TSI
1re année

Thierry Finot
Elsa Choubert
Sébastien Fayolle
David Legrand
Vincent Parmentier
Nicolas Tancrez

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

PHYSIQUE CHIMIE

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Résolutions de problèmes, activités numériques
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés

3e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES

ellipses

PRÉPAS SCIENCES

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Physique-Chimie
TSI - 1re année

3e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES

ouvrage coordonné par

Thierry FINOT

professeur à l'école SPEIT (Shanghai) et au lycée Lavoisier (Paris)

Elsa CHOUBERT

professeure au lycée Stanislas (Cannes)

Vincent PARMENTIER

professeur au lycée Pothier (Orléans)

Sébastien FAYOLLE

professeur au lycée Gustave Eiffel (Bordeaux)

Nicolas TANCREZ

professeur au lycée Saint Louis (Paris)

David LEGRAND

professeur au lycée Sainte Marie (Caen)

avec la contribution de

Camille BONOMELLI

chercheuse à l'université d'Oxford

Vincent FRATICELLI

professeur au lycée Pothier (Orléans)

ellipses

COLLECTION
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

Un étudiant n'est pas un sac que l'on remplit mais une bougie que l'on enflamme.

Vladimir Arnold, mathématicien russe.

Les notices culturelles « un mathématicien » et « un peu d'histoire »
des pages de titre des chapitres ont été rédigées par Bertrand Hauchecorne.

ISBN 9782340-048591
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2021
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER
LE
PHOTOCOPILLAGE
TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en physique-chimie comme en mathématiques ou sciences industrielles.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthodes » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » permet de tester votre recul par rapport au programme et de vous révéler les mauvais réflexes à rectifier. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi l'ouvrage de physique-chimie comme ceux de maths et de SII vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers **la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

1.	Propagation d'un signal	1
2.	Bases de l'optique géométrique	27
3.	Lentilles minces	59
4.	Lois de l'électrocinétique – Régime continu	91
5.	Circuit linéaire du premier ordre	119
6.	Oscillateur électrique en régime libre	155
7.	Régime sinusoïdal forcé	185
8.	Filtrage linéaire	219
9.	Molécules, ions et cristaux	261
10.	État et évolution d'un système chimique	293
11.	Cinétique chimique	323
12.	Cinématique du point	363
13.	Principes de la dynamique	391
14.	Énergie mécanique	435
15.	Mouvement d'un solide	473
16.	Champ magnétique	505
17.	Induction électromagnétique	537
18.	Description d'un système thermodynamique	573
19.	Premier principe de la thermodynamique	597
20.	Deuxième principe de la thermodynamique	623
21.	Machines thermiques	645
22.	Réactions acido-basiques	671
23.	Réactions de dissolution ou de précipitation	707
24.	Réactions d'oxydo-réduction	749
	Index	799

Chapitre 1

Propagation d'un signal

UN SCIENTIFIQUE



Le génie anglais **Thomas Young** (1773-1829) est un esprit universel ; il parle une dizaine de langues, et contribue par exemple au déchiffrement des hiéroglyphes égyptiens. Il se passionne aussi pour la botanique et la philosophie, mais c'est en tant que médecin qu'il exerce. Sa célébrité lui vient pourtant de ses expériences en optique, sur les interférences lumineuses, qui font apparaître la nature ondulatoire de la lumière.

Un peu d'histoire

La propagation du son est étudiée dès l'Antiquité mais sans en comprendre la nature ondulatoire. Robert Boyle (1627-1691) montre que le son ne se propage pas dans le vide et, peu après, Mersenne et Gassendi essayent d'en estimer la vitesse de propagation dans l'air.

En 1690, Christiaan Huygens propose une théorie ondulatoire de la lumière et entre en conflit avec Newton qui penche pour une nature corpusculaire. Au tout début du XIX^{e} siècle, Thomas Young reprend l'idée du savant hollandais qu'il justifie par des expériences de diffraction en obtenant ce qu'il nomme des interférences. Cette approche est peu après confortée par les travaux d'Augustin Fresnel puis, en 1850, par l'expérience de Léon Foucault sur le calcul de la vitesse de la lumière. La théorie des ondes électromagnétiques, énoncée en 1873 par James Clerk Maxwell, confirme le caractère ondulatoire de la lumière.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- Les différents types d'ondes et les grandeurs physiques correspondantes
- La forme mathématique d'une onde progressive (cas général et cas sinusoïdal)
- Des ordres de grandeur de fréquences
- Les phénomènes d'interférences, de diffraction

Ce qu'il faut savoir faire

- Déterminer l'évolution temporelle ou la forme spatiale d'une onde progressive
- Établir et utiliser la relation entre fréquence, longueur d'onde et célérité pour une onde progressive sinusoïdale
- Exprimer les conditions d'interférences constructives ou destructives

■■ Résumé de cours

■ Propagation d'un signal

❑ Signaux et ondes

Un **signal** est une fonction $s(t)$ décrivant les variations d'une grandeur physique au cours du temps. Un signal existant en tout point M d'une région de l'espace, et comportant des oscillations au cours du temps, constitue une **onde**, décrite par une fonction $s(M,t)$.

– Un signal acoustique est constitué de variations de la pression d'un milieu matériel, de sa masse volumique et de sa vitesse locale.

– Un signal électrique est constitué de variations de l'intensité et de la tension dans un circuit.

– Un signal électromagnétique est constitué de variations des champs électrique et magnétique dans le milieu de propagation (qui peut être le vide) ; cela inclut la lumière, les infrarouges, les ultraviolets, les rayons X et gamma, les ondes de radio et de télévision, les micro-ondes…

❑ Onde progressive unidimensionnelle

Une onde **unidimensionnelle** dépend d'une seule coordonnée spatiale le long d'un axe, souvent (Ox). Il s'agit, soit d'une onde dans un milieu à une dimension (onde électrique dans un câble, onde mécanique sur une corde…), soit d'un type particulier d'onde, l'**onde plane**, dans un milieu à deux ou trois dimensions.

Une **onde** (plane) **progressive** (OP) est la propagation d'un signal dans une certaine direction de l'espace, avec une certaine vitesse de propagation dont la norme c est appelée **célérité**.

Une OP se propageant sans déformation selon l'axe (Ox) peut s'écrire sous la forme générale :

$s(M,t) = F(t - x/c)$ ou $s(M,t) = F(x - ct)$ si elle se propage dans le sens des x croissants ;

$s(M,t) = G(t + x/c)$ ou $s(M,t) = G(x + ct)$ si elle se propage dans le sens des x décroissants.

En un point M d'abscisse x, le signal prend les mêmes valeurs qu'à l'abscisse 0 mais avec un **retard** (algébrique) de x/c dans le premier cas, ou une **avance** de x/c dans le second cas.

⇨ **Méthode 1.1. Déterminer l'évolution temporelle ou la forme spatiale d'une onde progressive**

■ Onde progressive sinusoïdale

❑ Forme mathématique

Une onde (plane) progressive sinusoïdale (ou harmonique) est de la forme :

$s(M,t) = A\cos(\omega t - kx + \psi)$ si elle se propage dans le sens des x croissants ;

$s(M,t) = A\cos(\omega t + kx + \psi)$ si elle se propage dans le sens des x décroissants.

C'est un cas particulier de la forme générale indiquée précédemment, à condition que la **pulsation temporelle** ω et la **pulsation spatiale** k vérifient : $\boxed{\omega = kc}$ (c étant également appelée ici **vitesse de phase**).

On appelle **vecteur d'onde** le vecteur $\vec{k} = k\vec{e_x}$ (premier cas) ou $\vec{k} = -k\vec{e_x}$ (second cas).

A (> 0) est l'**amplitude** de l'onde ; elle correspond à la valeur maximale de $s(x,t)$.
$(\omega t \pm k x + \psi)$ est la **phase** au point d'abscisse x à un instant t, et ψ est la **phase à l'origine**.

La **fréquence (temporelle)** f est le nombre d'oscillations par unité de temps : $\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$.

ω et f ont les dimensions de l'inverse d'un temps, mais ω s'exprime en radians par seconde (rad/s) et f en hertz (Hz).

❑ Double périodicité

Une onde progressive sinusoïdale possède une double périodicité, temporelle et spatiale :

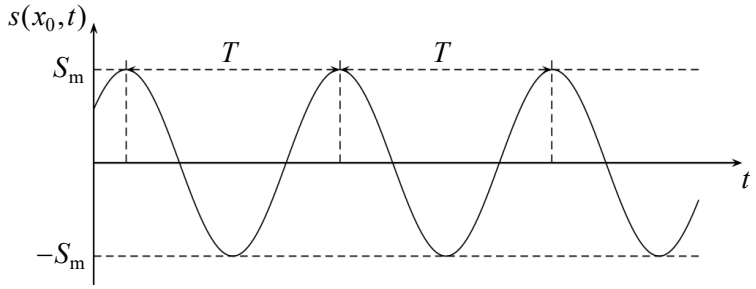
– la **période temporelle** $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ est l'intervalle de temps minimal séparant deux valeurs identiques de l'onde en un point donné ;

– la période spatiale ou **longueur d'onde** $\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$ est, à un instant donné, la distance minimale séparant deux points où la valeur de l'onde est la même.

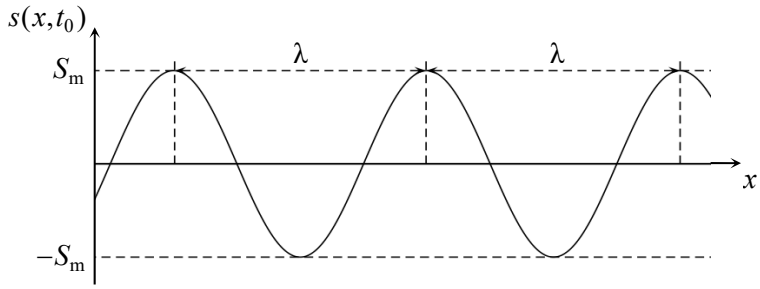
Ces deux périodes vérifient la relation $\boxed{\lambda = c\,T}$ qui montre que la longueur d'onde est la distance parcourue par l'onde en une période. Autre expression : $\boxed{\lambda = \frac{c}{f}}$ où f est la fréquence temporelle.

⇨ Méthode 1.2. Établir la relation entre périodes temporelle et spatiale

Évolution de l'onde au cours du temps, en un point d'abscisse donnée x_0



Profil de l'onde le long de l'axe (Ox), à un instant donné t_0



■ Onde progressive quelconque

❑ Spectre

Une onde progressive quelconque peut être considérée comme une somme d'ondes progressives sinusoïdales de fréquences et d'amplitudes différentes : elles constituent le **spectre** de l'onde.

❑ Cas des ondes acoustiques

– Les sons audibles correspondent aux ondes acoustiques dans l'intervalle de fréquences $20\,\text{Hz} < f < 20\,\text{kHz}$ environ. La fréquence correspond à la hauteur du son (grave pour les faibles fréquences, aigu pour les fréquences élevées).

