

Toute la PC en fiches

MATHS. PHYSIQUE. CHIMIE.

2^E ÉDITION | D. Fredon • S. Margail • D. Magloire

DUNOD

Crédits photographiques :

Portrait de Carl Friedrich Gauss : lithographie de Siegfried Detlev Bendixen, in *Astronomische Nachrichten*, 1828

Portrait de James Clerk Maxwell : Lewis Campbell and William Garnett, *The Life of James Clerk Maxwell*, 1882.

Portrait de Michael Faraday : R. A. Millikan & H. G. Gale, *A First Course in Physics*, 1906.

Conception et création de couverture : Dominique Raboin

Collaboration technique : Thomas Fredon, ingénieur Télécom Bretagne

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage. Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements	d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).
--	--

© Dunod, 2016

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-075324-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Avant propos

Pour chaque matière proposée dans cet ouvrage (mathématiques, physique, chimie), vous trouverez un résumé de cours pour vous aider dans vos révisions tout au long de l'année et, dans la dernière ligne droite, juste avant vos concours.

Ces résumés sont enrichis - non pas aux omega 3 comme dans la publicité - mais avec des conseils, des méthodes, des mises en garde, et des exercices types pour vous entraîner à manipuler les notions présentées.

Synthèse des programmes, ce livre vous accompagnera avant tout contrôle oral ou écrit. L'ordre de présentation des notions a été pensé en fonction de cet objectif. Ne soyez pas surpris que l'ordre pédagogique de votre cours puisse être différent : l'apprentissage n'est pas un processus linéaire. Mais il est normal que l'ordre pédagogique de votre cours puisse être différent : l'apprentissage n'est pas un processus linéaire.

Grâce au découpage en fiches et à la présence d'un index très détaillé, vous retrouverez facilement, et à tout moment, les notions que vous souhaitez réviser.

Le livre de la même série de première année vous sera utile car, rappelez-vous, le programme des concours que vous passerez porte sur les deux années de classes préparatoires.

Dans chaque des fiches, certaines parties sont mises en valeur par un fond tramé :

- pour mettre en évidence un résultat important,
- avec le pictogramme  (prenez note !) pour des commentaires, remarques, méthodes,
- avec le pictogramme  (Attention, danger !) pour des mises en garde, des erreurs à éviter.

Un résumé de cours n'est pas un cours complet. Pour ceci, rien ne remplace le cours de votre professeur. Vous pouvez aussi consulter le catalogue Dunod, riche de nombreux manuels et ouvrages d'entraînement.

N'hésitez pas à nous communiquer vos critiques, vos propositions d'amélioration, et aussi vos encouragements.

Daniel Fredon
daniel.fredon@laposte.net
mathématiques

Didier Magloire
didier.magloire@orange.fr
physique

Sandrine Margail
sandrine.margail@gmail.com
chimie

Un grand merci à Jean-Marie Monier et à Claude Morin pour leurs relectures minutieuses, Matthieu Daniel pour le suivi attentif de la réalisation de ce livre et à Thomas Fredon sans qui ce livre n'existerait pas.

Table des matières

Avant-propos

3

Mathématiques

Algèbre

- | | |
|---|---------|
| 1. Compléments sur les espaces vectoriels | page 11 |
| 2. Réduction des endomorphismes | page 16 |
| 3. Espaces préhilbertiens réels | page 20 |
| 4. Isométries et endomorphismes symétriques | page 25 |

Analyse

- | | |
|---|---------|
| 5. Espaces vectoriels normés de dimension finie | page 29 |
| 6. Séries numériques | page 34 |
| 7. Suites et séries de fonctions | page 36 |
| 8. Séries entières | page 40 |
| 9. Fonctions vectorielles | page 45 |
| 10. Intégration sur un intervalle quelconque | page 48 |
| 11. Équations différentielles linéaires | page 55 |
| 12. Calcul différentiel | page 58 |

Probabilités

- | | |
|------------------------------------|---------|
| 13. Calcul des probabilités | page 64 |
| 14. Variables aléatoires discrètes | page 69 |
| 15. Espérance et variance | page 74 |

- | | |
|----------------------------|---------|
| Corrigés des mathématiques | page 79 |
|----------------------------|---------|

Physique

Mécanique

- 1. Référentiels non galiléens 1 : cinématique page [113](#)
- 2. Référentiels non galiléens 2 : dynamique page [119](#)
- 3. Frottements et roulement sans glissement page [125](#)

Mécanique des fluides

- 4. Description d'un fluide en mouvement page [132](#)
- 5. Actions de contact dans un fluide en mouvement page [139](#)
- 6. Dynamique des fluides page [147](#)
- 7. Bilans macroscopiques page [156](#)

Thermodynamique

- 8. Diffusion de particules page [161](#)
- 9. Systèmes ouverts en régime stationnaire page [170](#)
- 10. Diffusion thermique page [175](#)

Électromagnétisme

- 11. Transport de charge électrique page [183](#)
- 12. Distributions de charge et champ électrostatique page [191](#)
- 13. Propriétés du champ électrostatique page [198](#)
- 14. Dipôles électriques page [210](#)
- 15. Propriétés du champ magnétostatique page [217](#)
- 16. Dipôles magnétiques page [227](#)
- 17. Les équations de Maxwell page [234](#)

