

Vitor Amadeu Souza

Implementando uma

FFT no PIC

Transformada Rápida de Fourier

Baseado no PIC18F4550 e mikroC

© 2012 by Cerne Tecnologia e Treinamento Ltda.

© 2012 by Vitor Amadeu Souza

Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida sem autorização prévia e escrita de **Cerne Tecnologia e Treinamento Ltda.** Este livro publica nomes comerciais e marcas registradas de produtos pertencentes a diversas companhias. O editor utiliza as marcas somente para fins editoriais e em benefício dos proprietários das marcas, sem nenhuma intenção de atingir seus direitos.

Dezembro de 2012

Direitos reservados por:

Cerne Tecnologia e Treinamento Ltda

Produção: Cerne Tecnologia e Treinamento

E-mail da Empresa: cerne@cerne-tec.com.br

Home Page: www.cerne-tec.com.br.com.br

Atendimento ao Consumidor: sac@cerne-tec.com.br

Contato com o Autor: vitor@cerne-tec.com.br

Dedicatória

Como nos meus outros livros, dedico este livro a minha querida esposa Renata Leal.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Pablo Batista por ter ministrado a disciplina Processamento Digital de Sinais que me possibilitou entender a implementação deste algoritmo.

“Ajuda o teu semelhante a levantar a carga, mas não a levá-la.”

Pitágoras

Kits Didáticos e Gravadores da Cerne Tecnologia

A Cerne tecnologia têm uma linha completa de aprendizado para os microcontroladores da família PIC, 8051, Holtek, dsPIC, ARM e etc. Veja os detalhes de cada um nas figuras abaixo:



Kit Cerne DFT - FFT

- Microcontrolador PIC18F4550
- Comunicação serial
- Comunicação USB
- Saída para Display Gráfico
- Botões
- Leds
- Gravação ICSP

Uma linha completa de componentes para o desenvolvimento de seus projetos eletrônicos como displays, PICs, botões, leds, cristais e etc.

Visite a nossa página na Internet, no endereço www.cerne-tec.com.br e conheça melhor nossos serviços e produtos.



www.cerne-tec.com.br

Sumário

01.Revisão de Números Complexos	15
01. Introdução	15
02. Propriedades dos Números Complexos	19
03. Conjugado de um Número Complexo	21
04. Adição de Complexos	22
05. Subtração de Complexos	24
06. Multiplicação de Complexos	25
07. Divisão de Complexos.....	28
08. Potências de Unidades Imaginárias.....	31
09. Polinômios de Complexos	33
10. Forma Polar de um Número Complexo.....	38
11. Fórmula de DeMoivre.....	48
12. Raízes de um número complexo	50
13. Fórmula exponencial de um complexo	55
14. Representação Fasorial de um Complexo	59
15. Exercícios de Avaliação.....	61
02.Programação em Delphi	94
01. Introdução	94
02. Exemplos no Delphi	96

03. Aplicações com Banco de Dados	143
04. Enviando E-mails do Delphi	155
05. Acessando a Porta Serial do PC	161
06. Acessando a Porta Paralela	194
07. Funções do Delphi	208
08. Trabalhando com Números Complexos	218
03.Filtros Passivos de 1º Ordem	225
01. Reatância Indutiva	225
02. Reatância Capacitiva.....	229
03. Circuitos puramente indutivos	232
04. Circuitos RL Série	233
05. Circuitos puramente capacitivos	240
06. Circuitos RC Série.....	242
07. Circuitos RLC Série	249
08. Circuitos RL em Paralelo	257
09. Circuitos RC em Paralelo.....	261
10. Circuitos RLC Paralelo	266
11. Circuito Ressonante.....	272
12. Largura de Banda ou BandWidth	276
13. Fator de Qualidade	278
14. Filtros	282
15. Filtro Passa-Baixa.....	283

16. Filtro Passa-Alta	288
17. Filtro Passa-Faixa	294
18. Filtro Rejeita-Faixa	297
04.Características do PIC18F4550	300
01. Introdução	300
02. Encapsulamento	301
05.O Ambiente mikroC.....	303
01. Introdução	303
02. Configurations Bits	314
06.Gravando o Microcontrolador	316
01. Introdução	316
07.Variáveis no mikroC.....	322
01. Tipos de dados.....	322
08.Operadores da Linguagem	325
01. Operador de atribuição	325
02. Operadores aritméticos.....	325
03. Operadores relacionais.....	326
04. Operadores lógicos.....	327