– Une note de musique est généralement une superposition de signaux appelés **harmoniques**, dont les fréquences sont multiples de la fréquence **fondamentale** définissant cette note.

– Les ultrasons correspondent à $f > 20\,\text{kHz}$, les infrasons à $f < 20\,\text{Hz}$.

❑ Cas des ondes électromagnétiques

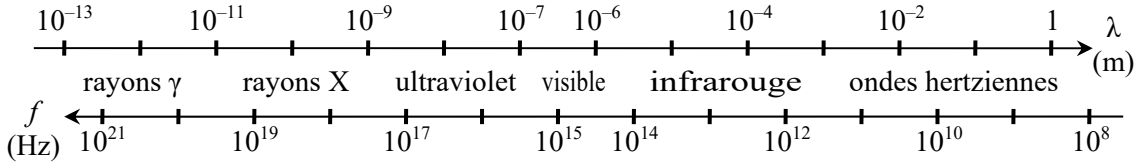
– La lumière visible correspond aux ondes électromagnétiques dans l'intervalle de fréquences $4 \cdot 10^{14}\,\text{Hz} < f < 8 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}$ environ ; dans le vide où la célérité est $c = 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, cela correspond à l'intervalle de longueurs d'onde $800\,\text{nm} > \lambda > 400\,\text{nm}$ environ.

La fréquence correspond à la couleur de la lumière (du rouge au violet, voir chapitre **2**).

– Certaines lumières sont **monochromatiques** (une seule fréquence), mais la plupart sont polychromatiques, avec un spectre **discret** (constitué seulement de quelques fréquences) ou **continu** (constitué de toutes les fréquences dans l'intervalle du visible, et même au-delà).

– Certains dispositifs, tels que le prisme ou le réseau de diffraction, permettent de séparer les différentes composantes d'une lumière polychromatique.

– Spectre électromagnétique :



■ Interférences entre deux ondes

❑ Déphasage entre deux ondes en un point

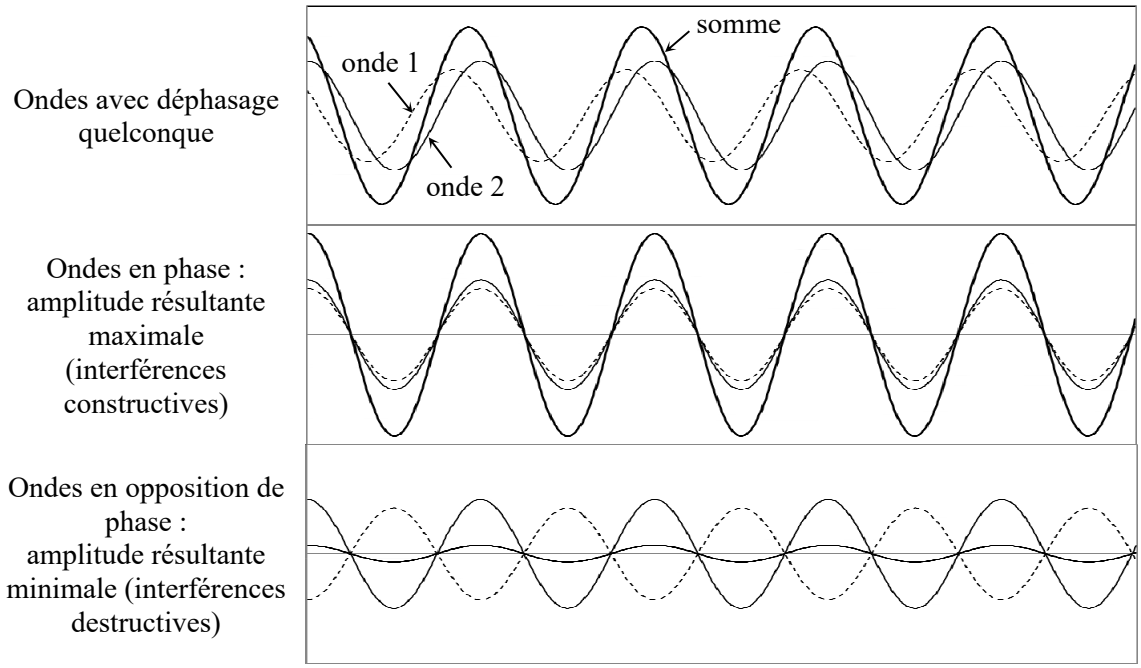
Lorsque deux ondes progressives sinusoïdales, de célérité c et *de même fréquence* f (donc de même pulsation $\omega = 2\pi f$) se propagent dans une région de l'espace, il existe en tout point M une différence δ entre les chemins parcourus par les deux ondes, d'où un décalage temporel τ et un déphasage φ proportionnels à δ : $\tau = \dfrac{\delta}{c}$ et $\varphi = k\,\delta = k\,c\,\tau = \omega\tau = 2\pi\dfrac{\tau}{T}$.

❑ Onde résultante

Les fonctions correspondant aux deux ondes s'additionnent. On obtient ainsi le phénomène d'**interférences** : l'onde résultante au point M est encore une onde sinusoïdale, dont l'amplitude dépend du déphasage φ entre les deux ondes initiales en ce point. En particulier :

– en un point où les deux ondes arrivent **en phase** ($\varphi = 2m\pi$ avec m entier), l'amplitude résultante est *maximale*, les interférences sont **constructives** ;

– en un point où les deux ondes arrivent **en opposition de phase** ($\varphi = (2m+1)\pi$ avec m entier), l'amplitude résultante est *minimale* (et même nulle si ces deux ondes ont la même amplitude), les interférences sont **destructives**.



■ Diffraction d'une onde

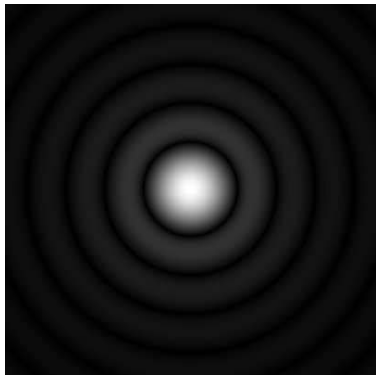
❑ Phénomène de diffraction

Lorsqu'une onde passe à côté d'un obstacle, elle est déviée. En particulier, si elle traverse une ouverture de largeur *a*, elle ressort en divergeant : c'est le phénomène de **diffraction**. Pour une onde monochromatique de longueur d'onde λ, la zone où l'amplitude diffractée est importante est un secteur de demi-angle θ tel que : $\boxed{\sin\theta \approx \frac{\lambda}{a}}$. Pour $\theta \ll 1$ (en rad), on peut écrire $\theta \approx \frac{\lambda}{a}$.

Le phénomène n'est donc pas perceptible pour une ouverture large, telle que $a \gg \lambda$.

❑ Observation

Pour la lumière visible, la diffraction est facilement observable pour des ouvertures de l'ordre de 1 à 100 µm.
Dans le cas d'une ouverture circulaire, la lumière diffractée « à l'infini » (à grande distance ou dans le plan focal d'une lentille convergente) forme une tache circulaire brillante appelée **tache d'Airy**, entourée d'anneaux peu lumineux.



La diffraction peut être mise en évidence pour tous les autres types d'ondes. Par exemple, on peut l'observer sur des photographies aériennes de la houle à l'entrée d'un port.

■■ Méthodes

■ Comment étudier une onde progressive quelconque ?

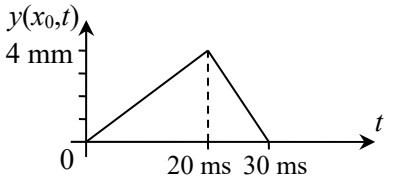
❑ Méthode 1.1. Déterminer l'évolution temporelle ou la forme spatiale d'une onde progressive

Supposons qu'on connaisse l'évolution temporelle d'un signal en un point donné, ainsi que la célérité de l'onde considérée.
– On peut en déduire l'évolution temporelle du signal en un autre point où passe l'onde, en déterminant simplement le retard entre les deux points.
– On peut également en déduire la forme globale du signal, sur l'ensemble du milieu considéré, à un instant donné. Pour cela, on repère les abscisses où apparaissent à cet instant certaines valeurs particulières du signal ; l'allure de la courbe est alors analogue à la précédente (variation temporelle), mais à l'envers.

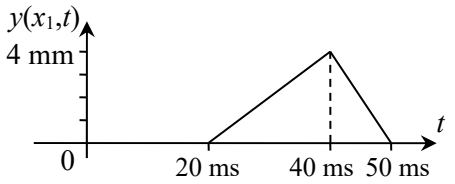
Inversement, si on connaît à un instant donné la forme du signal dans l'espace, on peut en déduire sa forme à un autre instant, ou l'évolution temporelle en un point donné.

⇨ **Exercices 1.1, 1.2**

Considérons une onde de déformation se propageant le long d'une corde, selon l'axe (*Ox*), dans le sens des *x* croissants à partir du point d'abscisse 0, à une célérité $c = 50\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.
La variation de l'élongation *y* en $x_0 = 0$ au cours du temps est représentée sur le schéma ci-contre ; elle est nulle pour $t < 0$ et pour $t > 30$ ms.
On cherche à en déduire, d'une part la variation temporelle de l'élongation en $x_1 = 1{,}0$ m, d'autre part l'aspect de la corde aux instants $t_1 = 20$ ms, $t_2 = 40$ ms et $t_3 = 60$ ms.



– L'onde progressive est une fonction de la forme $y(M,t) = f(t - x/c)$. Tout se qui se passe en x_0 se reproduit en *x* quelconque avec un retard $(x - x_0)/c$.
À l'abscisse x_1, le retard de l'onde par rapport au point d'abscisse 0 vaut $x_1/c = 20$ ms. L'évolution temporelle de *y* en ce point reproduit donc celle à l'abscisse $x_0 = 0$ avec un retard de 20 ms.



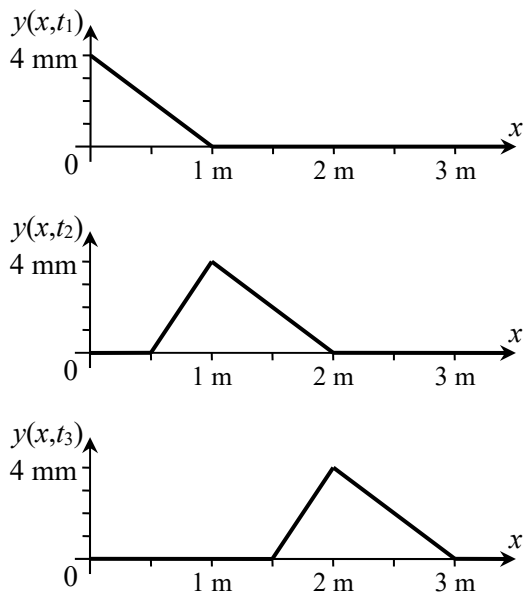
– Déterminons maintenant l'aspect global de la corde à différents instants.

Tout se qui se passe en x_0 à instant t_0 se reproduit ensuite, à un instant $t > t_0$, à l'abscisse $x_0 + c(t - t_0)$.