Physique des ondes

- 18. Propagation non dispersive page [245](#)
- 19. Propagation du champ électromagnétique dans un plasma ou un métal page [259](#)
- 20. Comportement aux interfaces page [271](#)

Optique

21. Modèle scalaire des ondes lumineuses	page 276
22. Sources et détecteurs de lumière	page 283
23. Superpositions d'ondes lumineuses	page 289
24. Interférences par division du front d'onde	page 294
25. Interférences par division d'amplitude	page 304
26. Transmission par des ouvertures : introduction à la diffraction	page 312

Physique quantique

27. Introduction à la physique des lasers	page 320
28. Fonctions d'onde et probabilités de présence	page 324
29. Puits, marches et barrières de potentiel	page 332

Corrigés de la physique	page 340
-------------------------	--------------------------

Chimie

Thermochimie

1. Application du premier principe à la transformation chimique	page 369
2. Application du second principe à la transformation chimique	page 380
3. Les diagrammes binaires liquide-liquide	page 393
4. Les diagrammes binaires solide-liquide	page 411

Électrochimie

5. Les courbes intensité-potentiel	page 428
6. Les piles	page 440
7. Les électrolyseurs et les accumulateurs	page 447
8. Récapitulatif sur les piles et les électrolyseurs	page 457

Atomes, molécules et complexes

9. Les orbitales atomiques	page 458
----------------------------	--------------------------

10. Les orbitales moléculaires OM	page 466
11. Les orbitales frontières (OF) - Réactivité	page 479
12. Orbitales moléculaires et structure des complexes	page 488

Molécules et matériaux organiques

13. Activité catalytique des complexes	page 498
14. Additions sur les hydrocarbures insaturés	page 512
15. Additions nucléophiles suivies d'éliminations	page 522
16. Conversions par oxydoréduction	page 539
17. La réaction de Diels-Alder	page 548
18. Réactivité nucléophile des énolates	page 555
19. Utilisation des organomagnésiens pour créer des liaisons C-C	page 567
20. Création de liaisons C=C	page 570
21. Repères pour l'analyse rétrosynthétique	page 576
22. Matériaux organiques polymères	page 577

Corrigés de la chimie	page 592
-----------------------	--------------------------

Annexes

1. Champs scalaires ; champs vectoriels	page 659
2. Séries de Fourier des signaux classiques	page 662

Index des mathématiques	page 664
-------------------------	--------------------------

Index de la physique	page 666
----------------------	--------------------------

Index de la chimie	page 670
--------------------	--------------------------

Partie 1

Mathématiques



Carl Friedrich Gauss, 1777-1855

Mathématicien, astronome et physicien allemand,
on le surnomme le prince des mathématiciens.
Il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens
de tous les temps.

À côté de lui, vous n'êtes que des gosses !

1 Compléments sur les espaces vectoriels

1. Produit et somme d'espaces vectoriels

1.1 Produit de p espaces vectoriels

- Le produit $F_1 \times \cdots \times F_p$ de p espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les lois :

$$(x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p) = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)$$

$$\lambda (x_1, \dots, x_p) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p)$$

- Dans le cas où ces espaces sont de dimension finie, on a :

$$\dim(F_1 \times \cdots \times F_p) = \dim F_1 + \cdots + \dim F_p.$$

1.2 Somme de p sous-espaces vectoriels

- Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E , la somme de ces sous-espaces est l'ensemble des vecteurs du type $x_1 + \cdots + x_p$ où $x_i \in F_i$ pour tout i .

On le note $F_1 + \cdots + F_p$ ou $\sum_i^p F_i$.

- C'est le sous-espace de E engendré par $F_1 \cup \cdots \cup F_p$.
- Dans le cas où ces espaces sont de dimension finie, on a :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim F_i.$$

1.3 Somme directe de p sous-espaces vectoriels

- Quand tout vecteur x de $\sum_i^p F_i$ s'écrit de façon **unique** sous la forme $\sum_i^p x_i$ avec $x_i \in F_i$

pour tout i , on dit que la somme des F_i est directe et on la note $\bigoplus_{i=1}^p F_i$.

 Pour démontrer que la somme des F_i est directe, la méthode la plus rapide est de partir d'une somme nulle $x_1 + \cdots + x_p = 0$ avec $x_i \in F_i$ pour tout i , et de démontrer que cela entraîne que tous les x_i sont nuls.

- Dans le cas $p = 2$, si $E = F_1 \oplus F_2$, on dit que F_1 et F_2 sont **supplémentaires** et on a le théorème :

$$E = F_1 \oplus F_2 \iff E = F_1 + F_2 \text{ et } F_1 \cap F_2 = \{0\}.$$

- Dans le cas où les p espaces sont de dimension finie, on a :

$$\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) = \sum_{i=1}^p \dim F_i.$$

si, et seulement si, la somme est directe.

► *Faites l'exercice 1.*

1.4 Base adaptée à une somme directe

- Si E est de dimension finie, on a :

$$\dim \bigoplus_{i=1}^p F_i = \sum_{i=1}^p \dim F_i.$$

Si la somme $\bigoplus_{i=1}^p F_i$ est directe, alors, pour que $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$, il faut et il suffit que :

$$\dim E = \sum_{i=1}^p \dim F_i.$$

- Si aucun F_i n'est réduit à $\{0\}$, la réunion d'une base de chaque F_i constitue une base de E si, et seulement si, $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$.

