Vitor Amadeu Souza

Implementando uma

FFT no PIC

Transformada Rápida de Fourier

Baseado no PIC18F4550 e mikroC

Dezembro de 2012

Produção: *Cerne Tecnologia e Treinamento*

E-mail da Empresa: *cerne@cerne-tec.com.br*

Home Page: *www.cerne-tec.com.br.com.br*

Atendimento ao Consumidor: *sac@cerne-tec.com.br*

Contato com o Autor: *vitor@cerne-tec.com.br*

Dedicatória

Como nos meus outros livros, dedico este livro a minha querida esposa Renata Leal.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Pablo Batista por ter ministrado a disciplina Processamento Digital de Sinais que me possibilitou entender a implementação deste algoritmo.

“Ajuda o teu semelhante a levantar a carga, mas não a levá-la.”

Pitágoras

Kits Didáticos e Gravadores da Cerne Tecnologia

A Cerne tecnologia têm uma linha completa de aprendizado para os microcontroladores da família PIC, 8051, Holtek, dsPIC, ARM e etc. Veja os detalhes de cada um nas figuras abaixo:

Kit Cerne DFT - FFT

- Microcontrolador PIC18F4550
- Comunicação serial
- Comunicação USB
- Saída para Display Gráfico
- Botões
- Leds
- Gravação ICSP

Uma linha completa de componentes para o desenvolvimento de seus projetos eletrônicos como displays, PICs, botões, leds, cristais e etc.

Visite a nossa página na Internet, no endereço www.cerne-tec.com.br e conheça melhor nossos serviços e produtos.

Cerne
Conhecimento para o Desenvolvimento

www.cerne-tec.com.br

Sumário

Capítulo I

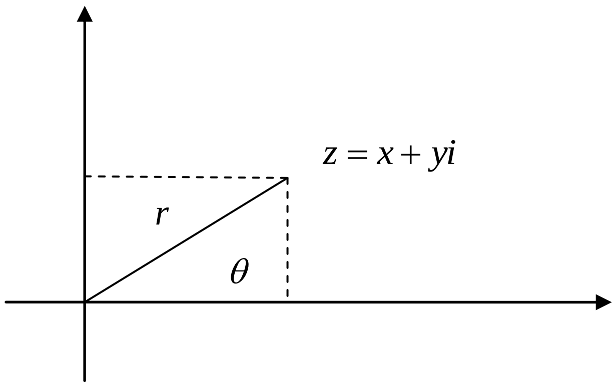
Revisão de Números Complexos

1. Introdução

Os números complexos surgiram com a necessidade de se obter raízes para números negativos onde estes não possuem solução no campo dos $\Re$ (reais). Os números complexos são representados pela letra $\mathbb{C}$. Um número complexo é representado da seguinte forma:

$$z = a + bi \text{ ou } z = x + yi$$

Onde a ou x é a parte real enquanto que bi ou yi é a parte imaginária do número complexo z. Um regra importante para o estudo dos números complexos é saber que $i^2 = -1$. Tal condição será usada em breve nos exercícios futuros. A representação de um plano complexo pode ser dada da seguinte forma:



Onde representaremos x como a parte Real dos complexos, como apresentado a seguir:

$$x = \mathrm{Re}(z)$$

O valor de y será a parte imaginária, como exposto abaixo:

$$y = \mathrm{Im}(z)$$

O ângulo θ formado no plano complexo será chamado de argumento do complexo, representado da seguinte forma:

$$\theta = \arg(z)$$

$$\theta = \arctan(\frac{y}{x})$$

Onde θ é medido em radianos e é determinado por múltiplos de 2π e o mesmo não é definido para o ponto $z = 0 + 0i$. O módulo ou valor absoluto, ou seja, a distância entre a origem e o ponto formado pelo número complexo será representado pela letra r e será dado por:

$$r = |z|$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Observe os dois números complexos abaixo:

$$z = x + yi$$

$$w = r + ti$$

Dois números complexos são iguais se e somente se a parte real e imaginária entre os mesmos forem iguais, ou seja, $x = r$ e $y = t$.

