre.

Chapitre 1

Taux de variation, pourcentages

1 Taux de variation

Notons V_0 la mesure d'un caractère quantitatif au temps initial, que l'on note par convention temps zéro T_0 ; et V_1 la valeur de ce même caractère mesuré au temps T_1 . La variation absolue de cette mesure entre les deux temps est $V_1 - V_0$. ; mais on s'intéresse à cette variation par rapport à la mesure initiale V_0 .

Définition 1.1.1. Le taux de variation relative est $T = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$.

On exprime le plus souvent ce taux de variation en pourcentage $t = T \times 100 \%$.

Si $t > 0$, on parle de pourcentage d'augmentation ou de taux de croissance, sinon si $t < 0$, de pourcentage de diminution ou taux de décroissance.

Exemple Action Eurotunnel

(Capes interne 2006)

L'action Eurotunnel connaît un maximum en septembre 1989 au cours de 13,61 euros. En septembre 2004, elle ne vaut plus que 0,29 euros.

1. Calculer le pourcentage de la baisse de l'action Eurotunnel entre septembre 1989 et septembre 2004.
2. Un épargnant ayant des actions Eurotunnel a perdu environ 785 euros entre ces deux dates. Combien avait-il d'actions en 1989 ?

Corrigé

1. Le pourcentage de baisse est de $t = \frac{0,29 - 13,61}{13,61} \times 100 = -97,87$, c'est-à-dire que l'action a baissé de 97,87%.
2. Notons n le nombre d'actions de l'épargnant en septembre 89.

On a alors $n \times 13,61 - n \times 0,29 = 785$.

D'où $n = \frac{785}{13,61 - 0,29} = 58,93$; n est un nombre entier, on trouve une valeur décimale due aux arrondis sur les valeurs exactes de l'action. On en conclut que l'épargnant avait 59 actions.

2 Coefficient multiplicateur

Définition 1.2.1. Le coefficient multiplicateur associé au taux de variation relative T est

$$m = 1 + T.$$

On a

$$V_1 = mV_0 = (1 + T)V_0.$$

Exemple Action Eurotunnel

En mai 2005, l'action cote 0,19 euros et elle remonte de 36,84% entre mai 2005 et novembre 2005.

On en déduit que le cours de l'action en novembre 2005 est

$$V_1 = (1 + 0,3684) \times 0,19 = 0,26 \text{ euros.}$$

3 Taux successifs, taux moyen

3.1 Taux successifs

Comparaison de deux pourcentages par points

Exemple, si un taux d'inflation passe de 2% à 3%, il a augmenté de 1 "point" et non de 1%.

S'il avait augmenté de 1% il serait passé de 2% à $0,02 \times (1 + 0,01) = 0,0202$ soit 2,02%.

Pourcentage de pourcentage

Il s'obtient en multipliant les deux taux de variation correspondants.

Exemple : mon père m'a donné 30% de ses parts de la société dont il est actionnaire majoritaire avec 75% des parts. Je détiens donc $0,3 \times 0,75 = 0,225$ ou 22,5% des parts de cette société.

Les taux de variation ne s'ajoutent pas ; on utilise les coefficients multiplicateurs lorsque l'on considère des taux successifs.

Si une valeur initiale V_0 varie successivement des taux $T_1, T_2, \dots, T_K$, on considère les coefficients multiplicateurs respectifs $m_1, m_2, \dots, m_K$ et la valeur finale est le produit

$$V_F = m_1 m_2 \dots m_K V_0.$$