

Lógica

Proposição é toda expressão que encerra um pensamento de sentido completo e pode ser classificada como V (verdadeira) ou F (falsa).

Exemplo:

$$9 = 6 \text{ (F)}$$

$$\sqrt{4} = \log 100 \text{ (V)}$$

Todo gato é branco. (F)

Alguns gatos são brancos. (V)

Negação

A negação de uma proposição p é indicada por $\sim p$ ou $\bar{p}$. A negação de uma proposição verdadeira é falsa e vice-versa.

Exemplo:

p : Sempre chove. (F)

$\bar{p}$: Nem sempre chove. (V)

Tabela verdade:

p	$\bar{p}$
V	F
F	V

Negação.

Conectivos

É uma expressão que une duas proposições dando origem a uma outra proposição.

Existem dois conectivos: a conjunção e a disjunção.

- Conjunção (e): é indicada $p \wedge q$ será verdadeira se, e somente se, ambas as proposições p e q forem verdadeiras. Caso uma delas seja falsa sua conjunção será falsa.
- Disjunção (ou): é indicada $p \vee q$ será verdadeira sempre que uma das duas proposições, p ou q forem verdadeiras. Será falsa apenas se as duas forem falsas.

Exemplo:

p : Toda árvore é verde. (F)

q : Árvores são vegetais. (V)

$p \wedge q$: Árvores são vegetais e todas as árvores são verdes. (F)

$p \vee q$: Árvores são vegetais ou árvores são verdes. (V)

Tabela verdade:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Conectivos.

Condicionais

Existem dois tipos de condicionais: o condicional e o bicondicional.

- Condicional $p \rightarrow q$: será falso somente quando p for verdadeiro e q for falso. Caso contrário será verdadeiro.

Exemplo:

p : n é um número ímpar.

q : n é divisível por 3.

$p \rightarrow q$: Se n é um número ímpar, então n é divisível por 3. (F)

- Bicondicional $p \leftrightarrow q$: será verdadeiro somente quando ambas as proposições, p e q , forem de mesmo valor lógico: verdadeiras ou falsas.

Exemplo:

p : $\triangle ABC$ satisfaz o teorema de Pitágoras.

q : $\triangle ABC$ é retângulo.

$p \leftrightarrow q$: se $\triangle ABC$ é retângulo, então $\triangle ABC$ satisfaz o teorema de Pitágoras. (V)

Tabela verdade:

p	q	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

Condicionais.

Tautologia e contradição

- Tautologia: é uma proposição logicamente verdadeira, independentemente do valor lógico de suas proposições.

Exemplo:

$$p \rightarrow q \leftrightarrow \bar{q} \rightarrow \bar{p}$$

- Contradição: são aquelas proposições que são falsas independentemente do valor lógico de suas proposições.

Exemplo:

$$p \wedge \bar{p}$$

Negação de proposições

$$\overline{p \wedge q} \leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$$

$$\overline{p \vee q} \leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$$

$$\overline{p \rightarrow q} \leftrightarrow p \wedge \bar{q}$$

Conjuntos

Um conjunto intuitivamente é compreendido como uma coleção de objetos.

Pertinência

Usado para relacionar elemento e conjunto.

$x \in A$: x é elemento do conjunto A .

$x \notin B$: x não é elemento do conjunto B .

Inclusão

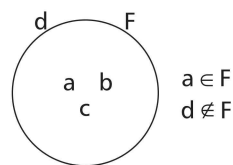
Usado para relacionar conjunto a conjunto.

$A \subset B$: o conjunto A está contido no conjunto B (A é subconjunto de B). Diz-se que um conjunto A é subconjunto de um conjunto B , ou que A está contido em B , se e somente se, todo elemento de A é também elemento de B .

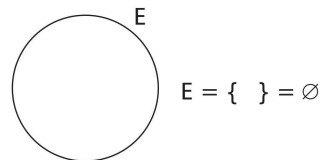
$A \not\subset B$: o conjunto A não está contido no conjunto B (A não é subconjunto de B).

Se em um conjunto não existir elementos, dizemos que o conjunto é vazio e indicamos com o símbolo $\emptyset$ ou $\{ \}$.