1.1 Exercícios

1) Dados os números complexos abaixo, diga quais que possuem apenas parte real, parte imaginária ou ambos.

a) $z = 10 + 5i$

Resp: $\mathrm{Re}(z) = 10 \quad \mathrm{Im}(z) = 5$

b) $z = 1$

Resp: $\mathrm{Re}(z) = 1 \quad \mathrm{Im}(z) = 0$

c) $z = -2i$

Resp: $\mathrm{Re}(z) = 0 \quad \mathrm{Im}(z) = -2$

d) $z = -3 + 6i$

Resp: $\mathrm{Re}(z) = -3 \quad \mathrm{Im}(z) = 6$

e) $z = 2 + 2i$

Resp: $\mathrm{Re}(z) = 2 \quad \mathrm{Im}(z) = 2$

2. Propriedades dos Números Complexos

As seguintes propriedades são válidas nos números complexos:

$i) z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

$ii) z_1.z_2 = z_2.z_1$

$iii) z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

$iv) z_1(z_2.z_3) = (z_1.z_2).z_3$

$v) z_1(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3$

$vi) z.1 = z$

$vii) z + 0 = z$

$viii) z.0 = 0$

Se um número complexo é escrito apenas com a parte imaginária, é chamado de imaginário puro, como apresentado a seguir:

$$z = 0 + 1i$$
$$z = i$$

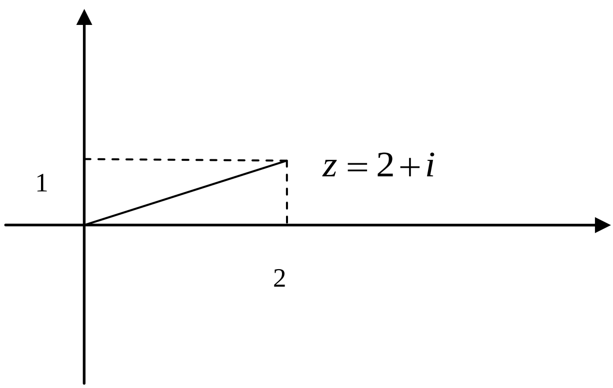
Podemos representar o conjunto dos números complexos da seguinte forma:

$$C = \{z = x + yi \,/\, x \in \Re, y \in \Re\}$$

Onde $\Re \subset C$, ou seja, o campo dos números reais está contido no campo dos números complexos.

2.1 Exercícios

1) Represente o número $z = 2 + i$ no plano complexo e encontre o seu argumento e seu módulo.



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{2^2 + 1^2}$$

$$r = \sqrt{5}$$

$$\theta = \arctan(\frac{y}{x})$$

$$\theta = \arctan(\frac{1}{2})$$

$$\theta = 26{,}56^{o}$$

$$\theta = 26{,}56^{o}.\frac{\pi}{180}$$

$$\theta = \frac{26{,}56\pi}{180} = \frac{13{,}28\pi}{90} = \frac{6{,}64\pi}{45} rad$$

3. Conjugado de um Número Complexo

Um número complexo z terá seu conjugado quando o elemento bi tiver o sinal invertido. Ou seja, se $z = a + bi$ o conjugado de z será $\bar{z} = a - bi$. Observe que o conjugado de um complexo é representado por uma barra superior do complexo z.

3.1 Exercícios

1) Dê o conjugado dos complexos abaixo relacionados.

a) $z = 1 + 5i$

Resp: $\bar{z} = 1 - 5i$

b) $z = -9 - 20i$

Resp: $\bar{z} = -9 + 20i$

c) $z = -2i$

Resp: $\bar{z} = 2i$

d) $z = -3$

Resp: $\bar{z} = -3$

4. Adição de Complexos

A adição de números complexos é feita de maneira bem fácil, bastando somar os elementos da parte real e imaginária. Observe o exemplo apresentado a seguir:

Dados $z_1 = -9 - 20i$ e $z_2 = 10 + 30i$ faça a adição destes números complexos.

$$z_1 + z_2 = (-9 - 20i) + (10 + 30i)$$

$$z_1 + z_2 = -9 + 10 - 20i + 30i$$

$$z_1 + z_2 = 1 + 10i$$

4.1 Exercícios

1) Faça as somas dos complexos apresentados a seguir.