Le « front » du signal, c'est-à-dire le point où une élongation non nulle apparaît à cet instant, se trouve à l'abscisse ct_i, soit $ct_1 = 1{,}0$ m à t_1 puis $ct_2 = 2{,}0$ m et $ct_3 = 3{,}0$ m.

Le maximum d'élongation, qui se produit en 0 à l'instant $t_{\max 0} = t_1 = 20$ ms, se trouve à un instant ultérieur $t_i > t_{\max 0}$ à une abscisse $c(t_i - t_{\max 0})$, soit $c(t_2 - t_{\max 0}) = 1{,}0$ m à t_2 puis $c(t_3 - t_{\max 0}) = 2{,}0$ m à t_3.

Enfin la « queue » du signal, où se trouve la dernière élongation non nulle, n'apparaît sur la corde qu'à partir de l'instant $t_{q0} = 30$ ms où l'excitation se termine. Elle se trouve à un instant ultérieur $t_i > t_{q0}$ à une abscisse $c(t_i - t_{q0})$, soit à l'abscisse $c(t_2 - t_{q0}) = 0{,}5$ m à t_2 puis $c(t_3 - t_{q0}) = 1{,}5$ m à t_3.



– On peut finalement vérifier la cohérence entre le premier graphe et les deux autres :

en $x_0 = 0$, à l'instant $t_1 = 20$ ms l'ordonnée est à son maximum de 4 mm, puis à $t_2 = 40$ ms et à $t_3 = 70$ ms elle est redevenue nulle ;

le point d'abscisse $x_1 = 1{,}0$ m a bien une ordonnée nulle (mais qui va juste commencer à augmenter) à $t_1 = 20$ ms, une ordonnée de 4 mm à $t_2 = 40$ ms, et de nouveau nulle à $t_3 = 60$ ms.

■ Comment étudier une onde progressive sinusoïdale ?

❑ Méthode 1.2. Établir la relation entre périodes temporelle et spatiale

– On utilise la notion de retard de l'onde entre deux points pour établir la relation entre la période temporelle T et la longueur d'onde (période spatiale) λ.
– On peut aussi la retrouver en utilisant l'autre définition de la longueur d'onde : distance parcourue par l'onde pendant une période (temporelle).

⇨ **Exercice 1.4**

Considérons une onde se propageant selon l'axe (Ox), dans le sens des x croissants à partir du point d'abscisse 0, avec une célérité c.

– À un instant t donné, l'onde présente un maximum en un point d'abscisse x_1. D'après la définition de λ (distance entre deux maxima voisins), le maximum suivant a donc pour abscisse $x_2 = x_1 + \lambda$. Or l'onde prend en x_2 les mêmes valeurs qu'en x_1 avec un retard $(x_2 - x_1)/c = \lambda/c$. Puisque le retard entre un maximum et le suivant est la période temporelle T, on obtient donc par identification : $T = \dfrac{\lambda}{c}$ soit $\boxed{\lambda = cT}$.

– Si on utilise la définition de λ comme distance parcourue par l'onde pendant une période T, le calcul est une simple relation de cinématique : pendant une durée T, la distance parcourue à une vitesse constante c est : $\lambda = cT$.

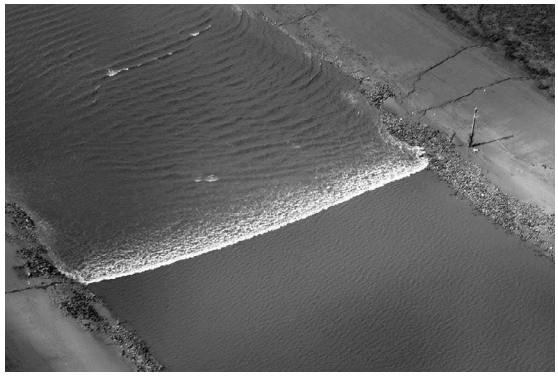
■■ Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Une onde progressive possède une célérité qui dépend du milieu de propagation.	☐	☐
2.	Dans une onde plane progressive sinusoïdale, tous les points de l'espace oscillent avec la même amplitude.	☐	☐
3.	Aucune onde ne se propage dans le vide.	☐	☐
4.	La période temporelle et la période spatiale d'une onde sinusoïdale sont deux grandeurs indépendantes l'une de l'autre.	☐	☐
5.	Les rayons X sont des ondes électromagnétiques.	☐	☐
6.	Le phénomène d'interférences peut se produire entre deux ondes de fréquences différentes.	☐	☐
7.	Les interférences entre deux ondes peuvent donner une onde résultante nulle.	☐	☐
8.	Le déphasage entre deux ondes dépend du point considéré.	☐	☐
9.	Le phénomène de diffraction se produit lorsque la taille d'une ouverture est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde.	☐	☐
10.	Une lumière monochromatique est une onde sinusoïdale.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

■ Ondes de forme quelconque

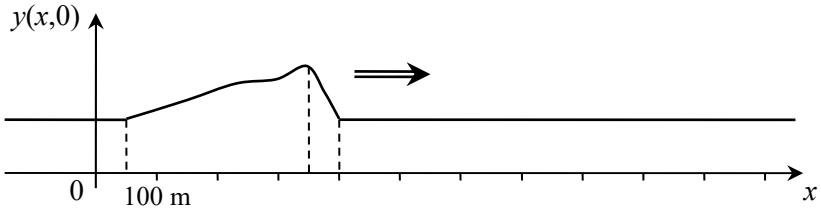
❑ Exercice 1.1. Mascaret



Un mascaret est une vague solitaire remontant un fleuve au voisinage de son estuaire, et provoquée par une interaction entre son écoulement et la marée montante.

On considère ici un mascaret se déplaçant à la vitesse $c = 20\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ le long d'un fleuve rectiligne, et on définit un axe (Ox) dans la direction et le sens de sa propagation.

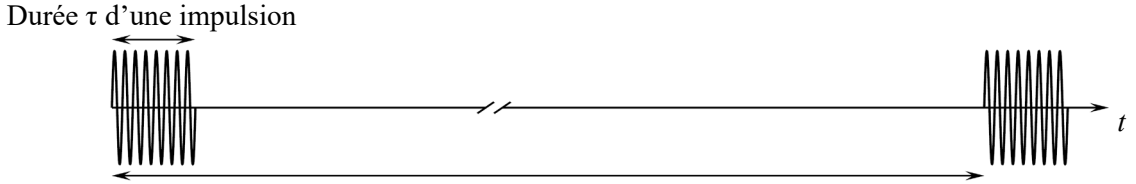
À un instant $t_0 = 0$, le profil de niveau de l'eau du fleuve a l'allure suivante :



1. Faire un schéma du profil de niveau du fleuve à t = 1,0 minute, en supposant que l'onde se propage sans déformation.
2. Toto attend avec sa planche de surf à l'abscisse x_T = 2,0 km. À quel instant va-t-il recevoir la vague ?
3. Un détecteur fixe, enregistrant la hauteur du fleuve en fonction du temps, est placé à l'abscisse x_d = 1,4 km. Dessiner l'allure des variations $y(x,t)$ en fonction de t.
4. En réalité, l'onde se déforme petit à petit car la vitesse de propagation augmente avec la profondeur. Comment évolue alors le profil de la vague ?

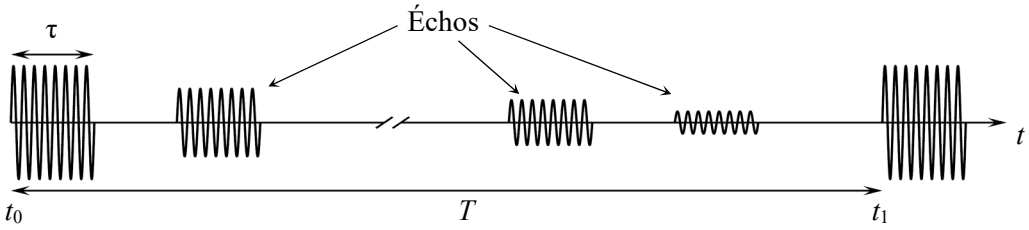
❑ Exercice 1.2. Mesure de distance et de vitesse par radar*

Un radar (mot provenant de l'acronyme anglais pour *radio detection and ranging*) est un appareil utilisant des ondes radio (ondes électromagnétiques de fréquences comprises entre 3 MHz et 110 GHz) pour détecter la présence d'objets mobiles, et pouvant également déterminer leur distance et leur vitesse. On présente ici le principe de ces deux mesures.
Le radar comporte une antenne qui émet, avec une période T, des impulsions, c'est-à-dire des signaux sinusoïdaux de durée limitée τ. Deux de ces impulsions successives sont représentées sur le schéma ci-dessous (attention, il y a une rupture d'échelle due au fait que les durées sont très différentes).



Ces impulsions sont envoyées dans toutes les directions de l'espace. Lorsque l'une d'elles rencontre un objet réfléchissant, elle est renvoyée vers l'antenne, qui devient réceptrice entre deux impulsions (mais elle ne peut pas détecter de signal reçu tant qu'elle émet une impulsion). Cela fait alors apparaître un point lumineux sur un écran, indiquant la direction de la cible, et l'analyse du signal reçu permet d'effectuer les mesures souhaitées.

1. Un radar émet des impulsions de fréquence f = 2,90 GHz et de durée τ = 1,0 μs, avec une période T = 100,0 μs. L'enregistrement ci-dessous montre deux impulsions émises par le radar, commençant aux instants t_0 = 0,0 μs et t_1 = 100,0 μs, et trois échos renvoyés par des objets, commençant aux instants t_A = 3,0 μs, t_B = 80,0 μs et t_C = 90,0 μs, et provenant de la réflexion de l'impulsion émise à t_0.



a) Calculer la longueur d'onde λ des ondes émises pendant une impulsion, et le nombre N d'oscillations dans chaque impulsion. On prendra pour l'air la célérité $c = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

b) Déterminer la distance à laquelle se trouvent les différents objets détectés, en supposant que les ondes se propagent à la même célérité que dans le vide. Comment expliquer la différence d'amplitude entre les impulsions initiales et les échos ?

c) Montrer qu'il existe une distance minimale en dessous de laquelle on ne peut pas détecter un objet, et calculer sa valeur numérique.

2. Pour déterminer la vitesse, une première possibilité consiste à utiliser l'effet Doppler : si par exemple l'objet s'éloigne du radar à une vitesse v, l'onde réfléchie aura une fréquence légèrement inférieure à f : $f' = f\left(1 - \dfrac{v}{c}\right)$.

Déterminer la variation relative de fréquence pour un avion s'éloignant à la vitesse $v = 150 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, et conclure sur la précision de cette méthode.

3. On peut également comparer des échos successifs reçus du même objet, en mesurant simplement le décalage temporel entre ces échos. Calculer le décalage temporel entre les deux échos successifs reçus de l'avion ci-dessus, et commenter.

4. Enfin une autre méthode consiste à envoyer les impulsions toujours avec la même phase initiale, et à déterminer le déphasage entre deux échos successifs.