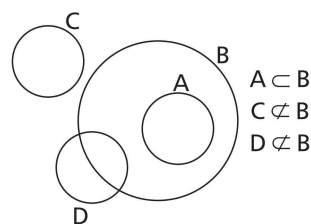
Exemplos:



Relação de pertinência.



Conjunto vazio.



Relação de inclusão.

Simbologia matemática

Algumas notações utilizadas na matemática.

$\forall$: "qualquer que seja" ou "para todo"

Exemplo:

" $\forall x, \sqrt{x^2} = |x|$, isto é, "para todo x , a raiz quadrada de seu quadrado é igual ao seu módulo."

$\exists$: "existe"

$\therefore$: "tal que"

$\nexists$: "não existe"

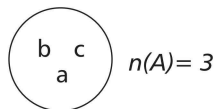
Exemplo:

$\exists x / x^2 = 2$, isto é, "existe x tal que seu quadrado vale dois."

$n(A)$: indica o número de elementos do conjunto A .

Exemplo:

O conjunto a seguir tem três elementos.



Um conjunto com três elementos.

Operações entre conjuntos

União

A união entre dois conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B . Indicamos com o símbolo $A \cup B$.

$$\text{Se } x \in A \cup B \rightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$

Intersecção

A intersecção entre dois conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e B ao mesmo tempo. Indicamos com o símbolo $A \cap B$.

$$\text{Se } x \in A \cap B \rightarrow x \in A \text{ e } x \in B$$

Dois conjuntos são ditos disjuntos se $A \cap B = \emptyset$.

Diferença

A diferença entre dois conjuntos, A e B , é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B . Indicamos como $A - B$.

$$\text{Se } x \in A - B \rightarrow x \in A \text{ e } x \notin B$$

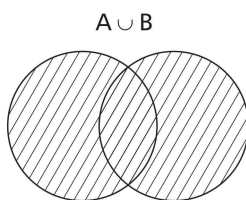


Figura 1: União.

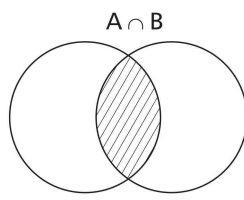
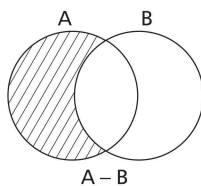
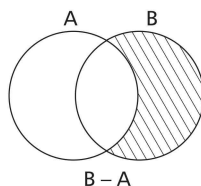


Figura 2: Intersecção.



$A - B$



$B - A$

Diferença.

Atenção:

$$A - B \neq B - A$$

O número de elementos de $A \cup B$ é igual a:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

O número de elementos de $A \cup B \cup C$ é igual a:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Propriedades da união e intersecção de conjuntos

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Conjuntos Numéricos

$\mathbb{N}$ – Naturais: são os números utilizados para contar quantidades.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

$\mathbb{Z}$ – Inteiros: são os números naturais, incluindo seus opostos.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$\mathbb{Q}$ – Racionais: são todos os números que podem ser escritos na forma de fração com numerador e denominador inteiros.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \dots, -\frac{3}{2}, \dots, 0, \dots, 2, \dots, \frac{13}{6}, \dots \right\}$$

$\mathbb{I}$ – Irracionais: são os números que não podem ser escritos como fração de numerador e denominador inteiros.

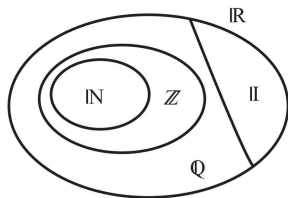
$$\mathbb{I} = \left\{ x \neq \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

$$\mathbb{I} = \{ \dots, -\sqrt{2}, \dots, e, \dots, \pi, \dots \}$$

$\mathbb{R}$ – Reais: é o conjunto formado pelos números racionais e pelos números irracionais.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

$$\mathbb{R} = \{x/x \in \mathbb{Q} \text{ ou } x \in \mathbb{I}\}$$



Intervalos

Intervalos limitados

Os intervalos são subconjuntos dos números reais:

Intervalo fechado:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$



Intervalo semiaberto à direita

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$



Intervalo aberto

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$



Intervalo semiaberto à esquerda

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$



Intervalos ilimitados

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$$



$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | a < x\}$$



$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$$



$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$$



$$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$



Os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ não são números, logo, não podem ser representados no intervalo como fechados.