a) $z_1 = 1 + 5i$ e $z_2 = 2 + 3i$

Resp: $z_1 + z_2 = 3 + 8i$

b) $z_1 = 10$ e $z_2 = -5 + 5i$

Resp: $z_1 + z_2 = 5 + 5i$

c) $z_1 = -2i$ e $z_2 = 1 + 3i$

Resp: $z_1 + z_2 = 1 + i$

d) $z_1 = 2$ e $z_2 = 6i$

Resp: $z_1 + z_2 = 2 + 6i$

5. Subtração de Complexos

A subtração de complexos é feita praticamente da mesma forma que a soma de complexos. Observe abaixo um exemplo elucidativo.

a)Dados $z_1 = 10 + 10i$ e $z_2 = 5 + 3i$ faça a subtração destes números complexos.

$$z_1 - z_2 = (10 + 10i) - (5 + 3i)$$

$$z_1 + z_2 = 10 + 10i - 5 - 3i$$

$$z_1 + z_2 = 5 + 7i$$

5.1 Exercícios

1) Faça as subtrações dos complexos apresentados a seguir.

a) $z_1 = 1 + 5i$ e $z_2 = 2 + 3i$

Resp: $z_1 - z_2 = -1 + 2i$

b) $z_1 = 10$ e $z_2 = -5 + 5i$

Resp: $z_1 - z_2 = 15 - 5i$

c) $z_1 = -2i$ e $z_2 = 1 + 3i$

Resp: $z_1 - z_2 = -1 - 5i$

d) $z_1 = 2$ e $z_2 = 6i$

Resp: $z_1 - z_2 = 2 - 6i$

6. Multiplicação de Complexos

Para multiplicarmos dois números complexos, deveremos usar a regra dos produtos notáveis, lembrando sempre que $i^2 = -1$.

Observe o passo a passo do exemplo a seguir de forma a ficar mais claro tal conceito.

a)Dados $z_1 = 2+3i$ e $z_2 = 4+5i$ faça a multiplicação destes números complexos.

$$z_1 * z_2 = (2+3i)*(4+5i)$$

$$z_1 * z_2 = 2*4+2*5i+3i*4+3i*5i$$

$$z_1 * z_2 = 8+10i+12i+15i^2$$

Como $i^2 = -1$ teremos:

$$z_1 * z_2 = 8+22i+15*-1$$

$$z_1 * z_2 = 8+22i-15$$

$$z_1 * z_2 = -7+22i$$

6.1 Exercícios

1) Faça as multiplicações dos complexos apresentados a seguir.

a) $z_1 = 1+5i$ e $z_2 = 2+3i$

Resp: $z_1 * z_2 = (1+5i)*(2+3i)$

$z_1 * z_2 = 2 + 3i + 10i + 15i^2$

$z_1 * z_2 = 2 + 13i - 15$

$z_1 * z_2 = -13 + 13i$

b) $z_1 = 10$ e $z_2 = -5 + 5i$

Resp: $z_1 * z_2 = 10 * (-5 + 5i)$

$z_1 * z_2 = -50 + 50i$

c) $z_1 = -2i$ e $z_2 = 1 + 3i$

Resp: $z_1 * z_2 = (-2i) * (1 + 3i)$

$z_1 * z_2 = -2i - 6i^2$

$z_1 * z_2 = 6 - 2i$

d) $z_1 = 2$ e $z_2 = 6i$

Resp: $z_1 * z_2 = 2 * 6i$

$z_1 * z_2 = 12i$

7. Divisão de Complexos

A divisão de números complexos é feita dividindo o numerador pelo denominador e pelo conjugado do denominador tanto no numerador quanto no denominador. Observe o exemplo a seguir.

a) Dados $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 4i$ faça a divisão destes números complexos.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{(3+2i)(-4i)}{(4i)(-4i)} = \frac{-12i - 8i^2}{-16i^2} = \frac{-12i - 8(-1)}{-16(-1)} = \frac{-12i + 8}{16} = \frac{8 - 12i}{16}$$

Logo, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{8-12i}{16} = \frac{8}{16} - \frac{12}{16}i = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}i$

7.1 Exercícios

1) Faça as divisões dos complexos apresentados a seguir.

