

M.-V. SPELLER | E. GUÉLOU

VISA POUR LA PRÉPA 2018-2019

MATHS PHYSIQUE - CHIMIE

MPSI - PCSI - PTSI
BCPST

3^e édition

DUNOD

l'intérêt

Conception et création de couverture : Hokus Pokus Créations

Mise en page : Belle page

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2013, 2018

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-078268-0

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^e et 3^e a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

[Introduction]	Bienvenue en Maths sup !	1
----------------	------------------------------------	---

Mathématiques

[Outils mathématiques]

Fiche cours	1	Le point sur les équations	6
Fiche cours	2	Le point sur la résolution de systèmes	9
Fiche cours	3	Les polynômes des second et troisième degrés	12
Fiche cours	4	Le point sur les inéquations et les tableaux de signes	16
Fiche cours	5	Les sommes	19
Fiche cours	6	Le point sur les combinaisons et les factorielles	20
Fiche cours	7	Rappels de géométrie	22

[Les fonctions]

Fiche cours	8	L'ensemble de définition d'une fonction	28
Fiche cours	9	Les axe et centre de symétrie d'une fonction – parité d'une fonction	29
Fiche cours	10	La périodicité d'une fonction	30
Fiche cours	11	Le point sur les limites	31
Fiche cours	12	La continuité et la dérivabilité d'une fonction en un point $x = a$	35
Fiche cours	13	Le tableau des dérivées	36
Fiche cours	14	Les étapes d'une étude de fonction	38
Fiche cours	15	Les fonctions usuelles	45
Fiche cours	16	Le point sur les fonctions valeur absolue et partie entière	51
Fiche cours	17	Les fonctions exponentielle et logarithme de base a	54
Fiche cours	18	Les fonctions trigonométriques et trigonométriques réciproques	58
Fiche exercices	19	Études de fonctions	67
Fiche exercices	20	Linéarisation des fonctions trigonométriques	88

[L'intégration]

Fiche cours	21	Les primitives	90
Fiche cours	22	Les intégrales	92
Fiche exercices	23	Le calcul intégral.	96
Fiche cours	24	Les équations différentielles des 1 ^{er} et 2 nd ordre (Hors programme TS)	98
Fiche exercices	25	Les équations différentielles	101

[Les suites]

Fiche cours	26	Les suites arithmétiques et géométriques	104
Fiche cours	27	Le comportement d'une suite	106
Fiche cours	28	Les suites récurrentes	108
Fiche exercices	29	Les suites.	111

[Les nombres complexes]

Fiche cours	30	Qu'est-ce qu'un nombre complexe ?	116
Fiche exercices	31	Les nombres complexes	125
Fiche exercices	32	Comment calculer la racine carrée d'un nombre complexe ? (Hors programme TS)	132
Fiche cours	33	Les nombres complexes et la géométrie	135
Fiche exercices	34	Les nombres complexes et la géométrie	141
Fiche exercices	35	Les transformations géométriques (Hors programme TS).	145

[Les matrices]

Fiche cours	36	Les espaces vectoriels (Hors programme TS) . . .	152
Fiche cours	37	Les matrices (Enseignement de spécialité TS) . .	153
Fiche exercices	38	Les matrices carrées.	161

[Les probabilités et les statistiques]

Fiche cours	39	Les statistiques descriptives – bases	166
Fiche cours	40	Le dénombrement	168
Fiche cours	41	Les probabilités conditionnelles	170
Fiche cours	42	Les principales lois discrètes.	172
Fiche exercices	43	Les lois de Bernoulli et Binomiale	175
Fiche cours	44	Les lois continues.	177
Fiche cours	45	Le point sur les lois discrètes et continues	179

[L'arithmétique]

Fiche cours	46	Le point sur les notions en arithmétique	184
Fiche exercices	47	L'arithmétique	186

Physique

[Outils mathématiques indispensables à la physique]

Fiche cours	48	Le point sur les conversions	190
Fiche exercices	49	Le point sur les conversions	194
Fiche cours	50	La notion d'erreur et d'incertitude	196
Fiche cours	51	Le résultat expérimental	201
Fiche exercices	52	Le résultat expérimental	203

[Signaux physiques et rappels d'optique]

Fiche cours	53	Les ondes et particules	206
Fiche exercices	54	Les caractéristiques des ondes	210
Fiche cours	55	Optique et propriétés des ondes	213
Fiche exercices	56	Les caractéristiques des ondes	220
Fiche cours	57	Le monde quantique – Introduction	224
Fiche exercices	58	Le monde quantique	227