Números primos

Números primos são aqueles que possuem apenas dois divisores: 1 e ele mesmo.

Exemplo:

3 é primo (apenas 1 e 3 dividem o número 3).

4 não é primo (1, 2 e 4 dividem o número 4).

Observação

O número 0 e o número 1 não são primos e o número 2 é o único número primo par.

Decomposição em fatores primos

Todo número natural composto pode ser escrito de maneira única como produto de números primos.

Exemplo:

$$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$$

Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C.)

O Mínimo Múltiplo Comum de um conjunto de números naturais é o menor número natural divisível por todos os elementos do conjunto.

Exemplo:

$$mmc(9, 4) = 36$$

Máximo Divisor Comum (M.D.C.)

O Máximo Divisor Comum de um conjunto de números naturais é o maior número natural, tal que todos os elementos desse conjunto são divisíveis por ele. O produto do MMC pelo MDC de dois números é o produto desses dois números. Se o MDC de dois números for 1, chamamos de primos entre si ou coprimos.

Exemplo:

$$mdc(9, 4) = 1$$

Dízima periódica

Um número racional pode ser representado por um número inteiro, um número decimal exato ou uma dízima periódica.

Exemplo:

1, 41212...

Parte inteira: 1

Parte não-periódica: 4

Parte periódica: 12 (parte que se repete periodicamente)

Fração geratriz

A geratriz de uma dízima periódica é a fração racional que origina esse número.

Numerador: é um número formado pela parte inteira seguida de parte não-periódica (quando existir) seguida do 1.º período, desse valor devemos subtrair a parte inteira seguida da parte não-periódica.

Denominador: número formado de tantos 9 quantos forem os algarismos do período, seguidos de tantos 0 quantos forem os algarismos da parte não-periódica.

Exemplo:

Determine a fração geratriz da dízima 1,4121212...

Numerador: $1412 - 14 = 1398$

Denominador: 990

Dízima: $\frac{1398}{990} = \frac{233}{165}$ **Produtos notáveis**

Quadrado da soma/diferença

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Diferença de quadrados

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Fator comum

$$ax + ay = a(x + y)$$

Agrupamento

$$ax + bx + ay + by = (a + b)(x + y)$$

Cubos

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

Sophie Germain

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - 2ab)$$

Lagrange

$$(ac \pm bd)^2 + (ad \pm bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

Cúbico

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

Funções

Dados dois conjuntos A e B denominamos função de A em B , toda relação que a cada elemento de A associa-se um, e só um, elemento de B .

Exemplo:

Dados os conjuntos $A = \{-2, 0, 3\}$ e $B = \{-5, -4, 1, 2, 11\}$, considere a função $f: A \rightarrow B$, definida por $f(x) = 3x + 2$, ou $y = 3x + 2$, temos que

$$x = -2 \rightarrow y = -4$$

$$x = 0 \rightarrow y = 2$$

$$x = 3 \rightarrow y = 11$$

Domínio (D)

O domínio de uma função f é o conjunto formado pelos primeiros elementos (abscissas) de cada par ordenado da função f .

Contradomínio (CD)

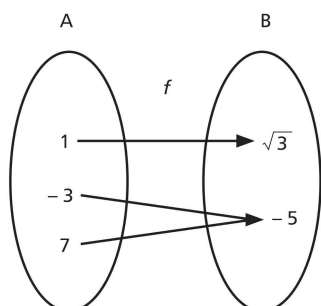
O conjunto em que encontramos os segundos elementos (ordenadas) dos pares ordenados da função.

Imagem (Im)

A imagem de uma função f é o conjunto formado pelo segundo elemento de cada par ordenado da função f .

Nos dois exemplos a seguir a relação de $f: A \rightarrow B$ representa uma função:

Exemplo 1:



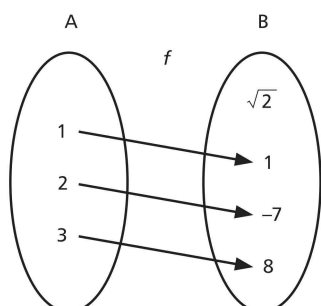
$$D(f) = \{1, -3, 7\}$$

$$CD(f) = \{\sqrt{3}, -5\}$$

$$Im(f) = \{\sqrt{3}, -5\}$$

É função, pois cada elemento do conjunto A (domínio) da função está associado a um único elemento do conjunto B (contradomínio).