a) $z_1 = 1 + 5i$ e $z_2 = 2 + 3i$

Resp: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{(1+5i)*(2-3i)}{(2+3i)*(2-3i)}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i+10i-15i^2}{4-6i+6i-9i^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+7i-15(-1)}{4-9(-1)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+7i+15}{4+9}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{17+7i}{13}$$

b) $z_1 = 10$ e $z_2 = -5+5i$

Resp: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{(10)*(-5-5i)}{(-5+5i)*(-5-5i)}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-50-50i}{25+25i-25i-25i^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-50-50i}{25-25(-1)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-50-50i}{50} = -1-i$$

c) $z_1 = -2i$ e $z_2 = 1+3i$

Resp: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{(-2i)*(1-3i)}{(1+3i)*(1-3i)}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2i + 6i^2}{1 - 3i + 3i - 9i^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2i + 6(-1)}{1 - 9(-1)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2i - 6}{1 + 9}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-6 - 2i}{10}$$

d) $z_1 = 2$ e $z_2 = 6i$

Resp: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{(2)*(-6i)}{(6i)*(-6i)}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-12i}{-36i^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-12i}{-36(-1)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-12i}{36} = \frac{-i}{3}$$

8. Potências de Unidades Imaginárias

As unidades imaginárias podem ter uma variedade imensa de expoentes, porém veremos que a partir do expoente 4 o mesmo passa a se repetir , ficando assim fácil trabalhar com tais potências. Observe os exemplos apresentados a seguir:

$i^0 = 1$	$i^4 = 1$	$i^8 = 1$
$i^1 = i$	$i^5 = i$	$i^9 = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	$i^{10} = -1$
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$	$i^{11} = -i$

Observe que conforme falado, a partir do expoente 4 os resultados ficam exatamente iguais a da primeira coluna apresentada. Agora, digamos que seja encontrado o resultado abaixo:

$$i^{49103} = ?$$

O que devemos fazer é dividir o expoente por 4 e o resto da divisão encontrado será o equivalente da potência do número complexo. Como 49103 dividido por 4 dá resto 3, temos a seguinte equivalência:

$$i^{49103} = i^3$$

Como sabemos que i^3 é igual a -i, sabemos que a resposta procurada é esta, logo:

$$i^{49103} = -i$$

8.1 Exercícios

1) Encontre o resultado das potências a seguir:

a) i^{100} Resp: 1

b) i^{124698} Resp: -1

c) $i^{6984151}$ Resp: -i

d) i^{779} Resp: -i

e) $i^{1234567}$ Resp: -i

f) i^{2036} Resp: 1

g) i^{366} Resp: -1

h) i^{10000} Resp: 1

9. Polinômios de Complexos

Podemos representar um complexo de forma de polinômio, como o exemplo apresentado a seguir:

$$p(z) = z^2 - 4z + 13$$

Agora encontremos $p(z)$ para $z = 2 + 3i$:

$$p(2+3i) = (2+3i)^2 - 4(2+3i) + 13$$

$$p(2+3i) = 2^2 + 2.2.3i + 9i^2 - 8 - 12i + 13$$

$$p(2+3i) = 4 + 12i + 9(-1) - 8 - 12i + 13$$

$$p(2+3i) = 4 + 12i - 9 - 8 - 12i + 13$$

$$p(2+3i) = 0$$

Logo, podemos perceber que $z = 2 + 3i$ é uma das raízes do polinômio $p(z) = z^2 - 4z + 13$.

Podemos também encontrar as raízes de um polinômio. Por exemplo, quais serial as raízes do polinômio abaixo:

$$p(z) = z^2 + 2iz - 5$$

A solução segue a mesma da equação do segundo grau convencional, precisando inicialmente achar o Δ e em seguida as raízes, observe:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (2i)^2 - 4.1.(-5)$$

$$\Delta = 4i^2 + 20$$

$$\Delta = 4(-1) + 20$$

$$\Delta = -4 + 20$$

$$\Delta = 16$$

Agora podemos encontrar as raízes, como apresentado a seguir:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z = \frac{-2i \pm \sqrt{16}}{2.1}$$

$$z = \frac{-2i \pm 4}{2}$$

$$z' = \frac{-2i + 4}{2} = -i + 2$$

$$z'' = \frac{-2i - 4}{2} = -i - 2$$

Logo as raízes do polinômio $p(z) = z^2 + 2iz - 5$ são $-i + 2$ e $-i - 2$.