[Mécanique : Temps, Mouvement et Évolution]

Fiche cours	59	Cinématique et lois de Newton	230
Fiche exercices	60	Mouvement d'un mobile	236
Fiche cours	61	Le mouvement des planètes	242
Fiche exercices	62	Les lois de Kepler	245
Fiche cours	63	Travail et Énergie	248
Fiche exercices	64	Travail et Énergie	252
Fiche cours	65	La relativité restreinte et la dilatation des durées	263

[Introduction à la thermodynamique – Échanges thermiques]

Fiche cours	66	Du microscopique au macroscopique	266
Fiche cours	67	Énergie dans un système thermodynamique	267
Fiche cours	68	Transferts thermiques et bilan énergétique	269
Fiche exercices	69	Transferts thermiques et bilan énergétique	273
Fiche cours	70	Mes premiers pas en thermodynamique (Hors programme Terminale)	275

[L'électricité]

Fiche cours	71	Les bases en électricité (Rappels de première) . . 278
Fiche exercices	72	Les bases en électricité (Rappels de première) . . 287
Fiche cours	73	Les circuits R, L, C série (Hors programme Terminale). 289
Fiche cours	74	Comment déchiffrer les informations d'un oscilloscope ? 293
Fiche exercices	75	Comment déchiffrer les informations d'un oscilloscope ? 295

Chimie

[Les réactions d'oxydoréduction]

Fiche cours	76	Les réactions d'oxydoréduction 298
Fiche exercices	77	Les réactions d'oxydoréduction 300
Fiche cours	78	Les piles. 305
Fiche exercices	79	Les piles. 308

[Les réactions acido-basiques]

Fiche cours	80	Les réactions acido-basiques 314
Fiche exercices	81	Les réactions acido-basiques 318
Fiche cours	82	Titrages et dosages 322
Fiche exercices	83	Titrages et dosages 325

[La chimie organique]

Fiche cours	84	Les familles de composés organiques 330
Fiche exercices	85	Les familles de composés organiques 335
Fiche cours	86	Les réactions chimiques. 338
Fiche exercices	87	Les réactions chimiques. 341
Fiche cours	88	Analyse des composés organiques et rendement 345
Fiche exercices	89	Analyse des composés organiques et rendement 350

[Cinétique et catalyse]

Fiche cours	90	Cinétique chimique. 358
Fiche exercices	91	Cinétique chimique. 362
Fiche cours	92	La catalyse. 368
Fiche exercices	93	La catalyse. 371

[Index]	374
---------	-----

Bienvenue en Maths sup !

Vous avez dit prépa ?

1. Bienvenue en prépa !

Tout d'abord FÉLICITATIONS à vous qui êtes admis en classe prépa !

Avant de consulter cet ouvrage nous vous invitons à lire ces quelques lignes en guise d'introduction car même si vous « restez » au lycée beaucoup de choses vont changer... Afin d'appréhender au mieux votre année, autant que vous sachiez précisément où vous mettez les pieds !

2. À qui s'adresse ce livre ?

Cet ouvrage regroupe les notions essentielles à maîtriser parfaitement en mathématiques, physique et chimie pour intégrer une classe de mathématiques supérieures MPSI (Mathématiques Physique Sciences de l'Ingénieur), PCSI (Physique Chimie Sciences de l'Ingénieur), PTSI (Physique Technologie Sciences de l'Ingénieur) ou BCPST (Biologie Chimie Physique Sciences de la Terre).

3. Une nouvelle forme d'évaluation : vers le concours !

- Vous aviez l'habitude d'être notés sur 20 aux différents contrôles en fonction des exercices correctement traités et selon un barème précis. En prépa, vous êtes notés en fonction des résultats des autres élèves de la classe. Cela signifie que vous pouvez obtenir une note de 20/20 en n'ayant pas réalisé la totalité du sujet : par exemple, si vous êtes le meilleur en ayant fait la moitié de l'énoncé, vous avez 20/20 !
- Sur votre copie figure donc désormais votre classement à côté de la note attribuée.

4. Quelles matières ?

Les matières enseignées en classe de mathématiques supérieures sont (le volume horaire dépend de votre filière) :

- Les mathématiques
- La physique
- La chimie
- Les sciences de l'ingénieur (MPSI, PCSI et PTSI)
- Les sciences de la vie et de la terre (BCPST)
- Le français : trois œuvres autour d'un thème commun.
- L'anglais : thèmes (traduction du français vers l'anglais) et versions (traduction de l'anglais vers le français)
- Le sport : ce qui peut vous permettre de vous détendre et évacuer votre surplus de stress !