Exemplo 2:



$$D(f) = \{1, 2, 3\}$$

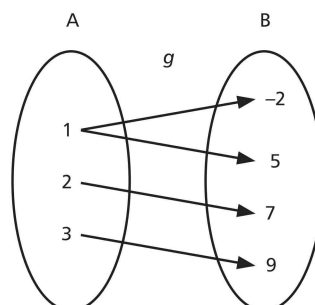
$$CD(f) = \{\sqrt{2}, 1, -7, 8\}$$

$$Im(f) = \{\sqrt{2}, 1, -7\}$$

É função, pois cada elemento do conjunto A (domínio) da função está associado a um único elemento do conjunto B (contradomínio).

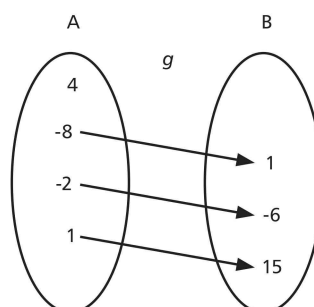
Nos dois exemplos a seguir a relação $g: A \rightarrow B$ não representa função.

Exemplo 1:



A relação $g: A \rightarrow B$, não representa função, pois o número $1 \in A$ e está associado a mais de um elemento do conjunto B . Ou seja, o número 1 tem mais de uma imagem.

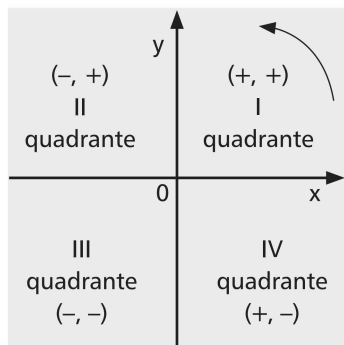
Exemplo 2:



A relação $g: A \rightarrow B$, não representa função, pois o número $4 \in A$ e não está associado ao conjunto B . Ou seja, o número 4 não tem imagem.

Plano cartesiano

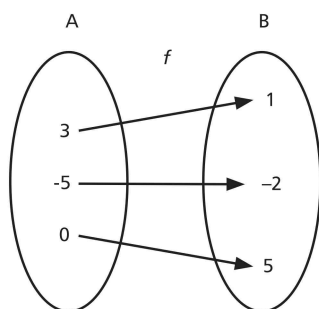
É um sistema constituído por dois eixos: x e y perpendiculares entre si. O eixo x é denominado de eixo das abscissas e o eixo y é denominado eixo das ordenadas. Esses eixos dividem o plano em quatro regiões chamadas quadrantes. A cada ponto do plano cartesiano, associamos um par ordenado (x, y) .



Os quadrantes.

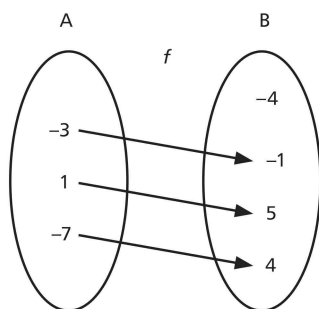
Função sobrejetora

Dizemos que uma função f de A em B é sobrejetora quando o conjunto imagem for igual ao conjunto contradomínio de B . Em linguagem matemática, se $\forall y \in B \exists a \in A$ tal que $f(a) = y$.



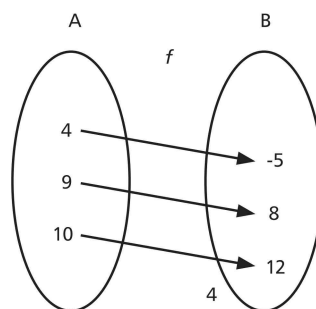
Função injetora

Dizemos que uma função f de A em B é injetora se qualquer dos seus elementos do seu domínio tem imagens diferentes. Em linguagem matemática, se $f(x) = f(y) \leftrightarrow x = y$.