Déterminer ce déphasage φ, en fonction de la vitesse v dont s'éloigne l'objet selon la ligne de visée, de la durée T, et de la longueur d'onde λ.

Faire l'application numérique pour $v = 300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et commenter.

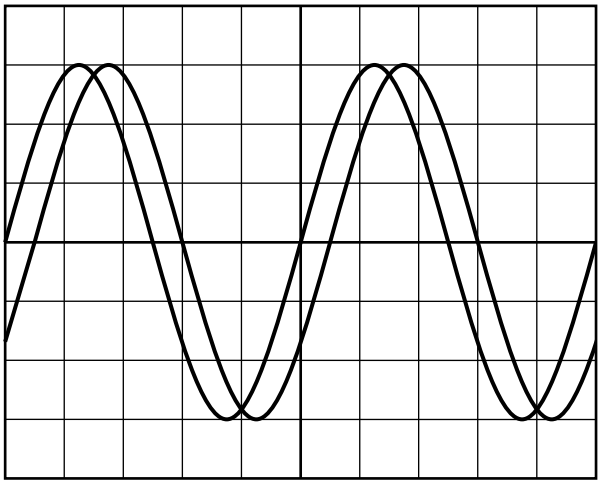
5. Les trois méthodes citées mesurent uniquement la composante de vitesse longitudinale (selon la ligne de visée). Comment détermine-t-on la composante v_2 de vitesse transversale, et finalement la norme de la vitesse de l'objet ?

■ Ondes progressives sinusoïdales

❑ Exercice 1.3. Mesure de la célérité du son

Un haut-parleur est mis en vibration par un générateur de tension sinusoïdale fournissant une tension $u(t) = U_m \cos(2\pi f t)$, de fréquence f = 1500 Hz. Il émet ainsi émet une note pure, constituée d'une onde acoustique sinusoïdale de même fréquence, en phase avec la tension $u(t)$, et se propageant avec une célérité c. Un microphone est placé à une distance d du haut-parleur, et convertit le signal sonore reçu en une tension électrique $u'(t)$ en phase avec ce signal sonore. Sur un oscilloscope, on visualise simultanément les deux tensions $u(t)$ et $u'(t)$. On règle l'amplification du microphone et les échelles de l'oscilloscope de manière à avoir la même amplitude pour les deux courbes.

1. Pour une certaine position du microphone, l'écran a l'allure ci-dessous. Montrer qu'il est possible de faire coïncider les deux courbes en modifiant la distance d.



2. En augmentant progressivement d, on trouve cette coïncidence pour deux valeurs successives d_1 et d_2. Montrer qu'on peut en déduire la célérité du son. Faire l'application numérique pour $d_1 = 35$ cm et $d_2 = 57$ cm.

❑ Exercice 1.4. Corde excitée de façon sinusoïdale*

L'extrémité S d'une corde élastique est reliée à un vibreur qui lui impose un mouvement oscillatoire vertical, sinusoïdal, de fréquence f = 100 Hz et d'amplitude Y_m = 4 mm. Chaque point de la corde est repéré par son abscisse x et son élongation verticale y dans le repère $(Oxyz)$, O désignant la position d'équilibre de S. Le mouvement de S débute à l'instant $t = 0$: S est alors à sa position d'équilibre et se déplace vers le haut. Un dispositif amortisseur placé à l'autre extrémité de la corde empêche la réflexion de l'onde issue de S.

1. Calculer la période temporelle T du signal.

2. Déterminer la relation entre la fréquence f, la longueur d'onde λ et la célérité c des ondes le long de la corde.

3. La plus petite distance entre deux points vibrant en *opposition de phase* étant $d = 6{,}0$ cm, en déduire la longueur d'onde λ et la célérité c.

4. On considère maintenant un point M de la corde, d'abscisse $x_M = 24$ cm.

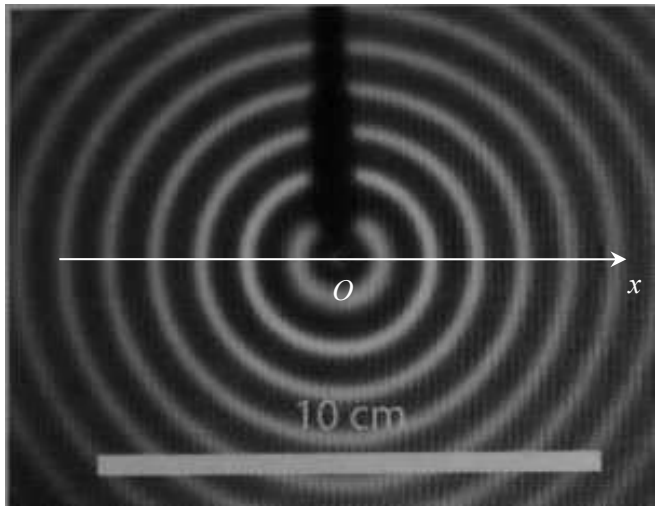
a) Calculer le retard de l'onde en M par rapport à S.

b) D'après cette valeur, comparer les mouvements des points S et M.

5. On étudie maintenant la corde globalement à l'instant $t_1 = 40$ ms. Représenter précisément l'aspect de la corde à cet instant.

❑ Exercice 1.5. Vagues à la surface de l'eau *

À la surface d'une cuve à ondes, un petit vibreur, oscillant à la fréquence $f = 20$ Hz, crée une onde circulaire. À un instant choisi comme origine ($t = 0$) on a pris la photo suivante.



1. Déterminer la longueur d'onde, et en déduire la célérité de cette onde à la surface de l'eau.

2. Quelle serait l'allure de la photo aux instants $t_1 = 100$ ms et $t_2 = 125$ ms ?

3. En supposant que cette onde est sinusoïdale, donner l'expression de la hauteur d'eau pour les points de l'axe (Ox), soit $z(x,t)$, pour $x > 0$ et pour $x < 0$.

4. En réalité l'amplitude Z_m de l'onde ne reste pas constante lors de sa propagation : elle diminue lorsqu'on s'éloigne du point origine O, car son énergie est répartie sur un domaine de plus en plus grand. Sachant que la densité d'énergie transportée par l'onde est proportionnelle au carré de l'amplitude, proposer une expression de Z_m en un point M en fonction de $r = OM$ s'il n'y a aucune perte d'énergie, et modifier les expressions de la question **3**.

❑ Exercice 1.6. Ondes électromagnétiques

Les antennes qui émettent des ondes électromagnétiques dans l'espace, ou qui les reçoivent, doivent avoir une longueur de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde λ des ondes émises : on choisit généralement un sous-multiple comme $\lambda/4$, $\lambda/8$ …

1. Pour transmettre la radio, on pourrait envisager d'émettre des signaux électromagnétiques ayant les mêmes fréquences que les sons audibles (audiofréquences), entre 20 Hz et 20 kHz. Calculer les longueurs d'onde dans l'air (assimilable au vide) de telles ondes électromagnétiques, et montrer que la taille des antennes serait irréalisable.

2. On transforme alors ces signaux par un procédé appelé modulation de fréquence (FM), qui leur donne des fréquences beaucoup plus élevées, entre 87,5 MHz et 108 MHz. Calculer les longueurs d'onde dans l'air des ondes de radio FM, et en déduire l'ordre de grandeur de la taille des antennes nécessaires.

3. Voyez-vous une autre raison pour laquelle les stations de radio ne pourraient pas émettre dans le domaine des audiofréquences ?

Donnée : célérité des ondes électromagnétiques dans le vide $c = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

■ Interférences et diffraction

❑ Exercice 1.7. Réflexion sur l'extrémité d'une corde* *

Une corde AB a son extrémité B fixe et son extrémité A actionnée transversalement par un vibreur de fréquence $f = 100$ Hz.
La célérité des ondes transversales sur la corde est $c = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



1. L'onde progressive sinusoïdale se propage de A vers B, dans le sens des x croissants. Dans le repère $(Oxyz)$, d'origine O choisie en un point quelconque de la corde, l'équation horaire de O est $y_O(t) = a\cos\omega t$, a étant l'amplitude, supposée constante tout le long de la corde.

a) Donner l'équation horaire $y_M(t)$ d'un point M de la corde, d'abscisse x.

b) Déterminer la pulsation temporelle k et la longueur d'onde λ.

2. L'onde se réfléchit en B en subissant un déphasage φ. Pour simplifier, on prendra maintenant l'origine du repère en B.

a) Exprimer les élongations $y_{B\text{i}}(t)$ due à l'onde incidente et $y_{B\text{r}}(t)$ due à l'onde réfléchie, et montrer que $\varphi = \pi$.

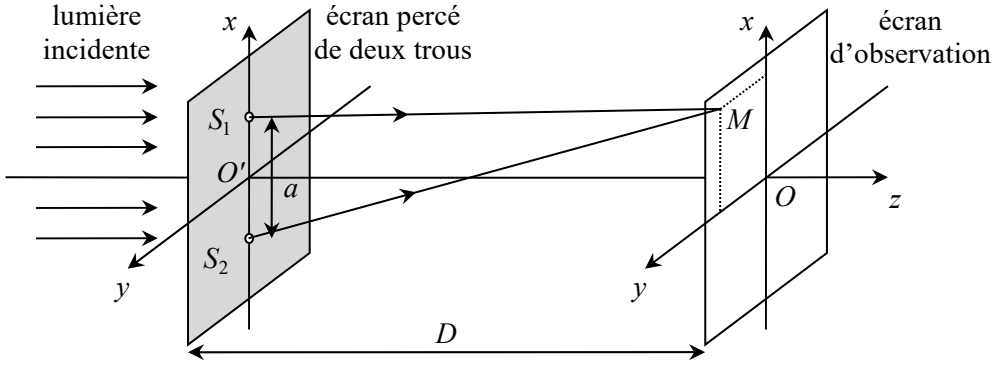
b) Pour un point M d'abscisse x (négative), exprimer $y_{M\text{i}}(t)$ et $y_{M\text{r}}(t)$, puis l'élongation $y_M(t)$ résultant de la superposition des deux ondes.

c) Montrer que certains points, appelés *nœuds de vibration*, n'oscillent pas du tout. Interpréter ce fait à l'aide de la notion de déphasage entre les ondes incidente et réfléchie.

❑ Exercice 1.8. Expérience de Young*

Le génial savant britannique Thomas YOUNG réalisa en 1803 une expérience clé pour établir la nature ondulatoire de la lumière : ayant séparé en deux un mince faisceau de lumière, il observa sur un écran des franges d'interférences résultant de la superposition des deux faisceaux obtenus. L'expérience a ensuite été perfectionnée en utilisant deux trous percés dans un écran.

Considérons les deux trous S_1 et S_2 percés dans un écran confondu avec le plan $(O'xy)$, et séparés d'une distance a. Ces deux trous étant éclairés par un faisceau de lumière parallèle à l'axe (Oz), ils se comportent comme deux sources lumineuses ponctuelles émettant en phase. La longueur d'onde de la lumière est λ. On observe la figure d'interférences sur un écran (Oxy).