5. Quelle attitude adopter en prépa ?

Travaillez régulièrement !

Avec la masse de nouvelles informations que vous allez devoir digérer au cours de la semaine, vous ne pouvez pas vous permettre de travailler par intermittence. Sinon vous serez vite perdu(e) et accumulerez trop de retard.

Prenez l'habitude de lire vos notes prises au cours de la journée tous les soirs en rentrant chez vous. Notez les différents points que vous ne saisissez pas bien et n'hésitez pas à aller voir vos professeurs pour leur poser des questions.

Ne négligez pas les matières littéraires :

- D'abord parce qu'à niveau égal dans les matières scientifiques, c'est l'anglais et le français qui feront la différence aux concours.
- Il est également vivement conseillé aux futurs ingénieurs d'être bilingue français/anglais à leur arrivée sur le marché du travail.
- Mais aussi parce que le français ou l'anglais représentent un « bol d'air frais » dans la semaine qui est remplie de formules mathématiques et scientifiques en tout genre.

Faites-vous des amis !

D'accord, vous êtes systématiquement classés à chaque devoir sur table, ce qui peut instaurer un certain « esprit concours » dans la classe. N'entrez surtout pas dans ce jeu : prêtez vos cours aux absents, expliquez ce que vous avez bien compris à ceux qui ont des difficultés, travaillez avec vos camarades de classe, etc. Pourquoi ? Parce que vous avancez beaucoup plus rapidement en expliquant aux autres et en leur posant des questions plutôt qu'en révisant tout seul dans votre coin.

Ne faites pas que travailler avec les personnes de votre classe, sortez, allez au cinéma, allez au théâtre, allez voir des expositions, etc. Organisez-vous aussi des dîners de classe ! Le but est de partager autre chose que la vie scolaire. Et vous verrez, on peut se faire des amis en prépa ! Cela vous permettra aussi de supporter le rythme soutenu des cours.

Rassurez-vous !

Il se peut que vous entendiez beaucoup de commentaires décourageants sur la prépa : « c'est horrible », « c'est très difficile », « tu ne vas que travailler », etc. De quoi vous miner le moral... Mais prenez les choses du bon côté :

- Vous avez choisi cet enseignement et en plus vous avez eu la chance de voir votre candidature retenue. C'est tout de même une très bonne nouvelle !
- Vous allez travailler sur des thèmes qui vous plaisent *a priori*.
- La prépa est l'occasion de développer d'excellentes méthodes de travail.
- Vous ne perdez pas votre temps car en cas d'échec ou de changement d'orientation vous pouvez intégrer d'autres filières.

La fin de l'année... premier bilan :

- Vous êtes admis en maths spé ! Bravo et bonne chance pour la 3/2 !
- Vous n'êtes pas admis à poursuivre dans votre lycée : tentez une maths spé dans d'autres établissements ou bien changez de filière. Demandez des conseils à vos professeurs : que pouvez-vous faire en fonction de vos résultats ? Cette filière vous plaît-elle ? Etc. Prenez rendez-vous avec une conseillère d'orientation si vous en éprouvez le besoin. Rendez-vous aux portes ouvertes des écoles d'ingénieur post-bac, des universités, etc.

Mais en aucun cas, cette non-admission en maths spé dans votre lycée ne constitue un échec. Vous avez acquis de très bonnes bases dans les matières scientifiques et disposez désormais d'excellentes méthodes de travail. Vous pourrez ainsi réussir brillamment vos études dans d'autres filières.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier l'équipe d'édition pour son soutien, son écoute et sa confiance.

Je remercie également tous les élèves que j'ai pu accompagner lors de leurs études en prépa. Leurs doutes et leurs questionnements m'ont permis d'insister sur les points qui posent le plus de problèmes aux étudiants à leur arrivée en classe préparatoire.

J'espère que cet ouvrage répondra aux attentes des futurs élèves de mathématiques supérieures.

Bon travail et bonne « maths sup » à tous !

« Le succès ne vient qu'à ceux qui ne craignent pas l'effort »

Marie-Virginie SPELLER

Mathématiques

[Outils
mathématiques]

Le point sur les équations

1. Je fais le point sur mes connaissances

1. Les équations généralités

Les équations se présentent sous la forme $f(x) = b$ et les solutions s'obtiennent en effectuant le calcul : $x = f^{-1}(b)$ où f^{-1} est la fonction réciproque de f (avec f bijective). f peut être une fonction affine, une fonction logarithme, une exponentielle, une racine, etc.