On obtient ainsi une base de E adaptée à la somme directe.

👉 *Attention à ne pas partir d'une base de E , car il n'y a aucune raison de pouvoir en extraire une base de $F_1 \dots$, ni même des vecteurs de $F_1 \dots$.*

2. Matrices par blocs

2.1 Définition et opérations

- Une matrice par blocs est une matrice subdivisée en matrices rectangulaires (les blocs).

Pour le calcul sur les matrices, les blocs se comportent comme des scalaires à condition que les opérations qui apparaissent aient un sens.

- **Addition**

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 + A_2 & B_1 + B_2 \\ C_1 + C_2 & D_1 + D_2 \end{pmatrix}$$

à condition que A_1 et A_2 aient le même nombre de lignes et de colonnes.

- **Produit**

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 A_2 + B_1 C_2 & A_1 B_2 + B_1 D_2 \\ C_1 A_2 + D_1 C_2 & C_1 B_2 + D_1 D_2 \end{pmatrix}$$

à condition que tous les produits partiels existent.



En informatique, cette technique est utilisée pour alléger le calcul sur les matrices.

► Faites l'exercice 2.

2.2 Endomorphisme induit

- Un sous-espace F de E est stable par u quand $u(F) \subset F$.

En restreignant à la fois le départ et l'arrivée, on définit l'**endomorphisme induit** :

$$u_F \begin{cases} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{cases}$$

- Soit F un sous-espace et considérons une base adaptée à F , c'est-à-dire une base de F complétée pour avoir une base de E .

La matrice de u dans une telle base peut s'écrire par blocs : $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

Dans ce cas, F est stable par u si, et seulement si, $C = 0$. La matrice de l'endomorphisme induit u_F est alors A .



Un sous-espace stable ne possède pas toujours de supplémentaire stable.

- Si u et v commutent, le noyau et l'image de u sont stables par v .

2.3 Déterminants

- **Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs**

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = \det A \times \det D.$$



Pour que l'égalité ait un sens il faut que A et D soient des matrices carrées.

- **Déterminant de Vandermonde**

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

3. Matrices semblables et trace

3.1 Matrices semblables

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E

Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$,
 A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$,
 A' la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

On a alors :

$$A' = P^{-1} A P.$$

Les matrices A et A' sont dites **semblables**. Elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.

► Faites l'exercice 3.

3.2 Trace d'une matrice carrée

• Définition

La trace d'une matrice $A = (a_{ij})$, carrée d'ordre n , est la somme de ses éléments diagonaux, soit :

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii} \in \mathbb{K}.$$

• Propriétés

$$\text{tr } (A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B \quad ; \quad \text{tr } (\lambda A) = \lambda \text{tr } A$$

$$\text{tr } (AB) = \text{tr } (BA) \quad ; \quad \text{tr } (PMP^{-1}) = \text{tr } M.$$

👉 Attention, en général $\text{tr } (ABC) \neq \text{tr } (BAC)$.

► Faites l'exercice 4.

3.3 Trace d'un endomorphisme

Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, toutes les matrices qui le représentent sont semblables et ont la même trace.

Cette trace commune est la trace de l'endomorphisme f .

Sauriez-vous répondre ?

Exercice 1 : Soit A, B, C et D quatre sous-espaces vectoriels de E qui vérifient :

$$(A + B) \oplus (C + D) \quad \text{et} \quad (A + C) \oplus (B + D).$$

Démontrez que : $A \oplus B \oplus C \oplus D$.

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculez A^2 .

Exercice 3 : Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, quelles sont les racines de $M^2 = 0$?

Exercice 4 : Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit l'endomorphisme ψ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$X \mapsto \psi(X) = AX + XA.$$

Calculez la trace de ψ en fonction de celle de A .

Exercice 5 : Soit E un espace vectoriel de dimension 2. Caractérisez les endomorphismes de E dont l'image et le noyau ne sont pas en somme directe.

Exercice 6 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\omega = \exp(i \frac{2\pi}{n})$ et on considère la matrice carrée M , d'ordre n , dont le terme général situé sur la ligne p et la colonne q est :

$$m_{pq} = \omega^{(p-1)(q-1)}.$$

1. Calculez : M^2 .

2. Déduisez-en $|\det M|$.

2 Réduction des endomorphismes

1. Éléments propres

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1.1 Éléments propres d'un endomorphisme

- Un vecteur non nul $x \in E$ est un vecteur propre de u s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Le scalaire λ est la valeur propre associée à x .
- Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u s'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$. Le vecteur x est un vecteur propre associé à λ .
- L'ensemble $E_\lambda = \{x \in E ; u(x) = \lambda x\} = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$ est le sous-espace propre associé à λ .
- Si E est de dimension finie, le spectre de u est l'ensemble $S_p(u)$ des valeurs propres de u .

1.2 Éléments propres d'une matrice carrée

- Une matrice colonne non nulle X est un vecteur propre de A s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AX = \lambda X$. Le scalaire λ est la valeur propre associée à X .
- Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A s'il existe une matrice colonne non nulle X telle que $AX = \lambda X$. Le vecteur colonne X est un vecteur propre associé à λ .
- L'ensemble $E_\lambda = \{X ; AX = \lambda X\}$ est le sous-espace propre associé à λ .
- Le spectre de A est l'ensemble $S_p(A)$ des valeurs propres de A .