9.1 Exercícios

1) Encontre as raízes dos polinômios a seguir:

a) $z^3 + 1 = 0$

Resp: $z^3 + 1 = (z+1)(z^2 - z + 1) = 0$

$$z+1=0$$

$$z=-1$$ Que é uma das raízes.

$$z^2-z+1=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=(-1)^2-4.1.1$$

$$\Delta=1-4$$

$$\Delta=-3=3i^2$$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z=\frac{-(-1)\pm\sqrt{3i^2}}{2.1}$$

$$z=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$z'=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$z''=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

Logo, as raízes serão dadas por:

$$S=\{\frac{1+i\sqrt{3}}{2},\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2},-1\}$$

b) $z+\frac{1}{z}=0$

Resp: $z+\frac{1}{z}=z^2+1=0$

$z^2+1=0$

$z^2=-1$

$z^2=i^2$

$z\ =\sqrt{i^2}$

$z\ =\pm i$

Logo, as raízes serão dadas por:

$$S=\{i,-i\}$$

c) $z^5-z=0$

Resp: $z^5-z=z(z^4-1)=0$

$z=0$,é uma das raízes.

$z^4-1=(z^2+1)(z^2-1)=0$

$z^2+1=0$

$z^2=-1$

$z^2=i^2$

$z\ =\sqrt{i^2}$

$z = \pm i$,são raízes.

$z^2 - 1 = 0$

$z^2 = 1$

$z = \sqrt{1}$

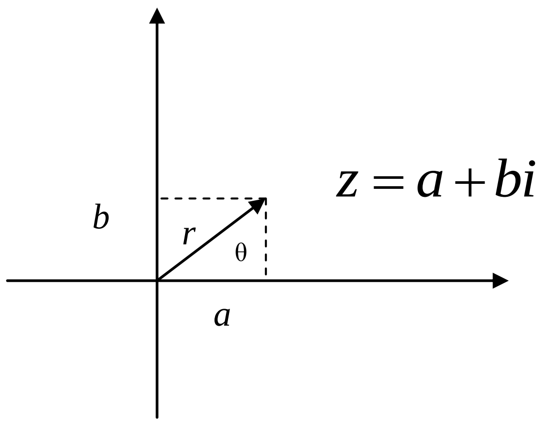
$z = \pm 1$,são raízes.

Logo, as raízes serão dadas por:

$$S = \{0, 1, -1, i, -i\}$$

10. Forma Polar de um Número Complexo

Um número complexo também pode ser representado na forma polar. Neste caso, a parte real é representada no eixo x e a parte imaginária no eixo y, observe abaixo:



Onde a é a parte real e b a imaginária. O valor de θ determina o ângulo entre a parte real e imaginária e r é o módulo, que é dado da seguinte forma:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

A forma polar é assim definida da forma apresentada a seguir:

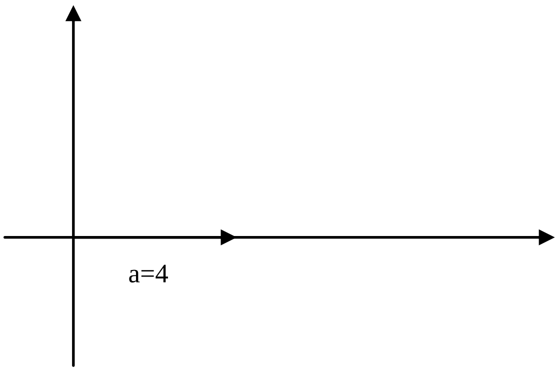
$$z = r(\cos\theta + isen\theta)$$

Onde θ é o ângulo formado entre a e b dado em radianos e r é o módulo de z. Vejamos alguns exemplos apresentados a seguir para ficar claro o que foi abordado.

10.1 Exercícios

a)Determine a forma polar do complexo $z = 4$ e represente-o graficamente.