2. Les équations avec expressions affines

- Équations du type $ax = 0$ avec a réel :
si a est un réel non nul, alors l'unique solution de cette équation est $x = 0$. $S = \{0\}$.
Si a est nul, alors l'équation admet une infinité de solutions. $S = \mathbb{R}$.
- Équations du type $x + b = 0$ avec b réel ;
l'unique solution de cette équation est $x = -b$. $S = \{-b\}$.
- Équations du type $ax + b = 0$:
si a et b sont deux réels non nuls, alors cette équation a pour unique solution $x = -\frac{b}{a}$. $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

3. Équations sous forme de facteurs

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs au moins est nul. $A \times B = 0 \iff A = 0$ ou $B = 0$.

Parfois, et même souvent, l'équation ne se présente pas sous la forme d'un produit directement factorisé. C'est donc à vous de factoriser l'expression afin d'obtenir un produit de facteurs et pouvoir ainsi résoudre l'équation.

4. Équations sous forme de quotients

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur non nul :

$$\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0 \text{ et } B \neq 0$$

Parfois et même souvent, il arrive que l'équation ne se présente pas sous la forme d'un seul quotient. C'est donc à vous de réduire l'expression au même dénominateur afin d'obtenir un unique quotient et pouvoir ainsi résoudre l'équation.

[REMARQUE]

Lorsque vous obtenez une solution qui est une valeur interdite (qui annule le dénominateur), vous ne pouvez pas en tenir compte.

Exemple

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = 0 &\iff \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 2} = 0 \\ &\iff \begin{cases} x = 2 \text{ ou } x = 3 \\ x \neq 2 \end{cases} \iff x = 3 \text{ et } S = \{3\} \end{aligned}$$

5. Les équations non linéaires

f est dans ce cas une fonction non affine. Il s'agit obligatoirement d'une fonction bijective (c'est-à-dire que chaque x admet une unique image y par f et chaque y un unique antécédent x par f).

Équations	Solutions
$\frac{1}{x} = a, x \neq 0, a \neq 0$	$x = \frac{1}{a}, x \neq 0, a \neq 0$
$\ln(x) = a, x > 0$	$x = e^a$
$e^x = a, a > 0$	$x = \ln(a), a > 0$
$\sqrt{x} = a$	$x = a^2$
$x^2 = a, a \geq 0$	$x = \pm \sqrt{a}, a \geq 0$
$x^3 = a$	$x = \sqrt[3]{a}$
$x^{2p} = a, a \geq 0$	$x = \pm \sqrt[2p]{a}, a \geq 0$
$x^{2p+1} = a$	$x = \sqrt[2p+1]{a}$
$ x = a$	$x = a \text{ ou } x = -a$

[REMARQUE]

Un nombre entier pair n s'écrit $n = 2p$ et un nombre entier impair n s'écrit $n = 2p + 1$ où p est un entier naturel.

[ATTENTION]

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad x \geq 0$$

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, \quad n \geq 1, \quad \begin{cases} x \geq 0, & n \text{ pair} \\ x \text{ réel}, & n \text{ impair} \end{cases}$$

2. Les mots clés**Ensemble vide :**

Il s'agit de l'ensemble ne comportant aucun élément. On note $S = \emptyset$, lorsque l'équation n'admet pas de solution.

Infinité de solutions :

Une équation admet une infinité de solutions lorsqu'elle est vraie pour tout x de $\mathbb{R}$.

Produit de facteurs :

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

Solution :

La ou les solution(s) de l'équation $f(x) = 0$ est (sont) le ou les point(s) de concours de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses.

Valeur interdite :

Une valeur interdite est une valeur que ne peut pas prendre x . Par exemple, une valeur interdite est la valeur qui annule un dénominateur ou l'expression à l'intérieur d'un $\ln$, etc.

[REMARQUE]

Les équations sont très utilisées dans la recherche de l'ensemble de définition d'une fonction ou bien dans le calcul des coordonnées des extrema d'une fonction (qui annulent la dérivée) ou encore dans l'étude du signe de la dérivée.