1.3 Propriétés

- λ est une valeur propre de u si, et seulement si, $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0\}$.

En particulier, 0 est valeur propre de u si, et seulement si, $\text{Ker } u \neq \{0\}$, soit u non injectif.

- Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres toutes distinctes, est libre.
- La somme de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.

 Attention, en général $E \neq \bigoplus_k E_{\lambda_k}$. Par exemple, si $u^2 = 0$ avec $u \neq 0$, alors 0 est la seule valeur propre possible et pourtant $E \neq \text{Ker } u$.

- Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre pour l'un est stable par l'autre.

1.4 Polynôme caractéristique

Soit E de dimension finie et A une matrice carrée représentant un endomorphisme u dans une base fixée.

• Définitions

Le polynôme $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ est le polynôme caractéristique de A .

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, ce qui permet de définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

Les zéros de χ_A sont les valeurs propres de A . Si λ est racine d'ordre m_λ de χ_A , on dit que λ est valeur propre d'ordre m_λ .

On a toujours $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$ où E_λ est l'espace propre associé.

• Cas où χ_A est scindé

On a alors :

$$\operatorname{tr} A = \sum_{k=1}^n \lambda_k \quad \text{et} \quad \det A = \prod_{k=1}^n \lambda_k .$$

• Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit u_F divise le polynôme caractéristique de u .

2. Diagonalisation

Soit E de dimension finie.

2.1 Définitions

• Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale, c'est-à-dire s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u .

• Une matrice carrée A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale D , c'est-à-dire si elle s'écrit :

$$A = PDP^{-1}$$

où P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à une base de vecteurs propres de A .

2.2 Condition suffisante

Si $\dim E = n$ et si u a n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.

2.3 Conditions nécessaires et suffisantes

u diagonalisable

$\iff E$ est somme directe des sous-espaces propres ;

$\iff E$ admet une base de vecteurs propres ;

$\iff$ le polynôme caractéristique de u est scindé et, pour toute valeur propre λ_k d'ordre m_k , on a :

$$\dim(E_{\lambda_k}) = m_k .$$

2.4 Application au calcul de A^m

Si A est diagonalisable, il existe une matrice de passage P telle que $A = PDP^{-1}$. On a alors $A^m = PD^mP^{-1}$.

Et si $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alors $D^m = \text{diag}(\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m)$.

2.5 Application aux récurrences linéaires à coefficients constants

Voir exercice 4 pour un système d'ordre 1 et exercice 5 pour une équation d'ordre 2.

► *Faites les exercices 1 à 6.*

3. Trigonalisation

3.1 Définition

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Une matrice carrée A est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

3.2 Théorème

Un endomorphisme u est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.

 *En particulier, tout endomorphisme est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.*

Les éléments diagonaux de la matrice triangulaire représentant u sont les valeurs propres de u .

Sauriez-vous répondre ?

Exercice 1 : À quelles conditions sur a, b, c, d et e , la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 2 : Soit u un endomorphisme nilpotent de E , c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$.
 u est-il diagonalisable ?

Exercice 3 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1. Montrez que :
 A diagonalisable $\iff \text{tr}(A) \neq 0$.

Exercice 4 : Déterminez les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} &= -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} &= u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

Exercice 5 : Utilisez la diagonalisation d'une matrice pour déterminer le terme général de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Exercice 6 : Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E de rang 1.

Montrez que $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$ si, et seulement si, u n'est pas diagonalisable.

3 Espaces préhilbertiens réels

1. Produit scalaire et norme

1.1 Définitions

• Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Une forme bilinéaire φ sur E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chaque variable.

Elle est symétrique si : $\forall (x, y) \in E \times E \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

Elle est définie positive si : $\forall x \in E \setminus \{0\} \quad \varphi(x, x) > 0$.

• Un **produit scalaire** sur E est une forme bilinéaire φ , symétrique, définie, positive.

On dit que (E, φ) est un **espace préhilbertien réel**. Si, en plus, il est de dimension finie, c'est un **espace euclidien**.

$\varphi(x, y)$ se note $\langle x | y \rangle$ ou $(x | y)$ ou $x \cdot y$.

1.2 Exemples

• Dans $\mathbb{R}^n \quad \langle X | Y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

• Dans $E = C([a, b], \mathbb{R}) \quad \langle f | g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$.

• Dans $M_n(\mathbb{R}) \quad \langle A | B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$

1.3 Norme euclidienne

E étant un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire, en posant

$$\forall x \in E \quad \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle},$$

on définit une norme sur E , c'est-à-dire qu'on a les propriétés :

$\forall x \in E \quad \|x\| = 0 \implies x = 0$ (séparation)

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité)

$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

On obtient aussi une distance en posant $d(x, y) = \|x - y\|$.

1.4 Relations entre produit scalaire et norme

• **Égalité de polarisation**

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x | y \rangle,$$

ce qui permet d'obtenir le produit scalaire $\langle x | y \rangle$ en fonction des normes.

• Identité du parallélogramme

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

 Cette égalité est la généralisation de la propriété géométrique : dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés.

1.5 Inégalité de Cauchy Schwarz

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad | \langle x | y \rangle | \leq \|x\| \|y\|.$$

Dans cette inégalité, l'égalité a lieu si, et seulement si, x et y sont liés.