Função bijetora

É toda função f de A em B que é simultaneamente injetora e sobrejetora.

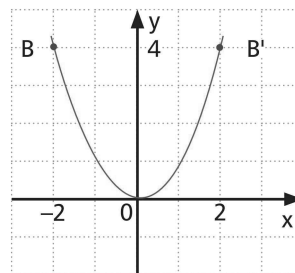


Função par

É toda a função que $f(x) = f(-x)$, isto é, quaisquer elementos opostos do domínio têm imagens iguais.

Exemplo:

$F(x) = x^2$, observe que elementos opostos têm imagens iguais.



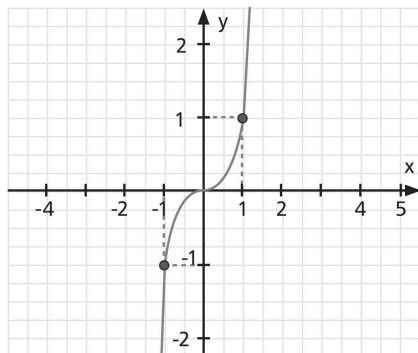
$$f(2) = f(-2)$$

Função ímpar

É toda a função que $f(x) = -f(-x)$, isto é, quaisquer elementos opostos do domínio têm imagens opostas.

Exemplo:

$f(x)=x^3$, observe que elementos opostos têm imagens opostas.



$$f(1) = -f(-1)$$

Função composta

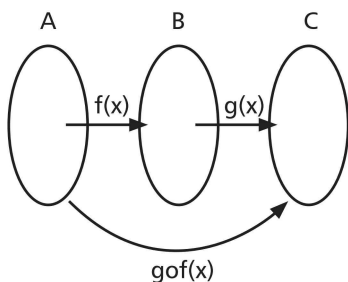
Se tivermos os conjuntos A , B e C e duas funções $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$, chamamos de função composta a função $h = g \circ f: A \rightarrow C$, definida por $R = g \circ f(x) = g(f(x))$.

Exemplo:

Sejam as funções $f(x) = x^2 + 4x - 5$ e $g(x) = 2x - 3$, determine $f \circ g(x)$.

Solução:

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) = g(x)^2 + 4g(x) - 5 = \\ &= (2x - 3)^2 + 4(2x - 3) - 5 = \\ &= 4x^2 - 4x - 8 \end{aligned}$$



Função inversa

Dada uma função $f: A \rightarrow B$ dizemos que sua inversa $f^{-1}: B \rightarrow A$ é a função que leva todos os elementos da imagem de f aos elementos do domínio de f . Uma maneira prática de determinarmos a função inversa de uma função dada é trocar a variável x pela variável y , a variável y pela variável x e em seguida isolar a variável y (quando possível).

Exemplo:

Determine a função inversa de $y = 3x + 2$ de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Solução:

Para isso fazemos $x = 3y + 2$, onde $y = \frac{x-2}{3}$ e, portanto, $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$

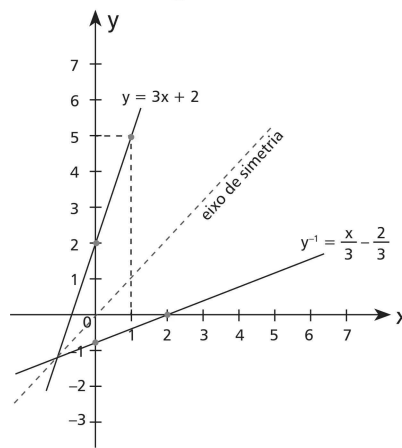


Gráfico da função f e da sua inversa.

Função afim

Resolução da equação de 1.º Grau

Exemplo:

Resolver a equação de 1.º grau.

$$9x + 3 = 6x + 18$$

$$9x - 6x = 18 - 3$$

$$3x = 15$$

$$x = \frac{15}{3}$$

$$x = 5$$

Sistema de equações de 1.º Grau/método da adição

Exemplo:

Determine a solução do sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x - y = 14 \end{cases}$$

Solução:

Para que na soma das equações uma das variáveis seja anulada devemos multiplicar uma das equações por uma constante adequada e diferente de 0 (zero). No exemplo dado podemos multiplicar a segunda equação por 2:

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 6x - 2y = 28 \end{cases}$$

Somando as equações temos:

$$7x = 35 \rightarrow x = 5$$

Se $x = 5$, basta então substituir esse valor em uma das equações para determinar o valor de y .

$$x + 2y = 7 \rightarrow y = 1$$

$$\text{Onde: } S = \{(5, 1)\}$$

A função afim

A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $y = ax + b$, com a e b números reais, denomina-se função afim.