La *différence de marche* en $M(x,y)$ est $\delta = S_2M - S_1M = \dfrac{ax}{D}$ pour $a \ll D$, $|x| \ll D$ et $|y| \ll D$.

1. À quel phénomène est due la déviation de la lumière lors de son passage dans chaque trou ?

2. Exprimer le déphasage φ entre les deux ondes arrivant en un point M de l'écran. Pour quelles valeurs de φ aura-t-on des interférences constructives ? destructives ?

3. On appelle *frange sombre* un ensemble de points ayant une même valeur de φ, donnant des interférences *destructives*. Donner l'équation cartésienne d'une frange sombre et en déduire sa nature géométrique précise.

4. On appelle *interfrange* la distance notée i entre deux franges sombres. Calculer i pour $D = 2{,}5$ m, $a = 2{,}5$ mm et $\lambda = 600$ nm.

5. Montrer que le déphasage en x_a = 0,45 mm vaut 270°. S'agit-il d'une frange sombre, d'une frange brillante (intensité maximale) ou d'une frange intermédiaire ?

❑ Exercice 1.9. Ordres de grandeur pour la diffraction

Une porte ouverte laisse passer à la fois le son et la lumière, mais ces deux types d'ondes ne se comportent pas de la même manière en la traversant.

Considérons une embrasure de porte de largeur L = 60 cm. Une onde plane, soit sonore, soit lumineuse, arrive perpendiculairement au plan de cette ouverture.

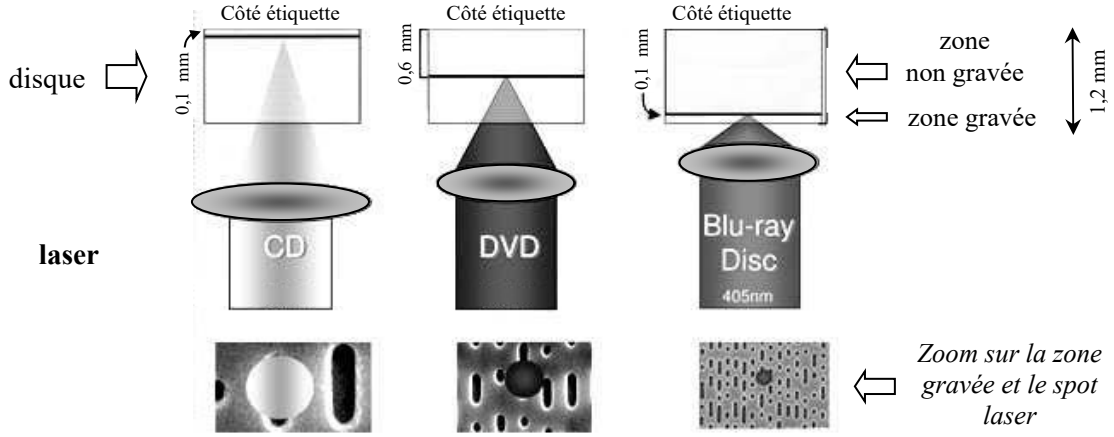
On donne les célérités : $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m·s^{-1} pour la lumière dans l'air, et $c' = 340$ m·s^{-1} pour le son dans l'air à la température considérée. D'autre part, les fréquences des sons audibles sont dans l'intervalle [20 Hz ; 20 kHz] tandis que celles de la lumière visible sont dans l'intervalle $[4 \cdot 10^{14}$ Hz ; $8 \cdot 10^{14}$ Hz$]$.

1. Expliquer pourquoi il faut se placer bien en face de la porte pour voir la lumière.

2. Dans le cas du son, peut-on se placer n'importe où, dans la pièce derrière la porte, pour bien entendre ?

❑ Exercice 1.10. Le laser au quotidien

Si vous regardez aujourd'hui des DVD, naviguez sur le Web, scannez les codes barres, et si certain(e)s peuvent se passer de leurs lunettes, c'est grâce à l'invention du laser, il y a 50 ans.
Intéressons-nous aux lecteurs CD et DVD qui ont envahi notre quotidien. La nouvelle génération de lecteurs comporte un laser bleu (le Blu-ray) dont la technologie utilise une diode laser fonctionnant à une longueur d'onde λ_B = 405 nm dans le vide, d'une couleur bleue (en fait violacée) pour lire et écrire les données. Les CD et les DVD conventionnels utilisent respectivement des lasers infrarouges et rouges.
Les disques Blu-ray fonctionnent d'une manière similaire à celle des CD et des DVD, mais la longueur d'onde différente du laser d'un lecteur Blu-ray permet de stocker plus de données sur un disque de même taille (12 cm de diamètre), la taille minimale du point sur lequel le laser grave l'information étant limitée par la diffraction.
Pour stocker davantage encore d'informations sur un disque, les laboratoires de recherche travaillent sur la mise au point d'un laser ultraviolet.



Simple face ⟹	700 MB	4,7 GB	25 GB	*Capacité de stockage*
Double face ⟹		8,5 GB	50 GB	

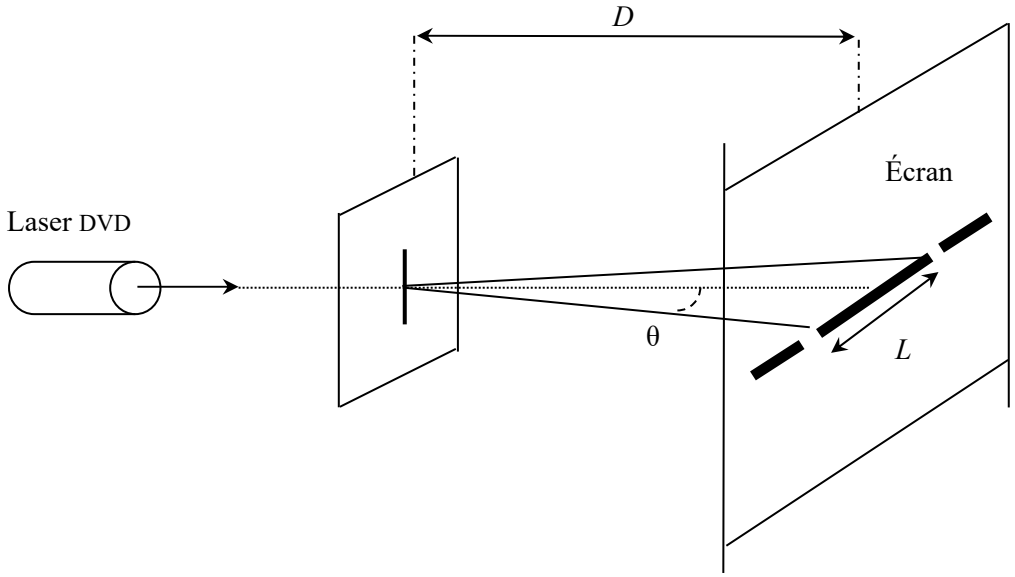
Donnée : on prendra pour la célérité de la lumière dans le vide et dans l'air $c = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

1. a) Quel est le nom du phénomène physique responsable de l'irisation d'un CD ou d'un DVD éclairé en lumière blanche ?

b) Calculer la valeur de la fréquence *f* de la radiation utilisée dans la technologie Blu-ray.

c) Comparer, d'après les indications du texte, la longueur d'onde du laser Blu-ray à celles des systèmes CD et DVD.

2. On veut déterminer expérimentalement la longueur d'onde λ_D de la radiation monochromatique d'un lecteur DVD. On utilise pour cela le montage ci-dessous, dans lequel un faisceau laser est envoyé sur une fente fine de largeur *a*. On note θ le demi-écart angulaire correspondant à la tache centrale de diffraction obtenue sur l'écran.



a) Établir la relation entre θ, L (largeur de la tache centrale de diffraction) et D (distance entre le fil et l'écran).
On supposera θ suffisamment petit pour considérer $\tan\theta \approx \theta$ (avec θ en radians).

b) Donner la relation entre θ, λ_D et a.

c) En déduire l'expression de λ_D en fonction de L, a et D.

d) Pour la figure de diffraction obtenue avec un laser « DVD », on mesure $L = 4{,}8$ cm.
On remplace alors le laser « DVD » par le laser utilisé dans le lecteur Blu-ray sans modifier le reste du montage, on obtient une tache de diffraction de largeur $L' = 3{,}0$ cm.
À partir de ces deux expériences, calculer la valeur de la longueur d'onde λ_D de la radiation monochromatique d'un lecteur DVD et la comparer au résultat de la question **1. c**.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 1.2. La longueur d'onde λ est liée à la fréquence f de ces ondes, et non à la période T de répétition des impulsions.
Exercice 1.3. Déterminer le retard de $u'(t)$ par rapport à $u(t)$, et préciser les valeurs de ce retard donnant deux courbes superposées.
Exercice 1.8. Question 2 : le déphasage des deux ondes en un point est proportionnel à la différence de marche en ce point.
Exercice 1.9. Question 1 : montrer que l'angle de diffraction est très faible.

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	vrai	faux	faux	vrai	faux	vrai	vrai	vrai	vrai

3. Les ondes électromagnétiques peuvent se propager dans le vide.

4. Elles sont liées par la relation $\lambda = cT$.

7. Elle peut être nulle *en certains points*, mais sera non nulle ailleurs.

6. Seules des ondes de même fréquence donnent lieu au phénomène d'interférences.

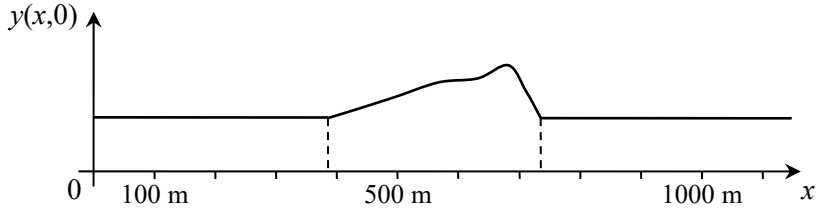
❑ Les erreurs classiques

– Dans l'étude du profil d'une onde quelconque, non périodique, ne pas confondre les variations en fonction de x, à t donné (aspect global instantané du système) et les variations en fonction de t, à x donné (vibrations locales au cours du temps).
– Ne pas confondre les différentes grandeurs caractéristiques d'une onde sinusoïdales ni leurs dimensions (T est un temps, f et ω sont les inverses d'un temps, λ est une longueur).
– Les interférences ne se produisent qu'entre deux ondes sinusoïdales de même nature et *de même fréquence* : ne pas rechercher d'interférences hors de ces critères.

■■ Corrigé des exercices

Exercice 1.1

1. À l'instant t, l'onde s'est déplacée d'une distance $ct = 330$ m, d'où le profil suivant, avec le front de l'onde aux alentours de $x = 730$ m et une queue autour de $x = 380$ m.