 Pour retenir ce théorème, pensez au cas de deux vecteurs du plan et à $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\vec{x}, \vec{y})$.

► Faites l'exercice 1.

2. Orthogonalité

2.1 Vecteurs orthogonaux

• Définitions

Deux vecteurs x et y sont orthogonaux si $\langle x | y \rangle = 0$; on note $x \perp y$.

Une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ est orthogonale si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ est orthonormale si elle est orthogonale et si les vecteurs sont tous unitaires.

• Propriété

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

• Théorème de Pythagore

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille orthogonale finie, on a :

$$\left\| \sum_{i \in I} x_i \right\|^2 = \sum_{i \in I} \|x_i\|^2.$$

2.2 Sous-espaces vectoriels orthogonaux

• Définitions

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E .

On dit que F et G sont orthogonaux, et on note $F \perp G$, quand :

$$\forall x \in F \quad \forall y \in G \quad \langle x | y \rangle = 0.$$

 Dans $\mathbb{R}^3$, on définit ainsi l'orthogonalité d'une droite et d'un plan, mais deux plans ne peuvent pas être orthogonaux.

L'orthogonal de F est le sous-espace vectoriel défini par :

$$F^\perp = \{x \in E ; \forall y \in F \quad \langle x | y \rangle = 0\}.$$

• Propriétés

$$E^\perp = \{0\} \quad ; \quad \{0\}^\perp = E \quad ; \quad F \perp G \iff F \subset G^\perp \iff G \subset F^\perp$$

☞ Attention, $F \perp G$ n'entraîne pas $G = F^\perp$.

$$F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp \quad ; \quad F \subset (F^\perp)^\perp \quad ; \quad F \cap F^\perp = \{0\}$$

☞ Attention, en général $E \neq F \oplus F^\perp$ et $F \neq (F^\perp)^\perp$.

2.3 Supplémentaire orthogonal

• Définition

Dans un espace préhilbertien E , deux sous-espaces vectoriels F et G sont dits supplémentaires orthogonaux quand :

$$E = F \oplus G \quad \text{et} \quad F \perp G.$$

• Propriété

Si F et G sont supplémentaires orthogonaux, on a $F = G^\perp$ et $G = F^\perp$, d'où $(F^\perp)^\perp = F$.

• Projecteur orthogonal

$p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur orthogonal quand $p^2 = p$ et $\text{Im } p \perp \text{Ker } p$.

$\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$ sont alors supplémentaires orthogonaux.

➤ Faites l'exercice 2.

2.4 Méthode d'orthogonalisation de Schmidt

• Orthogonalisation

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de E ; il existe une famille libre orthogonale $(y_1, \dots, y_n)$ telle que $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \text{Vect}(y_1, \dots, y_n)$.

Dans la méthode de Schmidt, elle se construit par récurrence en posant :

$$y_1 = x_1 \quad \text{puis} \quad y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i y_i \quad \text{avec} \quad \lambda_i = \frac{\langle y_i | x_k \rangle}{\langle y_i | y_i \rangle}.$$

• Orthonormalisation

Il reste à diviser chaque vecteur obtenu par sa norme pour obtenir une base orthonormale.

• Corollaire

Tout espace euclidien E admet une base orthonormale.

2.5 Bases orthonormales

Soit E muni d'une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$.

$$\text{Si } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad \text{on a } x_i = \langle e_i | x \rangle.$$

X et Y étant les matrices colonnes des coordonnées de x et de y , on a :

$$\langle x | y \rangle = {}^t \bar{X} Y \quad ; \quad \|x\| = \sqrt{{}^t \bar{X} X} \quad ; \quad d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}.$$

2.6 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

• Théorème

$$E = F \oplus F^\perp$$

On peut donc définir le projecteur orthogonal p_F sur F .

Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de F , on a :

$$\forall x \in E \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle e_i | x \rangle e_i.$$

 Cette expression simple du projeté orthogonal n'est vraie qu'en considérant une base orthonormale de F .

• Distance d'un vecteur à un sous-espace

On appelle distance d'un élément x de E au sous-espace de dimension finie F le nombre :

$$d(x, F) = \inf_{z \in F} \|x - z\|.$$

• Théorème

$d(x, F)$ est un minimum atteint en un point, et un seul, $z = p_F(x)$,

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x, F)^2.$$

 Attention, il est important que F soit de dimension finie.

• Inégalité de Bessel

Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de F , on a :

$$\forall x \in E \quad \sum_{j=1}^p \langle e_j | x \rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

➤ Faites les exercices 2 et 3.

Sauriez-vous répondre ?

Exercice 1 : 1. On considère l'application φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(M, N) = \text{tr}({}^t M N).$$

Montrez que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormale.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrez que $|\operatorname{tr} A| \leq \sqrt{n \operatorname{tr} ({}^tAA)}$.

Exercice 2 : Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien tel que :

$$\forall x \in E \quad \langle x | f(x) \rangle = 0.$$

Montrez que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires orthogonaux.

Exercice 3 : Soit E l'espace des fonctions continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) \, dx$.

On désigne par F le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes de degré au plus 1.