09. Controle de Fluxo	328
01. Comando de decisão IF.....	328
02. Comando de decisão IF-ELSE.....	329
03. O comando de decisão Switch-Case.....	331
04. O comando de loop FOR.....	333
05. O comando de loop WHILE.....	334
06. O comando de loop DO-WHILE	335
10. Funções no mikroC.....	336
01. Biblioteca EEPROM.....	336
02. Biblioteca USART	337
03. Biblioteca Util	340
04. Biblioteca de Conversão	340
05. Biblioteca de Delay	346
06. Biblioteca Matemática	348
07. Biblioteca de String.....	350
08. Biblioteca de acesso ao display LCD	352
09. Biblioteca de acesso ao display gráfico	356
10. Biblioteca de acesso a porta USB	365
11. Botão e Led	368
01. Introdução	368
02. Esquema elétrico	370
03. Código Fonte.....	371

12.Pisca-Pisca.....	373
01. Introdução	373
02. Esquema elétrico	373
03. Código Fonte.....	374
13.Display LCD	376
01. Introdução	376
02. Esquema elétrico	376
03. Código Fonte.....	377
14.Display Gráfico	379
01. Introdução	379
02. Esquema elétrico	379
03. Código Fonte.....	380
15.Display Gráfico 2	382
01. Introdução	382
02. Esquema elétrico	383
03. Código Fonte.....	383
16.Display Gráfico com Touch.....	386
01. Introdução	386
02. Esquema elétrico	392
03. Código Fonte.....	393

17.Transmissão Serial RS232	398
01. Introdução	398
02. Esquema elétrico	403
03. Código Fonte.....	404
18.Recepção Serial RS232	406
01. Introdução	406
02. Esquema elétrico	407
03. Código Fonte.....	407
19.TX e RX na USB	409
01. Introdução	409
02. O PIC18F4550	410
03. O Hardware	412
04. Fluxograma	413
05. Funções do mikroC	415
06. Configuração do arquivo descritor	417
07. Esquema elétrico	419
08. Código Fonte.....	421
09. Conectando ao PC	426
20.Conversor AD	430
01. Introdução	430
02. Esquema elétrico	441

03. Código Fonte.....	441
21. Voltímetro.....	444
01. Introdução	444
02. Esquema elétrico	446
03. Código Fonte.....	447
22. DFT no Microcontrolador.....	449
01. Análise no tempo e frequência	449
02. Frequência de Nyquist.....	453
03. DFT - Transformada de Fourier Discreta	454
04. Análise de frequência	460
05. Esforço computacional	462
06. Hardware de testes	464
07. Esquema elétrico	468
08. Fluxograma simplificado.....	469
09. Código fonte	470
23. DFT no PC via RS232	473
01. Introdução	473
02. Esquema elétrico	474
03. Fluxograma no PIC.....	475
04. Código Fonte do PIC	476

05. Fluxograma do PC.....	478
06. Código Fonte em Delphi	479
24.DFT no PC via USB	491
01. Introdução	491
02. Esquema elétrico	492
03. Fluxograma no PIC.....	493
04. Código Fonte do PIC	494
05. Fluxograma do PC.....	496
06. Código fonte em Delphi.....	497
25.Detecção de diferença de fase por DFT	500
01. Introdução	500
02. Onda senoidal.....	500
03. Método de detecção por DFT.....	504
04. Amostragem	505
05. Transformada Discreta de Fourier (DFT)	505
06. Encontrando o ângulo por DFT.....	511
07. Desenvolvendo a interface gráfica	512
08. Algoritmo do programa	513
09. Fonte do programa.....	515
10. Simulações de diferença de fase	519

26.FFT	524
01. Transformada Rápida de Fourier (FFT).....	524
02. DFT de Números Reais.....	527
03. DFT de Números Complexos	528
04. Transformada Inversa Rápida de Fourier (IFFT)	529
05. Decimação no tempo	531
06. Radix	537
07. Butterfly.....	538
08. Função FFT em Pascal.....	541
09. Simulação DFTxFFT	546
27.FFT no Microcontrolador	553
01. Introdução	553
02. Função FFT em C.....	554
03. Fluxograma Simplificado	558
04. Código Fonte.....	559
28.FFT no PC via RS232	565
01. Introdução	565
02. Fluxograma do PIC.....	565
03. Código Fonte do PIC	567
04. Fluxograma do PC.....	569
05. Código Fonte em Delphi	570

29.FFT no PC via USB	573
01. Introdução	573
02. Fluxograma do PC.....	574
03. Código fonte em Delphi.....	575
Apêndice I - Esquema Elétrico.....	577
Referências	581