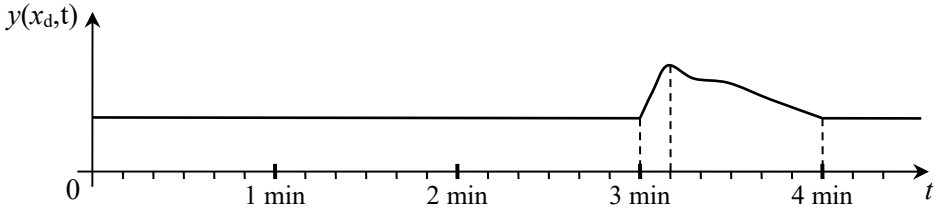
⇨ *Méthode 1.1*

2. Le front de l'onde, qui est en $x_f = 400$ m à l'instant $t_0 = 0$, atteint l'abscisse x_T avec un retard $\boxed{t = \dfrac{x_T - x_f}{c}}$. Application numérique (AN) : $t = \dfrac{2000 - 400}{20} \times 3{,}6$ soit $\boxed{t = 290 \text{ s} = 4 \text{ min } 50 \text{ s}}$.

✎ *Le facteur 3,6 correspond à la conversion des kilomètres par heure en mètres par seconde. D'autre part, la précision des données ne permet pas de donner plus deux chiffres significatifs dans le résultat.*

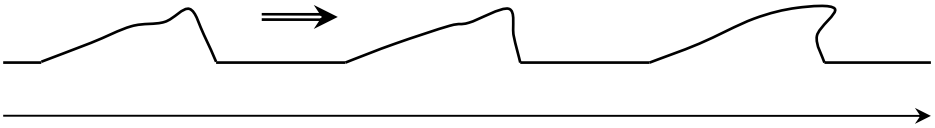
3. Déterminons les instants particuliers pour l'onde à l'abscisse x_d. Le front d'onde arrive avec un retard $t_f = \dfrac{x_d - x_f}{c} = 180 \text{ s} = 3 \text{ min}$. Le sommet, qui était en $x_s = 350$ m à l'instant $t_0 = 0$, arrive en $t_s = \dfrac{x_d - x_s}{c} = 170 \text{ s} = 3 \text{ min } 10 \text{ s}$. Enfin la queue de la vague, qui était en $x_q = 50$ m à l'instant $t_0 = 0$, arrive en $t_s = \dfrac{x_d - x_q}{c} = 240 \text{ s} = 4 \text{ min}$.

L'évolution temporelle à l'abscisse x_d a donc l'allure suivante :



✎ *L'onde apparaît toujours « à l'envers » quand on compare le graphe temporel à x donné et le graphe spatial à t donné : ici le point considéré monte d'abord très vite, lorsqu'il est atteint par le front de la vague, puis redescend lentement au fur et à mesure que le « dos » passe.*

4. La vitesse est plus grande là où la hauteur d'eau est plus grande, donc vers le haut de la vague : ainsi le profil à l'avant va s'accentuer petit à petit jusqu'au déferlement de la vague :



Exercice 1.2

1. a) $\boxed{\lambda = \frac{c}{f}}$. AN $\boxed{\lambda = 10{,}3 \text{ cm}}$.

L'oscillation à l'intérieur de chaque impulsion a une fréquence f, donc une période $T_{\text{imp}} = 1/f$, à ne pas confondre avec la période T séparant deux émissions d'impulsions. Le nombre d'oscillations pendant la durée τ d'une impulsion est donc : $\boxed{N = \frac{\tau}{T_{\text{imp}}} = \tau f}$. AN $\boxed{N = 2900}$.

b) Le temps que met l'onde pour faire un aller-retour entre le radar et un objet détecté à une distance d est : $t = \frac{2d}{c}$, d'où $\boxed{d = \frac{ct}{2}}$. AN $d_A = \frac{ct_A}{2} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8 \times 6 \cdot 10^{-6}}{2}$ soit $\boxed{d_A = 450 \text{ m}}$, et de même $\boxed{d_B = 12{,}0 \text{ km}}$ et $\boxed{d_C = 13{,}5 \text{ km}}$.

La diminution progressive des amplitudes des échos est due à l'absorption partielle des ondes par l'air : plus la distance parcourue dans l'air est grande, plus l'onde est atténuée.

c) Le radar ne peut pas détecter les échos tant qu'il émet, donc la détection de ne peut avoir lieu qu'à des instants $t > \tau = 2{,}0$ µs. Cela correspond à des distances d telles que $\boxed{d > \frac{c\tau}{2} = d_{\min}}$. AN $\boxed{d_{\min} = 150 \text{ m}}$.

2. La variation relative de fréquence est $\boxed{\frac{\Delta f}{f} = \frac{f' - f}{f} = -\frac{v}{c}}$. AN $\boxed{\frac{\Delta f}{f} = -5 \cdot 10^{-7} = -0{,}00005\ \%}$

avec $c = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Pour pouvoir détecter l'effet Doppler, avec ce véhicule pourtant très rapide, il faut donc des appareils pouvant mesurer la fréquence avec au moins 7 chiffres significatifs (et même plus si on veut de la précision sur la vitesse), ce qui n'est pas toujours le cas avec les circuits électroniques utilisés.

3. Deux impulsions successives sont séparées d'une durée T. Si l'objet est immobile, les échos sont aussi séparés de $T = 100{,}0$ µs. En revanche, s'il se déplace le calcul est plus compliqué.

– La première impulsion est émise à $t = 0$ alors que l'objet est à une distance d de l'émetteur. Cette impulsion atteint l'objet à un instant t_1 tel que la distance ct_1 parcourue par l'onde entre 0 et t_1 est égale à la distance $d + vt_1$ séparant l'objet de l'émetteur à t_1 : $ct_1 = d + vt_1$ soit $t_1 = \frac{d}{c - v}$. Après réflexion sur l'objet, l'impulsion parcourt la même distance pendant la même durée dans l'autre sens et revient donc au niveau de l'antenne à l'instant $t_2 = 2t_1 = \frac{2d}{c - v}$.

Corrigé

– La deuxième impulsion est émise à $t_3 = T$ alors que l'objet est à une distance $d + vt_3 = d + vT$ de l'émetteur. Cette impulsion atteint l'objet à un instant t_4 tel que la distance $c(t_4 - t_3) = c(t_4 - T)$ parcourue par l'onde entre t_3 et t_4 est égale à la distance $d + vt_4$ séparant l'objet de l'émetteur à t_4 : $c(t_4 - T) = d + vt_4$ soit $t_4 = \dfrac{d + cT}{c - v}$. Elle revient sur l'antenne après la même durée $t_4 - T$, donc à l'instant $t_5 = t_4 + (t_4 - T) = 2\dfrac{d + cT}{c - v} - T = \dfrac{2d + (c + v)T}{c - v}$.

– Finalement le décalage temporel recherché est $\Delta t = t_5 - t_2$, soit $\boxed{\Delta t = T\dfrac{c + v}{c - v}}$.

> *Notons que pour $v = 0$, c'est-à-dire pour un objet immobile, on retrouve bien $\Delta t = T$.*

An $\boxed{\Delta t = 100{,}0\ \mu\text{s}}$ avec la précision permise par les données. Pour pouvoir distinguer cette valeur Δt de la valeur T pour un objet immobile, cette méthode nécessiterait également une précision extrêmement grande : $\dfrac{\Delta t - T}{T} = \dfrac{2v}{c - v} \approx \dfrac{2v}{c} = 1 \cdot 10^{-6} = 0{,}0001\ \%$, soit un écart relatif juste deux fois plus grand que dans la méthode précédente.

4. Entre deux impulsions successives, c'est-à-dire sur une durée *T*, la distance *d* a augmenté de $v_1 T$, donc la phase a augmenté de $\boxed{\varphi = k \times 2v_1 T = \dfrac{4\pi v_1 T}{\lambda}}$. AN $\boxed{\varphi = 1{,}83\ \text{rad}}\left(\text{un peu plus de } \dfrac{\pi}{2}\right)$, valeur tout à fait mesurable.

5. Mesurer la vitesse transversale v_2 est beaucoup plus facile : il suffit de repérer sur l'écran différentes positions successives de la cible, et de diviser la distance parcourue par la durée.
La norme de la vitesse est alors $\boxed{v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$.

Exercice 1.3

1. L'onde reçue par le microphone a un retard (décalage temporel) $\Delta t = d/c$ par rapport à l'onde émise par le haut-parleur, donc $u'(t)$ (en phase avec le signal du microphone) a le même retard par rapport à $u(t)$ (en phase avec le signal du haut-parleur).
Les deux courbes coïncident si leur décalage temporel est un multiple de la période *T*, soit $\Delta t = d/c = n \times T$. Comme $T = \dfrac{1}{f}$, on en tire la relation : $\boxed{d = n \times \dfrac{c}{f}}$.

2. L'écart entre d_1 et d_2 vaut donc $\dfrac{c}{f}$, d'où $\boxed{c = f(d_2 - d_1)}$. AN $\boxed{c = 330\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$.

Exercice 1.4

1. Par définition : $\boxed{T = \dfrac{1}{f}}$. AN $\boxed{T = 10\ \text{ms}}$.

2. À un instant *t* donné, l'onde présente des maxima voisins séparés d'une distance λ, donc

l'onde a un retard λ/c entre deux de ces maxima. Puisque le retard entre un maximum et le suivant est la période temporelle T, on obtient par identification : $T = \dfrac{\lambda}{c}$ soit $\boxed{f = \dfrac{c}{\lambda}}$.

⇨ *Méthode 1.2*

3. Entre deux points en opposition de phase, la distance peut être $\dfrac{\lambda}{2}, \dfrac{3\lambda}{2}, \dfrac{5\lambda}{2} \ldots$

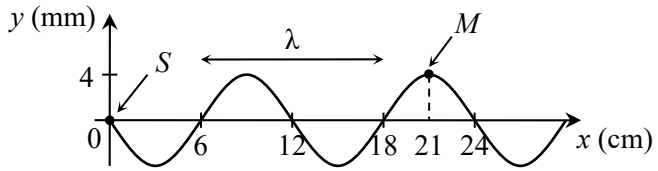
La plus petite valeur est $d = \dfrac{\lambda}{2}$, d'où $\boxed{\lambda = 2d}$. AN $\boxed{\lambda = 12 \text{ cm}}$.

Or $\lambda = cT = \dfrac{c}{f}$, donc $\boxed{c = 2fd}$. AN $\boxed{c = 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$.

4. a) M reçoit l'onde avec un retard $\Delta t = \dfrac{x_M}{c}$. AN $\boxed{\Delta t = 20 \text{ ms}}$.

b) La position de M est telle que $SM = 4d = 2\lambda$: M oscille donc en phase avec S.

5. On constate que $t_1 = 4T$: après 4 périodes, la corde est revenue dans le même état qu'à l'instant $t = 0$, donc à cet instant, S est confondu avec O.
Une photographie de la corde à cette instant donnerait donc l'allure suivante :



On peut hésiter entre deux possibilités pour tracer cette sinusoïde : elle passe par l'origine, mais ensuite est-ce que le début de la courbe est au-dessus ou au-dessous de l'axe ? Or on sait qu'à cet instant, comme à l'instant initial, le point S se déplace vers le haut. Vérifiez que si vous déplacez la sinusoïde ci-dessus vers la droite (sens de propagation de l'onde), cela revient bien à faire monter S.