1. Déterminez une base orthonormale de F .
2. Déterminez le projeté orthogonal sur F de la fonction $x \mapsto x^2$.

Exercice 4 (bonus) : Soit E un espace euclidien de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrez que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \langle x | y \rangle = 0 \implies \langle f(x) | f(y) \rangle = 0$
- (2) $\exists k \in \mathbb{R}_+ \quad \forall z \in E \quad \|f(z)\| = k\|z\|.$

4 Isométries et endomorphismes symétriques

1. Isométries vectorielles d'un espace euclidien

1.1 Définition

Dans un espace vectoriel euclidien E , un endomorphisme f est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme, soit

$$\forall x \in E \quad \|f(x)\| = \|x\| \quad (1).$$

On dit aussi que f est un endomorphisme orthogonal.

1.2 Conditions équivalentes

$f \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie vectorielle si, et seulement si, il vérifie l'une des conditions suivantes :

(2) f conserve le produit scalaire, soit :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \langle f(x) | f(y) \rangle = \langle x | y \rangle.$$

(3) Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ telle que $f(\mathcal{B})$ soit une base orthonormale.

(4) Pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$, $f(\mathcal{B})$ est une base orthonormale.

1.3 Exemples

Les symétries orthogonales et les réflexions sont des automorphismes orthogonaux.

Mais une projection orthogonale distincte de l'identité n'en est pas un ; si $x \in \text{Ker } p$ avec $x \neq 0$, on a $\|p(x)\| < \|x\|$.

1.4 Groupe orthogonal

- Un endomorphisme orthogonal f appartient à $\text{GL}(E)$. Il est appelé automorphisme orthogonal de E .
- L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E est noté $\text{O}(E)$ et appelé **groupe orthogonal** de E .

► Faites l'exercice 1.

2. Matrices orthogonales

2.1 Définition

Une matrice carrée A est dite orthogonale si c'est la matrice de passage d'une base orthonormale $\mathcal{B}$ à une base orthonormale $\mathcal{B}'$.

L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n est le groupe orthogonal d'ordre n ; il est noté $\text{O}(n)$.

2.2 Conditions équivalentes

- Une matrice carrée est orthogonale si, et seulement si, ses vecteurs colonnes vérifient :

$$\forall i \quad \forall j \quad \langle C_i | C_j \rangle = \delta_{ij}.$$

- Une matrice carrée d'ordre n est orthogonale si, et seulement si :

$${}^t A A = I_n \iff {}^t A = A^{-1}.$$

2.3 Lien avec les endomorphismes

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale d'un espace euclidien E et A la matrice de $f \in \mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{B}$. On a :

$$A \in O(n) \iff f \in O(E).$$

2.4 Déterminant d'une matrice orthogonale

Si A est une matrice orthogonale, on a $\det A = \pm 1$.



Attention, la condition est nécessaire mais non suffisante.

2.5 Groupe spécial orthogonal

Le groupe spécial orthogonal $SO(E)$, ou groupe des rotations de E , est formé des automorphismes orthogonaux de déterminant égal à 1.

De même pour les matrices : $SO(n) = \{A \in O(n) ; \det A = 1\}$.

► *Faites l'exercice 2.*

2.6 Orientation du plan ou de l'espace

Orienter le plan ou l'espace, c'est choisir une base orthonormale de référence $\mathcal{B}_0$, dite directe.

Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale, on passe de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ par une matrice de passage A qui est orthogonale.

Si $\det A = 1$, la base $\mathcal{B}$ est dite directe.

Si $\det A = -1$, la base $\mathcal{B}$ est dite indirecte.

3. Isométries vectorielles en dimension 2

3.1 Classification

Dans le plan, il y a deux types d'isométries que l'on distingue par le déterminant :

si $\det A = 1$, il s'agit d'une rotation ;

si $\det A = -1$, il s'agit d'une réflexion.



N'oubliez pas de démontrer d'abord que A est une matrice orthogonale.

3.2 Rotations

- La rotation d'angle θ appartient à $SO(E)$. Dans toute base $\mathcal{B}$ orthonormale directe, sa matrice s'écrit :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

On a $\det A = 1$ et $\operatorname{tr} A = 2 \cos \theta$.

- La composée de deux rotations du plan euclidien est commutative et :

$$R(\theta) R(\theta') = R(\theta') R(\theta) = R(\theta + \theta').$$

- Dans le plan complexe, on assimile le vecteur $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ au complexe $z = x + iy$.

Le passage de $\overrightarrow{OM}$ à $\overrightarrow{OM'}$ par la rotation d'angle θ se traduit par : $z' = e^{i\theta} z$.

3.3 Réflexions

La matrice de la réflexion d'axe Δ dans une base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

mais elle dépend de $\mathcal{B}$. Dans une base adaptée, elle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Δ est l'ensemble des vecteurs invariants. On a $\det B = -1$ et $\operatorname{tr} B = 0$.

4. Endomorphismes symétriques

4.1 Définition

$f \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \langle f(x) | y \rangle = \langle x | f(y) \rangle$$

 Attention à ne pas confondre endomorphisme symétrique et symétrie.

4.2 Lien avec les matrices et exemples

- Si A est la matrice de f dans une base orthonormale $\mathcal{B}$, on a

$$f \text{ symétrique} \iff {}^t A = A.$$

- Un projecteur p (c'est-à-dire p linéaire et $p^2 = p$) est un endomorphisme symétrique si, et seulement si, c'est un projecteur orthogonal, c'est-à-dire que $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont supplémentaires orthogonaux.