Capítulo I

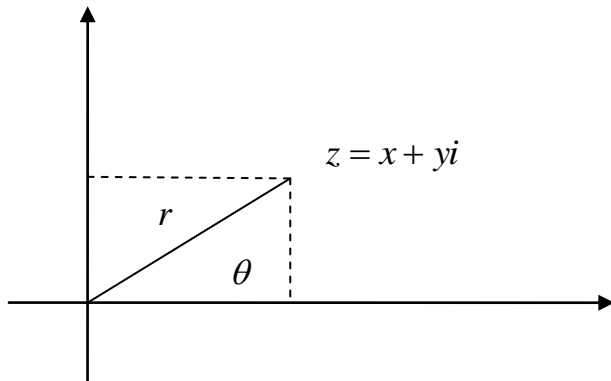
Revisão de Números Complexos

1. Introdução

Os números complexos surgiram com a necessidade de se obter raízes para números negativos onde estes não possuem solução no campo dos \mathfrak{R} (reais). Os números complexos são representados pela letra \mathbb{C} . Um número complexo é representado da seguinte forma:

$$z = a + bi \text{ ou } z = x + yi$$

Onde a ou x é a parte real enquanto que bi ou yi é a parte imaginária do número complexo z . Uma regra importante para o estudo dos números complexos é saber que $i^2 = -1$. Tal condição será usada em breve nos exercícios futuros. A representação de um plano complexo pode ser dada da seguinte forma:



Onde representaremos x como a parte Real dos complexos, como apresentado a seguir:

$$x = \text{Re}(z)$$

O valor de y será a parte imaginária, como exposto abaixo:

$$y = \text{Im}(z)$$

O ângulo θ formado no plano complexo será chamado de argumento do complexo, representado da seguinte forma:

$$\theta = \arg(z)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Onde θ é medido em radianos e é determinado por múltiplos de 2π e o mesmo não é definido para o ponto $z = 0 + 0i$. O módulo ou valor absoluto, ou seja, a distância entre a origem e o ponto formado pelo número complexo será representado pela letra r e será dado por:

$$r = |z|$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Observe os dois números complexos abaixo:

$$z = x + yi$$

$$w = r + ti$$

Dois números complexos são iguais se e somente se a parte real e imaginária entre os mesmos forem iguais, ou seja, $x = r$ e $y = t$.

1.1 Exercícios

1) Dados os números complexos abaixo, diga quais que possuem apenas parte real, parte imaginária ou ambos.

a) $z = 10 + 5i$

Resp: $\operatorname{Re}(z) = 10$ $\operatorname{Im}(z) = 5$

b) $z = 1$

Resp: $\operatorname{Re}(z) = 1$ $\operatorname{Im}(z) = 0$

c) $z = -2i$

Resp: $\operatorname{Re}(z) = 0$ $\operatorname{Im}(z) = -2$

d) $z = -3 + 6i$

Resp: $\operatorname{Re}(z) = -3$ $\operatorname{Im}(z) = 6$

e) $z = 2 + 2i$

Resp: $\operatorname{Re}(z) = 2$ $\operatorname{Im}(z) = 2$

2. Propriedades dos Números Complexos

As seguintes propriedades são válidas nos números complexos:

$$i) z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$ii) z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

$$iii) z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

$$iv) z_1(z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$$

$$v) z_1(z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

$$vi) z \cdot 1 = z$$

$$vii) z + 0 = z$$

$$viii) z \cdot 0 = 0$$

Se um número complexo é escrito apenas com a parte imaginária, é chamado de imaginário puro, como apresentado a seguir:

$$z = 0 + 1i$$

$$z = i$$

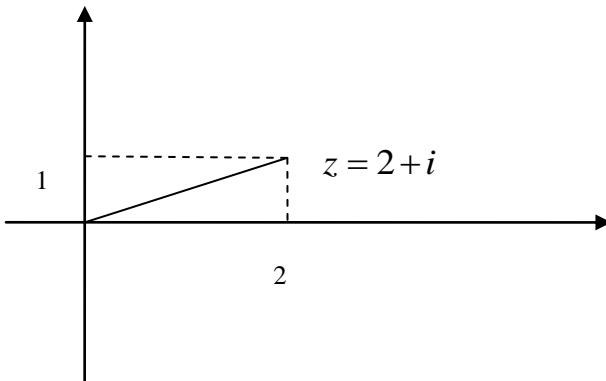
Podemos representar o conjunto dos números complexos da seguinte forma:

$$C = \{z = x + yi / x \in \mathfrak{R}, y \in \mathfrak{R}\}$$

Onde $\mathfrak{R} \subset C$, ou seja, o campo dos números reais está contido no campo dos números complexos.