Exercice 1.5

1. La longueur d'onde est l'écart entre deux maxima consécutifs, donc entre les rayons de deux cercles clairs successifs sur la photo. Pour plus de précision, on mesure l'écart entre le deuxième cercle et le sixième (les deux étant bien nets), soit 4 longueurs d'onde : avec l'échelle indiquée on trouve un écart $e = 3{,}6$ cm, d'où $\boxed{\lambda = 0{,}90 \text{ cm}}$. Alors $\boxed{c = \lambda f}$. AN $\boxed{c = 18 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}}$.

2. La période des ondes est $T = \dfrac{1}{f} = 0{,}05 \text{ s} = 50 \text{ ms}$. Donc $t_1 = 2T$: après un nombre entier de périodes, toutes les grandeurs reprennent la même valeur, donc la photo serait identique.
D'autre part, $t_2 = 2{,}5T$: après une demi-période supplémentaire, les maxima deviennent des minima et inversement, donc le contraste de la photo serait inversé (les cercles blancs deviendraient noirs et inversement).

3. Pour $x > 0$, l'onde se déplace vers les x croissants : $\boxed{z(x,t) = Z_m \cos(\omega t - kx + \varphi)}$.
Pour $x < 0$, l'onde se déplace vers les x décroissants : $\boxed{z(x,t) = Z_m \cos(\omega t + kx + \varphi)}$.

Corrigé

4. Au cours de la propagation, une même énergie totale E se répartit sur des cercles de périmètre $2\pi r$ de plus en plus grand, avec une densité de la forme $k\,Z_{\mathrm{m}}(r)^2$: $E = k\,Z_{\mathrm{m}}(r)^2 \times 2\pi r = \text{cte}$ donc l'amplitude est de la forme $\boxed{Z_{\mathrm{m}}(r) = \dfrac{A}{\sqrt{r}}}$ $\left(\text{avec } A = \sqrt{\dfrac{E}{2\pi k}} = \text{cte}\right)$.

L'expression de l'onde sur l'axe (Ox) est donc : $\boxed{z(x,t) = \dfrac{A}{\sqrt{x}}\cos(\omega t - k x + \varphi)}$ pour $x > 0$, et $\boxed{z(x,t) = \dfrac{A}{\sqrt{-x}}\cos(\omega t + k x + \varphi)}$ pour $x < 0$.

Exercice 1.6

1. $\boxed{\lambda = \dfrac{c}{f}}$. AN $\boxed{15\text{ km} < \lambda < 15000\text{ km}}$. Il faudrait donc des antennes de plusieurs kilomètres !

2. Cette fois on trouve $\boxed{2{,}8\text{ m} < \lambda < 3{,}4\text{ m}}$. Les antennes peuvent donc cette fois avoir une taille de l'ordre du mètre ou de quelques dizaines de centimètres.

3. Si les stations de radio émettaient toutes dans le domaine des audiofréquences, leurs émissions se mélangeraient et il n'y aurait aucun moyen pour le récepteur de les séparer. Tandis que l'émission de chaque station dans son propre domaine de fréquences permet de la séparer des autres par filtrage (voir chapitre **8**).

Exercice 1.7

1. a) L'onde se propage vers les x croissants donc elle arrive au point M avec un retard x/c par rapport au point O : alors $\boxed{y_M(t) = a\cos\left(\omega\left(t - \dfrac{x}{c}\right)\right)}$.

b) Cette équation horaire peut encore s'écrire $y_M(t) = a\cos(\omega t - k x)$ en posant $\boxed{k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi f}{c}}$.

AN $\boxed{k = 25\text{ rad}\cdot\text{m}^{-1}}$. La longueur d'onde est $\boxed{\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{c}{f}}$. AN $\boxed{\lambda = 25\text{ cm}}$.

2. a) L'onde incidente est l'onde précédente, valant $\boxed{y_{B\mathrm{i}}(t) = a\cos(\omega t)}$ à l'origine B. L'onde réfléchie en B est déphasée de φ, soit $\boxed{y_{B\mathrm{r}}(t) = a\cos(\omega t + \varphi)}$. Or B est fixé, donc son élongation résultant des deux ondes est toujours nulle : $y_B(t) = a\cos(\omega t) + a\cos(\omega t + \varphi) = 0, \forall t$.

Cela impose donc $\boxed{\varphi = \pi}$ puisque $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$, soit $\boxed{y_{B\mathrm{r}}(t) = -a\cos(\omega t)}$.

b) L'onde incidente est toujours $\boxed{y_{M\mathrm{i}}(t) = a\cos\left(\omega\left(t - \dfrac{x}{c}\right)\right)}$. L'onde réfléchie se propage vers les x décroissants donc $\boxed{y_{M\mathrm{r}}(t) = -a\cos\left(\omega\left(t + \dfrac{x}{c}\right)\right)}$. L'élongation résultante est alors :

$y_M(t) = a\cos\left(\omega\left(t - \dfrac{x}{c}\right)\right) - a\cos\left(\omega\left(t + \dfrac{x}{c}\right)\right)$ soit $\boxed{y_M(t) = 2a\sin(k x)\sin(\omega t)}$.

c) Les nœuds sont les points où l'amplitude $2a\sin(kx)$ est nulle :

$kx = n\pi$ soit $\boxed{x_{\text{nœuds}} = n\dfrac{\pi}{k} = n\dfrac{\lambda}{2}}$ avec n entier. AN $\boxed{x_{\text{nœuds}} = n \times 12{,}5 \text{ cm}}$.

D'après la théorie des interférences, deux ondes qui se superposent en un point donnent un signal nul, c'est-à-dire des interférences destructives, si leur déphasage est un multiple impair de π. Vérifions que c'est bien le cas ici pour les abscisses ci-dessus. Il faut écrire les deux signaux sous la même forme $a\cos(\omega t + \varphi(M))$:

$y_{Mi}(t) = a\cos\left(\omega t - \dfrac{\omega x}{c}\right)$ d'où $\varphi_i(M) = -\dfrac{\omega x}{c}$;

$y_{Mr}(t) = -a\cos\left(\omega t + \dfrac{\omega x}{c}\right) = a\cos\left(\omega t + \dfrac{\omega x}{c} + \pi\right)$ d'où $\varphi_r(M) = \dfrac{\omega x}{c} + \pi$.

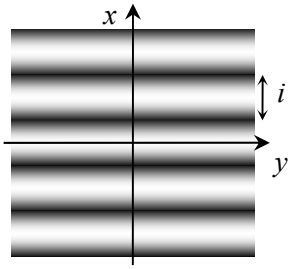
Le déphasage entre eux est donc $\varphi(M) = \varphi_r(M) - \varphi_i(M) = 2\dfrac{\omega x}{c} + \pi = 2kx + \pi$. Pour les points ci-dessus, $2kx = 2n\pi$ donc on a bien trouvé $\boxed{\varphi(M) = (2n+1)\pi}$.

Exercice 1.8

1. La déviation de la lumière dans toutes les directions par les trous est la diffraction.

2. Le déphasage est proportionnel à la différence des chemins parcourus par les deux ondes : $\varphi = k\delta = \dfrac{2\pi}{\lambda}\delta$ soit $\boxed{\varphi = \dfrac{2\pi ax}{\lambda D}}$. Les interférences sont constructives si $\varphi = 2m\pi$, et destructives si $\varphi = (2m+1)\pi$, avec m entier.

3. D'après la question précédente : $\varphi = \dfrac{2\pi ax}{\lambda D} = (2m+1)\pi$ donc $\boxed{x = \left(m + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda D}{a} = \text{cte}}$. Dans le plan ($Oxy$), une équation de la forme $x = \text{cte}$ caractérise une droite parallèle à l'axe (Oy).
La figure d'interférences a donc l'allure ci-contre.



4. L'interfrange i est la distance entre les franges repérées par m et $m+1$, soit $\boxed{i = \dfrac{\lambda D}{a}}$. AN $\boxed{i = 0{,}60 \text{ mm}}$.
Les franges sont très serrées mais visibles à l'œil nu.

5. On calcule $\varphi = \dfrac{2\pi ax_a}{\lambda D}$: on obtient $\varphi = 4{,}7$ rad soit $\boxed{\varphi = 270°}$ qui n'est pas multiple de 180° (ou π en radians). En ce point l'intensité n'est donc ni maximale, ni minimale : on est sur une frange intermédiaire.

Exercice 1.9

1. Au passage à travers une ouverture de largeur L, une onde subit le phénomène de diffraction qui la fait diverger. La largeur angulaire θ de la zone d'intensité importante vérifie $\sin\theta = \dfrac{\lambda}{L}$, où $\lambda = \dfrac{c}{f}$ est la longueur d'onde, soit $\boxed{\sin\theta = \dfrac{c}{Lf}}$.

Corrigé

Faisons l'application numérique pour des ondes lumineuses : $6{,}1\cdot10^{-7} < \sin\theta < 1{,}2\cdot10^{-6}$ soit le même encadrement pour θ (en radians). La diffraction de la lumière est donc quasi nulle, et toute l'onde continue dans la direction incidente : il faut donc se placer en face de la porte pour être éclairé(e).

2. Faisons l'application numérique pour des ondes sonores. Pour les sons les plus aigus (20 kHz) on trouve $\sin\theta = 0{,}028$, soit $\theta = 1{,}6°$: les sons très aigus sont donc très peu diffractés. En revanche l'angle augmente lorsque la fréquence diminue, et on trouve par exemple $\sin\theta = 0{,}5$, soit $\theta = 60°$, pour une fréquence de l'ordre de 1 kHz, correspondant à la voix humaine : ce type de son est donc très largement diffracté par la porte, et on peut donc bien entendre en n'étant pas en face de la porte. Quant aux fréquences les plus basses, la formule précédente n'est plus valable puisqu'elle donne $\sin\theta > 1$: l'onde est donc diffractée uniformément dans tout l'espace, et on peut se placer n'importe où dans la pièce suivante pour entendre distinctement les sons graves.

Exercice 1.10

1. a) L'irisation de la lumière à la surface d'un CD ou d'un DVD est due à la diffraction de la lumière par les fines rainures de la surface, qui constituent ce qu'on appelle un *réseau*.

b) $\lambda = \dfrac{c}{f}$ d'où $\boxed{f = \dfrac{c}{\lambda_B}}$. AN $\boxed{f = 7{,}41\cdot10^{14}\ \text{Hz} = 741\ \text{THz}}$.

c) On ne dispose pas de valeur numériques, mais les CD et DVD utilisant des lasers infrarouges et rouges, leurs longueurs d'onde sont supérieures à celle du Blu-ray.