$a \rightarrow$ coeficiente angular

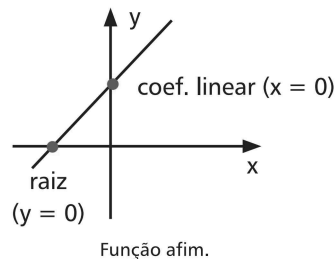
$b \rightarrow$ coeficiente linear

A raiz da função é o valor de x cuja imagem é 0 (zero).

$$x = -\frac{b}{a}$$

O coeficiente angular é a tangente da inclinação da reta em relação ao eixo x .

A ordenada do ponto intersecção da reta com o eixo y é o b e a abscissa do ponto de intersecção com o eixo x é chamada de raiz. As raízes de uma função qualquer são os valores de x tais que $y = 0$.



Função afim.

a \ b	+	-
+		
zero		
-		

Resumo da função afim.

Função quadrática

Equação do 2.º Grau

O formato da equação do 2.º grau é $ax^2 + bx + c = 0$, com a , b e c números reais e $a \neq 0$.

Equações incompletas

Quando $b=0$ ou $c=0$

1.º caso: $b = 0$

Exemplo:

$$x^2 - 9 = 0$$

Solução:

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x = \pm 3$$

$$S = \{-3, 3\}$$

2.º caso: $c = 0$

Exemplo:

$$x^2 - 9x = 0$$

Solução:

$$x^2 - 9x = 0$$

$$x(x - 9) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x - 9 = 0$$

$$S = \{0, 9\}$$

Equações completas

Nas equações completas utilizaremos a conhecida fórmula resolvente de um trinômio do 2.º grau.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$

Exemplo:

Resolver a equação $x^2 - 8x + 12 = 0$

$$a = 1, b = -8 \text{ e } c = 12$$

Basta aplicar a fórmula resolvente, então,

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(12)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$\text{onde } S = \{2, 6\}$$

Equação biquadrada

A equação biquadrada tem o seguinte formato: $ax^4 + bx^2 + c = 0$, com a, b, c números reais e $a \neq 0$.

Sua resolução consiste em fazer a redução a uma equação do segundo grau, para isso fazemos a substituição, $y = x^2$.

Exemplo:

$$2x^4 - 10x^2 + 8 = 0$$

$$\text{Fazendo: } y = x^2$$

$$\text{Então: } 2y^2 - 10y + 8 = 0$$

$$\text{Cujas soluções são: } y = 1 \text{ ou } y = 4$$

Retornando a variável original (x), temos que:

$$y = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$y = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Portanto,

$$S = \{-2, -1, 1, 2\}$$

Sistema do 2.º Grau / método da substituição

Isolamos uma das incógnitas e substituímos na equação que contém o produto.

Exemplo:

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$

Solução:

Isolamos uma das variáveis na primeira equação:

$$y = 8 - x$$

Agora, substituiremos na segunda:

$$x \cdot (8 - x) = 12$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

Resolvendo a equação do 2.º grau temos: $x_1 = 2$ e $x_2 = 6$. Voltando ao sistema

- Se $x = 2 \rightarrow y = 6$

- Se $x = 6 \rightarrow y = 2$

$$S = \{(2, 6); (6, 2)\}$$

Função quadrática

A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $y = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$, denomina-se função quadrática.

O formato do gráfico da função quadrática é uma parábola.

A intersecção da reta com o eixo y é o ponto c e a intersecção com o eixo x é chamada de raiz. As raízes podem ser obtidas com o uso da fórmula resolvente de um trinômio do 2.º grau.

Discriminante (Δ)

O discriminante é definido como sendo $\Delta = b^2 - 4ac$.

Se $\Delta > 0 \rightarrow$ duas raízes reais e diferentes.