Resp: Neste caso onde há apenas a parte real, o gráfico ficaria da seguinte forma:



Inicialmente, vamos encontrar o valor de r, ou seja, o módulo da seguinte forma:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$r = |z| = \sqrt{4^2 + 0^2}$$

$$r = |z| = \sqrt{4^2}$$

$$r = |z| = 4$$

Podemos observar que o ângulo θ é zero, já que não há parte imaginária. Sendo assim, nossa representação na forma polar fica da seguinte forma:

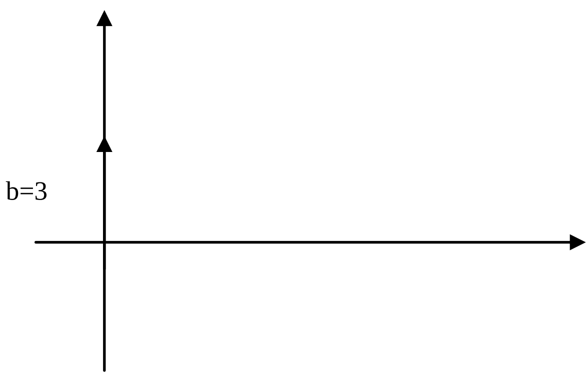
$$z = r(\cos\theta + isen\theta)$$

$$z = 4(\cos 0 + isen 0)$$

b) Determine a forma polar do complexo apresentado a seguir, represente graficamente.

$$z = 3i$$

Resp: Como a parte real é nula, temos neste caso apenas a parte imaginária, onde nosso gráfico ficará da seguinte forma:



Vamos encontrar o valor de r, ou seja, o módulo da seguinte forma:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$r = |z| = \sqrt{0^2 + 3^2}$$

$$r = |z| = \sqrt{3^2}$$

$$r = |z| = 3$$

Podemos observar que o ângulo θ é 90º. Para convertermos graus para radianos, devemos multiplicar por $\frac{\pi}{180}$, sendo assim, 90º equivale a $\frac{\pi}{2}$ radianos. Nossa representação na forma polar fica da seguinte forma:

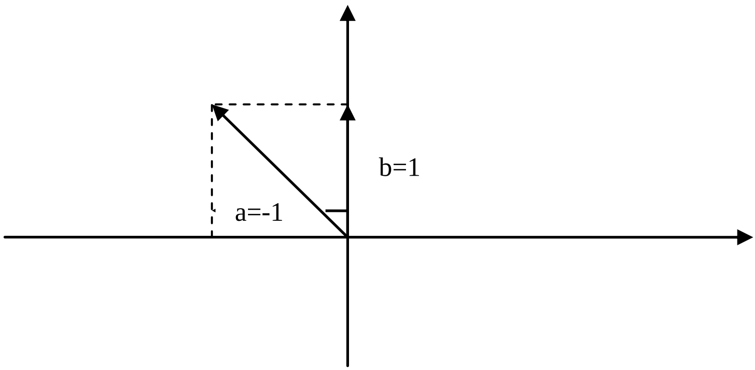
$$z = r(\cos\theta + isen\theta)$$

$$z = 3(\cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2})$$

c)Determine a forma polar do complexo apresentado a seguir, represente graficamente.

$$z = -1 + i$$

Resp: Neste exemplo temos tanto a parte real quanto imaginária, sendo assim o gráfico fica da seguinte forma:



Vamos encontrar o valor de r, ou seja, o módulo da seguinte forma:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$r = |z| = \sqrt{-1^2 + 1^2}$$

$$r = |z| = \sqrt{2}$$

Agora podemos encontrar o ângulo θ da seguinte forma:

$$\cos\theta = \frac{C}{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^{\circ}$$

Porém como estamos no segundo quadrante, devemos considerar os 90º deste quadrante, ficando assim com o ângulo θ de 90+45=135º. Agora devemos converter para radianos, da forma apresentada a seguir:

$$135.\frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}rad$$

Como temos o ângulo θ em radianos e o módulo, podemos escrever agora a forma polar do número, como apresentado a seguir:

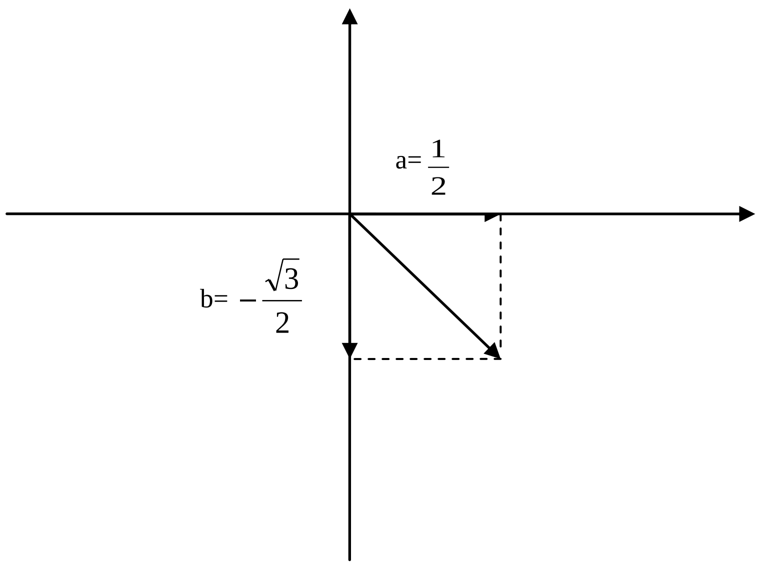
$$z = r(\cos\theta + isen\theta)$$

$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + isen\frac{3\pi}{4})$$

d) Determine a forma polar do complexo apresentado a seguir, represente graficamente.

$$z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Resp: Neste exemplo temos tanto a parte real quanto imaginária, sendo assim o gráfico fica da seguinte forma:



Vamos encontrar o valor de r, ou seja, o módulo da seguinte forma:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$r = |z| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$r = |z| = 1$$

Agora podemos encontrar o ângulo θ da seguinte forma:

$$\cos\theta = \frac{C}{H} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \arccos\frac{1}{2} = 60^{o}$$

Desta forma o ângulo será de 300º já que o círculo por completo possui 360º. Abaixo podemos ver a conversão para radianos:

$$300.\frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{3} rad$$

De posse do módulo e do ângulo em radianos, podemos agora colocar na forma polar, como apresentado a seguir:

$$z = r(\cos\theta + isen\theta)$$

$$z = 1(\cos\frac{5\pi}{3} + isen\frac{5\pi}{3})$$

Algumas propriedades decorrentes da forma polar são as apresentadas abaixo:

$i)|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$

$ii)\arg(z_1.z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

$iii)\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ com $z_2 \neq 0$

$iv)\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

$v)|z| = |\bar{z}|$

$vi)\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

$$vii)\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$$

$$viii)\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

11. Fórmula de DeMoivre

Através desta fórmula, podemos calcular facilmente a potência de um número complexo na forma polar. Observe a fórmula genérica apresentada abaixo:

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + isen(n\theta))$$

Vejamos alguns exemplos apresentados a seguir de forma a elucidar o conceito apresentado.

11.1 Exercícios

a) Sendo $z = 1 + i$, calcule z^4.

Resp: O primeiro passo é colocar na forma polar, como apresentado a seguir, onde primeiramente é encontrado o módulo e em seguida o argumento.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$r = \sqrt{2}$$

$$\theta = \arctan(\frac{y}{x})$$

$$\theta = \arctan(\frac{1}{1})$$

$$\theta = 45^\circ$$

$$\theta = 45^\circ.\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$$

A forma polar ficará da seguinte forma:

$$z = r(\cos\theta + isen\theta)$$

$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4})$$

Aplicando DeMoivre, obteremos o seguinte valor de z^4:

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + isen(n\theta))$$

$$z^4 = \sqrt{2}^4(\cos(4\frac{\pi}{4}) + isen(4\frac{\pi}{4}))$$

$$z^4 = 2^2(\cos(\pi) + isen(\pi))$$

$z^4 = 4(\cos(\pi))$, já que $isen(\pi) = 0$.

12. Raízes de um número complexo

O objetivo é que possamos encontrar as raízes de um número complexo, onde este deverá estar disponível na forma polar. Observe a forma genérica apresentada abaixo:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}) + isen(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}))$$