2.1 Exercícios

1) Represente o número $z = 2 + i$ no plano complexo e encontre o seu argumento e seu módulo.



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{2^2 + 1^2}$$

$$r = \sqrt{5}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\theta = 26,56^\circ$$

$$\theta = 26,56^\circ \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$\theta = \frac{26,56\pi}{180} = \frac{13,28\pi}{90} = \frac{6,64\pi}{45} \text{ rad}$$

3. Conjugado de um Número Complexo

Um número complexo z terá seu conjugado quando o elemento bi tiver o sinal invertido. Ou seja, se $z = a + bi$ o conjugado de z será $\bar{z} = a - bi$. Observe que o conjugado de um complexo é representado por uma barra superior do complexo z .

3.1 Exercícios

1) Dê o conjugado dos complexos abaixo relacionados.

a) $z = 1 + 5i$

Resp: $\bar{z} = 1 - 5i$

b) $z = -9 - 20i$

Resp: $\bar{z} = -9 + 20i$

c) $z = -2i$

Resp: $\bar{z} = 2i$

d) $z = -3$

Resp: $\bar{z} = -3$

4. Adição de Complexos

A adição de números complexos é feita de maneira bem fácil, bastando somar os elementos da parte real e imaginária. Observe o exemplo apresentado a seguir:

Dados $z_1 = -9 - 20i$ e $z_2 = 10 + 30i$ faça a adição destes números complexos.

$$z_1 + z_2 = (-9 - 20i) + (10 + 30i)$$

$$z_1 + z_2 = -9 + 10 - 20i + 30i$$

$$z_1 + z_2 = 1 + 10i$$

4.1 Exercícios

1) Faça as somas dos complexos apresentados a seguir.

a) $z_1 = 1 + 5i$ e $z_2 = 2 + 3i$

Resp: $z_1 + z_2 = 3 + 8i$

b) $z_1 = 10$ e $z_2 = -5 + 5i$

Resp: $z_1 + z_2 = 5 + 5i$

c) $z_1 = -2i$ e $z_2 = 1 + 3i$

Resp: $z_1 + z_2 = 1 + i$

d) $z_1 = 2$ e $z_2 = 6i$

Resp: $z_1 + z_2 = 2 + 6i$

5. Subtração de Complexos

A subtração de complexos é feita praticamente da mesma forma que a soma de complexos. Observe abaixo um exemplo elucidativo.

a) Dados $z_1 = 10 + 10i$ e $z_2 = 5 + 3i$ faça a subtração destes números complexos.

$$z_1 - z_2 = (10 + 10i) - (5 + 3i)$$

$$z_1 - z_2 = 10 + 10i - 5 - 3i$$

$$z_1 - z_2 = 5 + 7i$$

5.1 Exercícios

1) Faça as subtrações dos complexos apresentados a seguir.

a) $z_1 = 1 + 5i$ e $z_2 = 2 + 3i$

Resp: $z_1 - z_2 = -1 + 2i$

b) $z_1 = 10$ e $z_2 = -5 + 5i$

Resp: $z_1 - z_2 = 15 - 5i$

c) $z_1 = -2i$ e $z_2 = 1 + 3i$

Resp: $z_1 - z_2 = -1 - 5i$

d) $z_1 = 2$ e $z_2 = 6i$

Resp: $z_1 - z_2 = 2 - 6i$

6. Multiplicação de Complexos

Para multiplicarmos dois números complexos, deveremos usar a regra dos produtos notáveis, lembrando sempre que $i^2 = -1$.

Observe o passo a passo do exemplo a seguir de forma a ficar mais claro tal conceito.

a) Dados $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 4 + 5i$ faça a multiplicação destes números complexos.

$$z_1 * z_2 = (2 + 3i) * (4 + 5i)$$

$$z_1 * z_2 = 2 * 4 + 2 * 5i + 3i * 4 + 3i * 5i$$

$$z_1 * z_2 = 8 + 10i + 12i + 15i^2$$

Como $i^2 = -1$ teremos:

$$z_1 * z_2 = 8 + 22i + 15 * -1$$

$$z_1 * z_2 = 8 + 22i - 15$$

$$z_1 * z_2 = -7 + 22i$$

6.1 Exercícios

1) Faça as multiplicações dos complexos apresentados a seguir.