Le point sur la résolution de systèmes

1. Je fais le point sur mes connaissances

On cherche à résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues x et y :

$$(S) \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

1. La résolution par substitution

Il s'agit d'exprimer l'une des variables en fonction de l'autre. Dans le système (S), il est possible d'exprimer y en fonction de x dans la première équation :

$$ax + by = e \iff by = e - ax \iff y = \frac{e - ax}{b}$$

Puis on remplace y dans la seconde équation :

$$\begin{aligned} cx + dy = f &\iff cx + d \times \frac{e - ax}{b} = f \iff \frac{cbx + de - dax}{b} = \frac{bf}{b} \\ &\iff cbx + de - dax = bf, b \neq 0 \iff (bc - ad)x = bf - de \\ &\iff (bc - ad)x = bf - de \iff x = \frac{bf - de}{bc - ad}, bc - ad \neq 0 \end{aligned}$$

On obtient l'expression de y en remplaçant par la valeur obtenue ci-dessus :

$$\begin{aligned} y &= \frac{e - ax}{b} = \frac{e - a \frac{bf - de}{bc - ad}}{b} = \frac{e(bc - ad) - a(bf - de)}{b(bc - ad)} \\ y &= \frac{ebc - ead - abf + ade}{b(bc - ad)} = \frac{ebc - abf}{b(bc - ad)} \iff y = \frac{ec - af}{bc - ad} \end{aligned}$$

2. La résolution par combinaison

Cette méthode consiste à éliminer une variable de manière à se retrouver en présence d'une équation à une seule inconnue x ou y . Pour cela, il suffit d'additionner ou soustraire les deux équations affectées d'un facteur permettant de supprimer une variable.

Dans le système (S), il suffit de multiplier la 1^{re} équation par d et la 2^{de} par b puis de les soustraire. Cela permet d'éliminer la variable y :

$$d(ax + by) - b(cx + dy) = de - bf$$

$$\iff dax + dby - bcy - bdy = de - bf \iff dax - bcy = de - bf$$

$$\iff (da - bc)x = de - bf \iff x = \frac{de - bf}{ad - bc} = \frac{bf - de}{bc - ad}$$

Puis on remplace x par son expression dans l'une ou l'autre des équations de départ pour obtenir le même résultat que précédemment. Le y s'obtient de la même manière que dans la méthode par substitution.

3. La résolution par le pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss pour le calcul de l'inverse d'une matrice est détaillée dans le chapitre portant sur les matrices : le but est d'effectuer une succession d'opérations sur les lignes du système afin de l'avoir sous une forme triangulaire. À partir d'un système matriciel $AX = b$, vous obtenez un système sous forme triangulaire puis la solution $X = A^{-1}b$ avec A^{-1} matrice inverse de A (invertible).

Un système de n équations à n inconnues de la forme $AX = b$ a pour solution le vecteur X de $\mathbb{R}^n$ défini par $X = A^{-1} \times b$ (où A est une matrice invertible d'inverse A^{-1} et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$) :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_A \times \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}}_b$$

4. Les systèmes non linéaires

Les systèmes non linéaires sont formés d'équations qui ne sont pas forcément affines. Le principe de résolution est le même, à vous de choisir la méthode que vous préférez sauf si on vous l'impose dans l'énoncé !

2. Les mots clés

Couple solution :

Il s'agit des points $(x ; y)$ qui vérifient le système. C'est le point de concours des droites correspondant aux équations du système dans le cas où les équations sont affines. $S = (x ; y)$.

Ensemble vide :

Il s'agit de l'ensemble ne comportant aucun élément. On note $S = \emptyset$, lorsque le système n'admet pas de solution, c'est-à-dire lorsque les droites correspondantes aux équations sont parallèles.

Forme matricielle d'un système :

Il s'agit de l'écriture $AX = b$. Les solutions du système sont données par avec $X = A^{-1} \times b$ matrice inversible d'inverse A^{-1} .

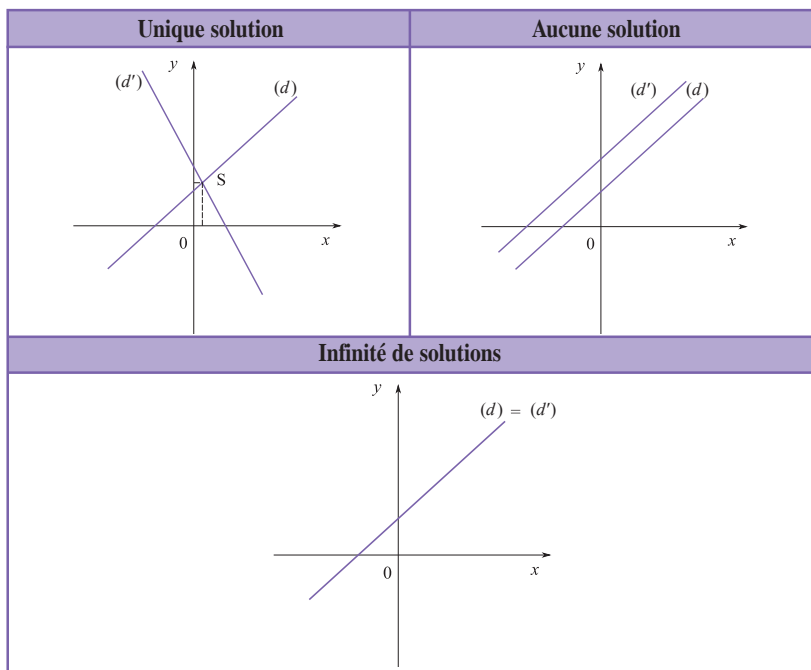
Infinité de solutions :