- Une symétrie s (c'est-à-dire s linéaire et $s^2 = \operatorname{Id}_E$) est un endomorphisme symétrique si, et seulement si, c'est une symétrie orthogonale, c'est-à-dire que $F = \{x ; s(x) = x\}$ et $G = \{x ; s(x) = -x\}$ sont supplémentaires orthogonaux.

4.3 Diagonalisation des endomorphismes symétriques

Soit f un endomorphisme symétrique de E .

- Le polynôme caractéristique de f est scindé sur $\mathbb{R}$.
- f est diagonalisable dans une base orthonormale.
- E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de f .

• **Corollaire**

Si A est une matrice carrée symétrique, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que :

$$A = PDP^{-1} = PD^tP;$$

 Le calcul de P^{-1} est immédiat puisque $P^{-1} = {}^tP$.

➤ Faites les exercices 3, 4.

Sauriez-vous répondre ?

Exercice 1 : Soit λ un réel non nul et u un vecteur non nul d'un espace euclidien E . On considère l'application f de E dans E :

$$x \mapsto f(x) = x + \lambda \langle x | u \rangle u$$

Déterminez λ pour que f soit une isométrie.

Exercice 2 : Soit $S = (a_{ij})$ une matrice orthogonale réelle d'ordre n . Montrez que :

$$\left| \sum_{ij} a_{ij} \right| \leq n.$$

Exercice 3 : Démontrez que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1-i & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2-i & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 3-i & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 4-i \end{pmatrix}$ est inversible.

Exercice 4 : Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n . Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrez que :

$$\sum_{i,j} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

5 Espaces vectoriels normés de dimension finie

1. Normes

1.1 Définition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une norme sur E est une application N de E dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

- (1) $\forall x \in E \quad N(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad N(x) = 0 \implies x = 0;$
- (2) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x);$
- (3) $\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y).$

Le couple (E, N) est appelé espace vectoriel normé. On écrit souvent $N(x) = \|x\|$.

1.2 Exemples

❶ $E = \mathbb{R}^n$; pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$, on définit :

$$\begin{aligned} N_1(x) &= |x_1| + \dots + |x_n| \\ N_2(x) &= \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} \\ N_\infty(x) &= \sup \{|x_1|, \dots, |x_n|\}. \end{aligned}$$

❷ $E = C([a, b], \mathbb{R})$ étant l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, pour $f \in E$ on pose :

$$N_1(f) = \int_a^b |f(t)| dt \quad ; \quad N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}.$$

N_1 est la norme de la **convergence en moyenne**, N_2 la norme de la **convergence en moyenne quadratique**.

❸ E étant muni d'un produit scalaire, $N(x) = \sqrt{(x|x)}$ définit une norme appelée norme euclidienne. Les normes N_2 des exemples ❶ et ❷ sont des normes euclidiennes.

❹ $E = \mathcal{B}(A, F)$ étant l'espace vectoriel des fonctions bornées définies sur un ensemble A et à valeurs dans un espace vectoriel normé F , on pose :

$$N_\infty(f) = \sup_{t \in A} \|f(t)\|$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme dans F .

N_∞ est la norme de la **convergence uniforme**.

❺ Si $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ sont des espaces vectoriels normés, on définit une norme sur le produit cartésien $E_1 \times \dots \times E_p$ en posant :

$$N(u_1, \dots, u_p) = \sup_{1 \leq i \leq p} N_i(u_i).$$

2. Distance associée à une norme

2.1 Définition et propriétés

- La **distance entre deux éléments** x et y de E est :

$$d(x, y) = \|y - x\|.$$

- **Propriétés d'une distance**

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad d(x, y) \geq 0;$$

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad d(x, y) = 0 \iff x = y;$$

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad d(x, y) = d(y, x);$$

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall z \in E \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

- La **distance entre deux parties** A et B non vides de E est :

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) ; x \in A, y \in B\}.$$

- Le **diamètre** d'une partie non vide A est :

$$\text{diam } A = \sup\{d(x, y) ; x \in A, y \in A\}.$$

Si $\text{diam } A$ est fini, A est dite **bornée**.

Une application f définie sur un ensemble D et à valeurs dans E est dite bornée si $f(D)$ est une partie bornée de E .

► *Faites l'exercice 1.*

2.2 Boules

- La boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$ est :

$$B(a, r) = \{x \in E ; \|x - a\| < r\}.$$

- La boule fermée de centre a et de rayon $r > 0$ est :

$$B^*(a, r) = \{x \in E ; \|x - a\| \leq r\}.$$

2.3 Parties convexes

- **Segment**

M et N étant des points distincts de E , le segment d'extrémités M et N est l'ensemble :

$$[MN] = \{\lambda M + (1 - \lambda)N ; \lambda \in [0, 1]\}.$$

- **Partie convexe**

Une partie A de E est convexe si, pour tout $(M, N) \in A^2$, le segment $[MN]$ est inclus dans A .

► *Faites l'exercice 2.*

- **Boules**

Les boules, ouvertes ou fermées, sont convexes.

3. Suites d'un espace vectoriel de dimension finie

La définition de la convergence est analogue au cas des suites dans $\mathbb{R}$ (cf. § 6).

La suite (u_n) de E est convergente vers l si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \|u_n - l\| < \varepsilon.$$

Une suite qui n'est pas convergente est divergente.