a) $z_1 = 1 + 5i$ e $z_2 = 2 + 3i$

Resp: $z_1 * z_2 = (1 + 5i) * (2 + 3i)$

$$z_1 * z_2 = 2 + 3i + 10i + 15i^2$$

$$z_1 * z_2 = 2 + 13i - 15$$

$$z_1 * z_2 = -13 + 13i$$

b) $z_1 = 10$ e $z_2 = -5 + 5i$

Resp: $z_1 * z_2 = 10 * (-5 + 5i)$

$$z_1 * z_2 = -50 + 50i$$

c) $z_1 = -2i$ e $z_2 = 1 + 3i$

Resp: $z_1 * z_2 = (-2i) * (1 + 3i)$

$$z_1 * z_2 = -2i - 6i^2$$

$$z_1 * z_2 = 6 - 2i$$

d) $z_1 = 2$ e $z_2 = 6i$

Resp: $z_1 * z_2 = 2 * 6i$

$$z_1 * z_2 = 12i$$

7. Divisão de Complexos

A divisão de números complexos é feita dividindo o numerador pelo denominador e pelo conjugado do denominador tanto no numerador quanto no denominador. Observe o exemplo a seguir.

a) Dados $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 4i$ faça a divisão destes números complexos.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{(3 + 2i)(-4i)}{(4i)(-4i)} = \frac{-12i - 8i^2}{-16i^2} = \frac{-12i - 8(-1)}{-16(-1)} = \frac{-12i + 8}{16} = \frac{8 - 12i}{16}$$

$$\text{Logo, } \frac{z_1}{z_2} = \frac{8 - 12i}{16} = \frac{8}{16} - \frac{12}{16}i = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}i$$

7.1 Exercícios

1) Faça as divisões dos complexos apresentados a seguir.

a) $z_1 = 1 + 5i$ e $z_2 = 2 + 3i$

$$\text{Resp: } \frac{z_1}{z_2} = \frac{\overline{z_1 z_2}}{z_2 z_2} = \frac{(1+5i)^* (2-3i)}{(2+3i)^* (2-3i)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i+10i-15i^2}{4-6i+6i-9i^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+7i-15(-1)}{4-9(-1)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+7i+15}{4+9}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{17+7i}{13}$$

b) $z_1 = 10e$ $z_2 = -5 + 5i$

$$\text{Resp: } \frac{z_1}{z_2} = \frac{\overline{z_1 z_2}}{z_2 z_2} = \frac{(10)^* (-5-5i)}{(-5+5i)^* (-5-5i)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-50-50i}{25+25i-25i-25i^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-50-50i}{25-25(-1)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-50-50i}{50} = -1-i$$

c) $z_1 = -2i$ e $z_2 = 1 + 3i$

$$\text{Resp: } \frac{z_1}{z_2} = \frac{\overline{z_1 z_2}}{z_2 z_2} = \frac{(-2i) * (1 - 3i)}{(1 + 3i) * (1 - 3i)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2i + 6i^2}{1 - 3i + 3i - 9i^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2i + 6(-1)}{1 - 9(-1)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2i - 6}{1 + 9}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-6 - 2i}{10}$$

d) $z_1 = 2$ e $z_2 = 6i$

$$\text{Resp: } \frac{z_1}{z_2} = \frac{\overline{z_1 z_2}}{z_2 z_2} = \frac{(2) * (-6i)}{(6i) * (-6i)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-12i}{-36i^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-12i}{-36(-1)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-12i}{36} = \frac{-i}{3}$$

8. Potências de Unidades Imaginárias

As unidades imaginárias podem ter uma variedade imensa de expoentes, porém veremos que a partir do expoente 4 o mesmo passa a se repetir , ficando assim fácil trabalhar com tais potências. Observe os exemplos apresentados a seguir:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

$$i^5 = i$$

$$i^6 = -1$$

$$i^7 = -i$$

$$i^8 = 1$$

$$i^9 = i$$

$$i^{10} = -1$$

$$i^{11} = -i$$

Observe que conforme falado, a partir do expoente 4 os resultados ficam exatamente iguais a da primeira coluna apresentada. Agora, digamos que seja encontrado o resultado abaixo:

$$i^{49103} = ?$$

O que devemos fazer é dividir o expoente por 4 e o resto da divisão encontrado será o equivalente da potência do número complexo. Como 49103 dividido por 4 dá resto 3, temos a seguinte equivalência:

$$i^{49103} = i^3$$

Como sabemos que i^3 é igual a $-i$, sabemos que a resposta procurada é esta, logo:

$$i^{49103} = -i$$

8.1 Exercícios

1) Encontre o resultado das potências a seguir:

a) i^{100} Resp: 1

b) i^{124698} Resp: -1

c) $i^{6984151}$ Resp: -i

d) i^{779} Resp: -i

e) $i^{1234567}$ Resp: -i

f) i^{2036} Resp: 1

g) i^{366} Resp: -1

h) i^{10000} Resp: 1

9. Polinômios de Complexos

Podemos representar um complexo de forma de polinômio, como o exemplo apresentado a seguir:

$$p(z) = z^2 - 4z + 13$$

Agora encontremos $p(z)$ para $z = 2 + 3i$:

$$p(2 + 3i) = (2 + 3i)^2 - 4(2 + 3i) + 13$$

$$p(2 + 3i) = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + 9i^2 - 8 - 12i + 13$$

$$p(2 + 3i) = 4 + 12i + 9(-1) - 8 - 12i + 13$$

$$p(2 + 3i) = 4 + 12i - 9 - 8 - 12i + 13$$

$$p(2 + 3i) = 0$$

Logo, podemos perceber que $z = 2 + 3i$ é uma das raízes do polinômio $p(z) = z^2 - 4z + 13$.

Podemos também encontrar as raízes de um polinômio. Por exemplo, quais seriam as raízes do polinômio abaixo:

$$p(z) = z^2 + 2iz - 5$$

A solução segue a mesma da equação do segundo grau convencional, precisando inicialmente achar o Δ e em seguida as raízes, observe:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)$$

$$\Delta = 4i^2 + 20$$

$$\Delta = 4(-1) + 20$$

$$\Delta = -4 + 20$$

$$\Delta = 16$$

Agora podemos encontrar as raízes, como apresentado a seguir:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z = \frac{-2i \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}$$

$$z = \frac{-2i \pm 4}{2}$$

$$z' = \frac{-2i + 4}{2} = -i + 2$$

$$z'' = \frac{-2i - 4}{2} = -i - 2$$

Logo as raízes do polinômio $p(z) = z^2 + 2iz - 5$ são $-i + 2$ e $-i - 2$.

9.1 Exercícios

1) Encontre as raízes dos polinômios a seguir:

a) $z^3 + 1 = 0$

Resp: $z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1) = 0$

$$z + 1 = 0$$

$$z = -1$$

Que é uma das raízes.

$$z^2 - z + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\Delta = 1 - 4$$

$$\Delta = -3 = 3i^2$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z = \frac{-(-1) \pm \sqrt{3i^2}}{2 \cdot 1}$$

$$z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$z' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$z'' = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Logo, as raízes serão dadas por:

$$S = \left\{ \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, -1 \right\}$$

b) $z + \frac{1}{z} = 0$

Resp: $z + \frac{1}{z} = z^2 + 1 = 0$

$$z^2 + 1 = 0$$

$$z^2 = -1$$

$$z^2 = i^2$$

$$z = \sqrt{i^2}$$

$$z = \pm i$$

Logo, as raízes serão dadas por:

$$S = \{i, -i\}$$

c) $z^5 - z = 0$

Resp: $z^5 - z = z(z^4 - 1) = 0$

$z = 0$, é uma das raízes.

$$z^4 - 1 = (z^2 + 1)(z^2 - 1) = 0$$

$$z^2 + 1 = 0$$

$$z^2 = -1$$

$$z^2 = i^2$$

$$z = \sqrt{i^2}$$

$z = \pm i$, são raízes.

$$z^2 - 1 = 0$$

$$z^2 = 1$$

$$z = \sqrt{1}$$

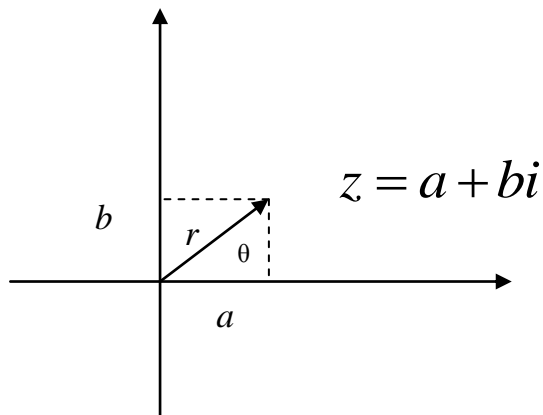
$z = \pm 1$, são raízes.