Un système a une infinité de solutions lorsque les équations sont proportionnelles, c'est-à-dire, lorsque leurs droites correspondantes sont confondues. On note dans ce cas $S = \mathbb{R}$.

Pivot de Gauss :

Cette méthode (détaillée plus loin dans cet ouvrage) consiste à écrire le système sous forme triangulaire en calculant la réduite de Gauss de la matrice A correspondante au système (S).

Représentation graphique :



Les polynômes des second et troisième degrés

1. Je fais le point sur mes connaissances

1. Les polynômes du second degré

Les polynômes ou trinômes du second degré s'écrivent sous la forme $ax^2 + bx + c$. Leur(s) racine(s) éventuelle(s) vérifient l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$.

	Racines	Signe	Factorisation
$\Delta > 0$ Deux racines réelles	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	le polynôme est du signe de a à l'extérieur des racines et de $-a$ à l'intérieur	$a(x - x_1)(x - x_2)$
$\Delta = 0$ Une racine double réelle	$x_0 = \frac{-b}{2a}$	le polynôme est du signe de a	$a(x - x_0)^2$
$\Delta < 0$ Deux racines complexes conjuguées	$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$	le polynôme est du signe de a	pas de factorisation

2. Les polynômes du troisième degré

Pour déterminer les racines des polynômes de degré trois, vous devez déterminer la racine évidente, afin de factoriser le polynôme sous la forme du produit d'un polynôme de degré un : $(x - \text{racine évidente})$ par un polynôme de degré deux : $(ax^2 + bx + c)$.

Comment résoudre une équation avec un polynôme du 3^e degré ou déterminer les racines d'un polynôme de degré 3 ?

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

Il faut tout d'abord chercher une racine évidente. En général, il s'agit de 1, -1, 2, -2, 3, -3, etc. Il suffit de « tâtonner » en essayant différentes valeurs pour x .

En notant α la racine évidente, $\alpha \neq 0$, le polynôme se factorise sous la forme :

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$$

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = ax^3 + bx^2 + cx - \alpha ax^2 - \alpha bx - \alpha c$$

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = ax^3 + (b - \alpha a)x^2 + (c - \alpha b)x - \alpha c$$

Par identification, apparaît un système de 4 équations à 3 inconnues a , b et c :

$$\begin{cases} a = A \\ b - \alpha a = B \\ c - \alpha b = C \\ -\alpha c = D \end{cases} \iff \begin{cases} a = A \\ b - \alpha a = B \\ c - \alpha b = C \\ c = -\frac{D}{\alpha} \end{cases} \iff \begin{cases} a = A \\ b = B + \alpha A \\ c - \alpha(B + \alpha A) = C \\ c = -\frac{D}{\alpha} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = A \\ b = B + \alpha A \\ c = C + \alpha(B + \alpha A) \\ c = -\frac{D}{\alpha} \end{cases}$$

Avec pour condition : $C + \alpha(B + \alpha A) = -\frac{D}{\alpha}$: on obtient forcément deux expressions pour c car il y a 4 équations pour 3 inconnues. En général, on choisit la 4^e équation qui donne une valeur obtenue simplement du 3^e paramètre c .

Finalement :

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = (x - \alpha)\left(Ax^2 + (B + \alpha A)x - \frac{D}{\alpha}\right)$$

Il devient ainsi aisé d'obtenir les autres racines éventuelles du polynôme en calculant le discriminant du polynôme $Ax^2 + (B + \alpha A)x - \frac{D}{\alpha}$.

[REMARQUE]

Lorsque $\alpha = 0$, vous obtenez directement la factorisation par x sans passer par une identification !