 En dimension finie, la convergence d'une suite et la valeur de sa limite ne dépendent pas du choix de la norme.

L'étude de la convergence d'une suite se ramène à celle de ses coordonnées dans une base.

Beaucoup de théorèmes sur les suites numériques se généralisent : unicité de la limite, opérations algébriques ...

 Ne généralisez pas les notions qui utilisent la relation $\leq$ comme : limites infinies, suites monotones, théorème d'encadrement.

4. Topologie d'un espace vectoriel normé de dimension finie

Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

4.1 Voisinages d'un point

Une partie V est un voisinage de $a \in E$ s'il existe une boule ouverte centrée en a et incluse dans V .

4.2 Ouverts de E

• Une partie A de E est ouverte (ou est un ouvert) si elle est au voisinage de chacun de ses points, ce qui s'écrit :

$$\forall a \in A \quad \exists r_a > 0 \quad B(a, r_a) \subset A.$$

 Deux normes équivalentes définissent les mêmes ouverts.

• Un point a est un point intérieur de A si A est un voisinage de a .

L'ensemble des points intérieurs de A est l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ de A . On a $\overset{\circ}{A} \subset A$.

• Une partie A est ouverte si, et seulement si, $A = \overset{\circ}{A}$.

• La réunion d'une famille quelconque d'ouverts, l'intersection d'une famille finie d'ouverts sont des ouverts.

4.3 Fermés de E

• Une partie A est fermée (ou est un fermé) si son complémentaire est un ouvert.

• a est un point adhérent à A si toute boule $B(a, r)$ avec $r > 0$ contient un point de A . L'ensemble des points adhérents à A est l'adhérence $\overline{A}$ de A . On a $A \subset \overline{A}$.

Si $\overline{A} = E$, on dit que A est dense dans E .

• Une partie A est fermée si, et seulement si, $A = \overline{A}$.

- Un point a est adhérent à une partie A si, et seulement si, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a .
- L'intersection d'une famille quelconque de fermés, la réunion d'une famille finie de fermés sont des fermés.

► *Faites l'exercice 3.*

4.4 Frontière

La frontière d'une partie A est l'ensemble $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

C'est l'ensemble des points a tels que toute boule $B(a, r)$ avec $r > 0$ contient au moins un vecteur de A et un vecteur qui n'appartient pas à A .

5. Continuité

5.1 Limite

• Définition

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, f une application de $D \subset E$ dans F , a un point adhérent à D et $l \in F$.

f admet la limite l au point a si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in D \quad \|x - a\| < \eta \implies \|f(x) - l\| < \varepsilon.$$



Les normes dans E et dans F sont notées de la même façon pour ne pas alourdir les notations.

• Caractérisation séquentielle

Pour que f admette la limite l au point a , il faut et il suffit que, pour toute (u_n) qui converge vers a , la suite $(f(u_n))$ converge vers l .

• Lien avec les fonctions coordonnées

En fixant une base dans l'espace d'arrivée, la fonction f s'écrit : $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x))$.

La fonction f admet la limite $l = (l_1, \dots, l_p)$ au point a si, et seulement si, chaque fonction coordonnée f_i admet la limite l_i .

5.2 Continuité

• Définition

f est continue en a si elle est définie en a et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

• Caractérisation séquentielle

Pour que f soit continue en a , il faut et il suffit que, pour toute suite (u_n) qui converge vers a , la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

• Lien avec les fonctions coordonnées

La fonction f est continue en a si, et seulement si, les fonctions coordonnées f_i sont continues en a .

5.3 Continuité sur une partie

• Définition

f est continue sur $D \subset E$ si elle est continue en tout point de D .

• Opérations algébriques

Les opérations algébriques sont analogues au cas particulier des fonctions numériques continues.

• Propriété topologique

Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$, alors

l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert,

les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geq 0$ sont des fermés.

► Faites l'exercice 4.

• Exemple

Les applications multilinéaires et polynomiales sont continues sur $\mathbb{K}^n$.

• Théorème

Une fonction continue sur une partie fermée et bornée, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est bornée et atteint ses bornes.

5.4 Fonctions lipschitziennes

- Une fonction f de D dans F est lipschitzienne de rapport $k \geq 0$ si :

$$\forall x \in D \quad \forall y \in D \quad \|f(y) - f(x)\| \leq k \|y - x\|.$$

- Si $0 < k < 1$, on dit que f est contractante .
- Toute application linéaire sur un espace de dimension finie est lipschitzienne.

Sauriez-vous répondre ?

Exercice 1 : On considère $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $N_\infty(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$, et la droite $F = \{(x, 0) ; x \in \mathbb{R}\}$.

Déterminez l'ensemble des points de F dont la distance au point $(3, 2)$ est minimale.

Exercice 2 : Soit $B(a, r)$ une boule ouverte relative à une norme de $\mathbb{R}^n$. Montrez que c'est une partie convexe.

Exercice 3 : Dans $\mathbb{R}[X]$, on définit la norme $\|P\| = \sup_{t \in [-1, 1]} |P(t)|$.

Démontrez que tout polynôme de ${}_R[X]$ est adhérent à l'ensemble des polynômes tels que $P(2) = 0$.

Exercice 4 : Démontrez que l'ensemble des matrices non inversibles d'ordre n est un fermé. Est-il borné ?