Logo, as raízes serão dadas por:

$$S = \{0, 1, -1, i, -i\}$$

10. Forma Polar de um Número Complexo

Um número complexo também pode ser representado na forma polar. Neste caso, a parte real é representada no eixo x e a parte imaginária no eixo y, observe abaixo:



Onde a é a parte real e b a imaginária. O valor de θ determina o ângulo entre a parte real e imaginária e r é o módulo, que é dado da seguinte forma:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

A forma polar é assim definida da forma apresentada a seguir:

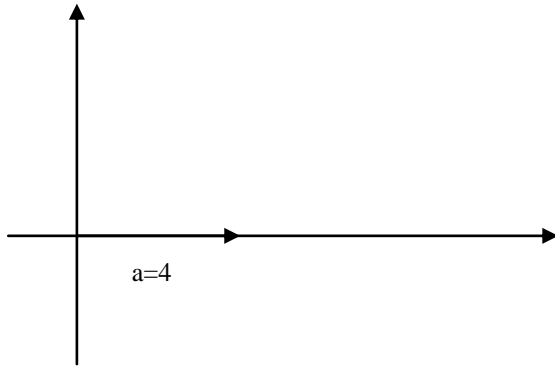
$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Onde θ é o ângulo formado entre a e b dado em radianos e r é o módulo de z . Vejamos alguns exemplos apresentados a seguir para ficar claro o que foi abordado.

10.1 Exercícios

a) Determine a forma polar do complexo $z = 4$ e represente-o graficamente.

Resp: Neste caso onde há apenas a parte real, o gráfico ficaria da seguinte forma:



Inicialmente, vamos encontrar o valor de r , ou seja, o módulo da seguinte forma:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$r = |z| = \sqrt{4^2 + 0^2}$$

$$r = |z| = \sqrt{4^2}$$

$$r = |z| = 4$$

Podemos observar que o ângulo θ é zero, já que não há parte imaginária. Sendo assim, nossa representação na forma polar fica da seguinte forma:

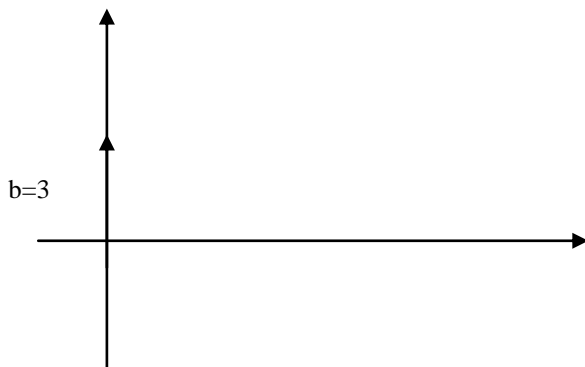
$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$z = 4(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$$

b) Determine a forma polar do complexo apresentado a seguir, represente graficamente.

$$z = 3i$$

Resp: Como a parte real é nula, temos neste caso apenas a parte imaginária, onde nosso gráfico ficará da seguinte forma:



Vamos encontrar o valor de r , ou seja, o módulo da seguinte forma:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$r = |z| = \sqrt{0^2 + 3^2}$$

$$r = |z| = \sqrt{3^2}$$

$$r = |z| = 3$$

Podemos observar que o ângulo θ é 90° . Para convertermos graus para radianos, devemos multiplicar por $\frac{\pi}{180}$, sendo assim,

90° equivale a $\frac{\pi}{2}$ radianos. Nossa representação na forma polar

fica da seguinte forma:

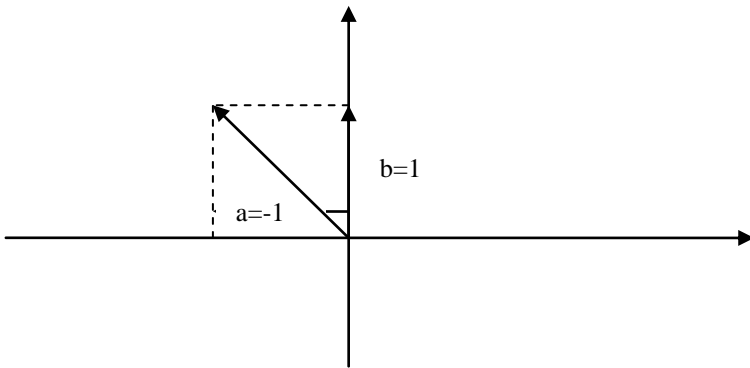
$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$z = 3\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right)$$

c) Determine a forma polar do complexo apresentado a seguir, represente graficamente.

$$z = -1 + i$$

Resp: Neste exemplo temos tanto a parte real quanto imaginária, sendo assim o gráfico fica da seguinte forma:



Vamos encontrar o valor de r , ou seja, o módulo da seguinte forma:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$r = |z| = \sqrt{-1^2 + 1^2}$$

$$r = |z| = \sqrt{2}$$

Agora podemos encontrar o ângulo θ da seguinte forma:

$$\cos \theta = \frac{C}{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$$

Porém como estamos no segundo quadrante, devemos considerar os 90° deste quadrante, ficando assim com o ângulo θ de $90+45=135^\circ$. Agora devemos converter para radianos, da forma apresentada a seguir:

$$135 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

Como temos o ângulo θ em radianos e o módulo, podemos escrever agora a forma polar do número, como apresentado a seguir:

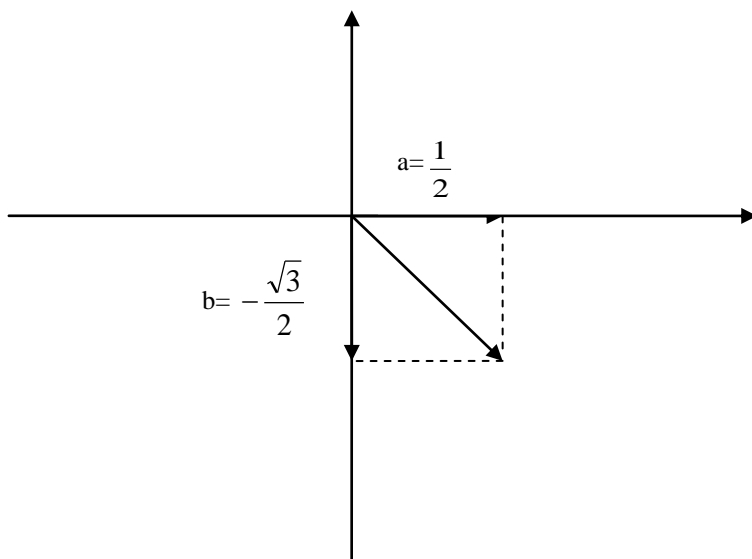
$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right)$$

d) Determine a forma polar do complexo apresentado a seguir, represente graficamente.

$$z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Resp: Neste exemplo temos tanto a parte real quanto imaginária, sendo assim o gráfico fica da seguinte forma:



Vamos encontrar o valor de r , ou seja, o módulo da seguinte forma:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$r = |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$r = |z| = 1$$

Agora podemos encontrar o ângulo θ da seguinte forma:

$$\cos \theta = \frac{C}{H} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ$$

Desta forma o ângulo será de 300° já que o círculo por completo possui 360° . Abaixo podemos ver a conversão para radianos:

$$300 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$$

De posse do módulo e do ângulo em radianos, podemos agora colocar na forma polar, como apresentado a seguir:

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$z = 1\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3}\right)$$

Algumas propriedades decorrentes da forma polar são as apresentadas abaixo:

$$i) |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$ii) \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$iii) \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ com } z_2 \neq 0$$

$$iv) \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

$$v) |z| = |\bar{z}|$$

$$vi) \arg(\bar{z}) = -\arg(z)$$

$$vii) \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$viii) \frac{\overline{z_1}}{z_2} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

11. Fórmula de DeMoivre

Através desta fórmula, podemos calcular facilmente a potência de um número complexo na forma polar. Observe a fórmula genérica apresentada abaixo:

$$z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$$

Vejamos alguns exemplos apresentados a seguir de forma a elucidar o conceito apresentado.

11.1 Exercícios

a) Sendo $z = 1 + i$, calcule z^4 .

Resp: O primeiro passo é colocar na forma polar, como apresentado a seguir, onde primeiramente é encontrado o módulo e em seguida o argumento.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$r = \sqrt{2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right)$$

$$\theta = 45^\circ$$

$$\theta = 45^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$$

A forma polar ficará da seguinte forma:

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4})$$

Aplicando DeMoivre, obteremos o seguinte valor de z^4 :

$$z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$$

$$z^4 = \sqrt{2}^4 (\cos(4 \frac{\pi}{4}) + i \operatorname{sen}(4 \frac{\pi}{4}))$$

$$z^4 = 2^2 (\cos(\pi) + i \operatorname{sen}(\pi))$$

$$z^4 = 4(\cos(\pi)), \text{ já que } i \operatorname{sen}(\pi) = 0.$$

12. Raízes de um número complexo

O objetivo é que possamos encontrar as raízes de um número complexo, onde este deverá estar disponível na forma polar. Observe a forma genérica apresentada abaixo:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} (\cos(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}) + i \operatorname{sen}(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}))$$