2. a) On voit un triangle rectangle dans lequel on peut écrire : $\tan\theta = \dfrac{L/2}{D}$, soit $\boxed{\theta = \dfrac{L}{2D}}$ compte tenu de l'approximation indiquée.

b) Dans une figure de diffraction, la largeur angulaire de la tache centrale vérifie $\sin\theta = \dfrac{\lambda}{a}$, soit ici $\boxed{\theta = \dfrac{\lambda_D}{a}}$.

c) En combinant les deux on obtient $\boxed{\lambda_D = \dfrac{aL}{2D}}$.

d) $\lambda_B = \dfrac{aL'}{2D}$ donc en faisant le rapport on obtient $\boxed{\lambda_D = \lambda_B \dfrac{L}{L'}}$. AN $\boxed{\lambda_D = 648\ \text{nm}}$.

Comme prévu à la question **1. c**, c'est bien une valeur supérieure à celle du Blu-ray, et qui correspond à une couleur rouge.

Chapitre 2

Bases de l'optique géométrique

UN SCIENTIFIQUE



Willebrord Snell (1580-1626) est un mathématicien et physicien hollandais. Enfant prodige, il acquiert bientôt une immense culture dans le domaine scientifique. Il rencontre les plus grands savants de son époque et se lance dans des recherches dans de nombreux domaines : astronomie, mesure de la Terre, approximation du nombre π. En optique, il s'intéresse aux miroirs concaves et convexes. Il énonce la loi de réfraction attribuée en France à Descartes.

Un peu d'histoire

Qui a découvert la loi de réfraction de la lumière ? En 984, le mathématicien arabe Ibn Sahl explique, schémas à l'appui, le lien entre l'angle d'incidence et celui de réfraction d'un rayon lumineux. Ses travaux restent totalement inconnus en Occident. Thomas Harriot découvre cette loi en 1602 mais il ne fait aucune publication. Elle est à nouveau énoncée en 1621 par le mathématicien hollandais Willebrord Snell qui, lui non plus, n'en fait pas état publiquement. En 1637 René Descartes publie le *Discours de la méthode* dans lequel il énonce les principes de la rationalité scientifique. Il le fait suivre de trois appendices ; le premier est un manuel d'optique dans lequel il énonce la loi de réfraction, sans connaître les travaux de ses prédécesseurs. Quelques années plus tard, Pierre de Fermat justifie cette loi par le principe du temps minimum de parcours.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- Les définitions concernant la lumière (aspects ondulatoire et particulaire), sa propagation et ses sources
- Le modèle de l'optique géométrique et ses limites
- Les lois de Snell–Descartes pour la réflexion et la réfraction
- Les définitions concernant les systèmes optiques et la formation d'images
- Les conditions de l'approximation de Gauss et ses conséquences
- Le principe de fonctionnement d'une fibre optique

Ce qu'il faut savoir faire

- Relier la longueur d'onde dans le vide, celle dans un autre milieu et la couleur
- Utiliser les lois de Snell–Descartes pour déterminer des rayons réfléchis ou réfractés
- Étudier les cas de réfraction limite et réflexion totale
- Calculer des angles et des distances avec des formules géométriques
- Construire l'image d'un objet par un miroir plan et identifier sa nature réelle ou virtuelle
- Établir les expressions du cône d'acceptance et de la dispersion intermodale d'une fibre optique

■■ Résumé de cours

■ Propagation de la lumière

❑ Nature de la lumière

– Selon le **modèle ondulatoire** de la lumière, il s'agit d'une onde électromagnétique, c'est-à-dire d'une propagation de variations périodiques des champs électrique et magnétique, dans un milieu matériel ou dans le vide.

Une lumière **monochromatique** est décrite par une fonction sinusoïdale de fréquence *f*. La lumière visible correspond à l'intervalle $4 \cdot 10^{14}\ \text{Hz} < f < 8 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$ environ. Les autres fréquences correspondent à d'autres types d'ondes électromagnétiques (voir chapitre **1**).

– Un autre modèle, dit **particulaire** ou **corpusculaire**, décrit la lumière (et les autres ondes électromagnétiques) comme un flux de particules appelés **photons**.

Un photon est une particule de masse nulle, de charge nulle, possédant une **énergie** $\boxed{E = hf}$ où $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$ est la **constante de Planck** et *f* la fréquence : cette formule relie donc les deux modèles. Le modèle particulaire permet notamment d'interpréter les interactions entre lumière et matière : une particule (électron, molécule…) peut changer de niveau d'énergie en absorbant ou en émettant un photon.

❑ Indice et longueur d'onde

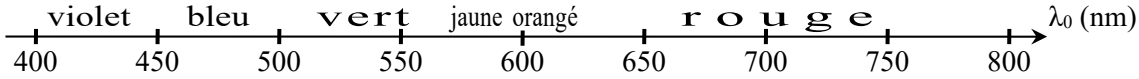
– La **célérité** (vitesse de propagation) de la lumière dans le vide est $c = 299\,792\,458\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Sa célérité dans un milieu transparent quelconque est $\boxed{v = \dfrac{c}{n}}$ où *n* est l'**indice de réfraction** ($n \geq 1$), caractéristique du milieu et dépendant de la fréquence (donc de la longueur d'onde).

n = 1,0003 pour l'air (conditions usuelles), *n* = 1,33 pour l'eau, *n* = 1,5 à 1,8 pour les verres.

– Une lumière monochromatique a une fréquence *f* déterminée par l'émetteur, et une longueur d'onde λ telle que $\lambda = \dfrac{v}{f}$. La longueur d'onde dans le vide est $\lambda_0 = \dfrac{c}{f}$, donc $\boxed{\lambda = \dfrac{\lambda_0}{n}}$.

– Échelle des couleurs :



❑ Approximation de l'optique géométrique

L'optique géométrique modélise la lumière comme un ensemble de **rayons lumineux** : chaque rayon est une courbe décrite par la lumière pour aller d'un point à un autre.

Les rayons lumineux sont *indépendants* les uns des autres ; ceci suppose qu'il n'y a pas d'interférences (toujours vrai en pratique).

Dans un milieu transparent homogène et isotrope (seul type de milieu envisagé ici), les rayons sont *rectilignes* ; ceci suppose qu'on évite la diffraction, tous les systèmes étant suffisamment larges.

■ Sources de lumière

❑ Types de sources

– Les **sources de lumière blanche** (lampes à incandescence, à LED blanche…) ont un spectre *continu* (constitué de toutes les fréquences dans l'intervalle du visible, et même au-delà).
– Les **lampes spectrales** (notamment à vapeur métallique : mercure, sodium…) ont un spectre caractéristique de l'élément chimique, qui peut être considéré comme *discret* (constitué seulement de quelques fréquences distinctes).
– Les **lasers** émettent une lumière qui peut être considérée comme monochromatique.

❑ Modèle de la source ponctuelle monochromatique

Une source de lumière est en général étendue (elle présente une certaine surface). Mais elle peut être *modélisée* comme un ensemble de **sources ponctuelles**.
De plus on se limitera, si nécessaire, à des sources ponctuelles monochromatiques.

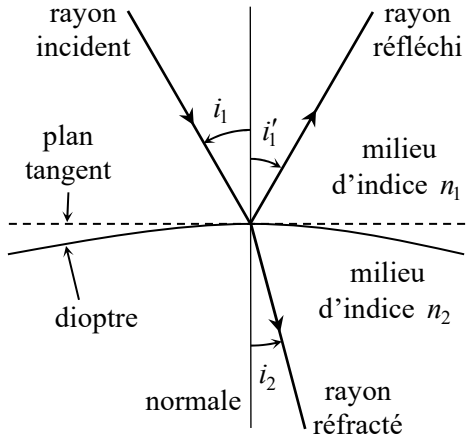
■ Réflexion et réfraction

❑ Description

Lorsqu'un rayon lumineux, dit **incident**, arrive sur un **dioptre** (interface entre deux milieux d'indices différents), il donne naissance en général à un rayon **réfléchi** (dans le milieu initial) et à un rayon **transmis** ou **réfracté** (dans le second milieu).
À partir du point d'intersection entre le rayon incident et le dioptre, on définit la normale, droite orthogonale au dioptre. Cette normale et le rayon incident définissent le **plan d'incidence**.

❑ Lois de Snell–Descartes

1. Les rayons réfléchi et réfracté sont dans le plan d'incidence.
2. L'angle i_1' de réflexion est : $i_1' = -i_1$ (ou bien $i_1' = i_1$ avec des angles non orientés).
3. L'angle i_2 de réfraction est lié à l'angle i_1 d'incidence par : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.



Les expressions avec des angles orientés montrent que le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont de l'autre côté de la normale, par rapport au rayon incident.

Ces lois ont pour conséquence la **loi de retour inverse de la lumière** : le trajet suivi par la lumière pour aller d'un point A à un point B est le même que celui suivi pour aller de B à A.

Remarques
- Lorsque le rayon réfracté est présent, on néglige souvent le rayon réfléchi.
- Si la surface est un miroir, il n'y a pas de rayon réfracté.

❑ Réfraction limite et réflexion totale

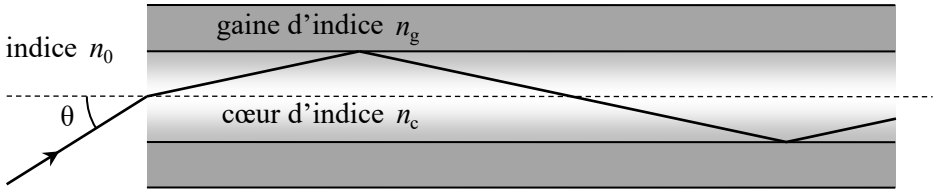
- Si $n_2 > n_1$, il y a toujours un rayon réfracté (en plus du rayon réfléchi).
- Si $n_2 < n_1$, le rayon réfracté n'existe que lorsque l'angle i_1 est inférieur à une valeur limite, notée i_{lim} : celle-ci correspond au cas où $i_2 = \dfrac{\pi}{2}$, soit $\boxed{i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\dfrac{n_2}{n_1}\right)}$.

Lorsque $i_1 > i_{\text{lim}}$, il n'y a pas de réfraction, il y a donc **réflexion totale**.

⇨ **Méthode 2.1. Déterminer un rayon réfracté et étudier la réfraction limite**

❑ Application : fibre optique

Une application du phénomène de réflexion totale est la **fibre optique à saut d'indice** : un fil cylindrique transparent constitué d'un cœur d'indice n_c entouré d'une gaine d'indice $n_g < n_c$.



- Tout rayon pénétrant dans la fibre avec un angle $\theta < \theta_a$ sera guidé par réflexion interne : l'angle maximal θ_a caractérise le **cône d'acceptance** de la fibre. Son **ouverture numérique** est $o_n = n_0 \sin\theta_a$ où n_0 est l'indice du milieu extérieur. Le calcul donne $o_n = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$.
- Lors du guidage d'un faisceau lumineux dans une fibre optique de longueur donnée, tous les rayons n'ont pas la même durée de trajet : on appelle **dispersion intermodale** la différence de temps $\Delta\tau$ entre les rayons les plus lents et les rayons les plus rapides. Pour une bonne transmission de l'information, $\Delta\tau$ ne doit pas être trop élevée.

⇨ **Méthode 2.2. Établir l'expression de l'ouverture numérique d'une fibre optique**

■ Formation d'images par un système optique

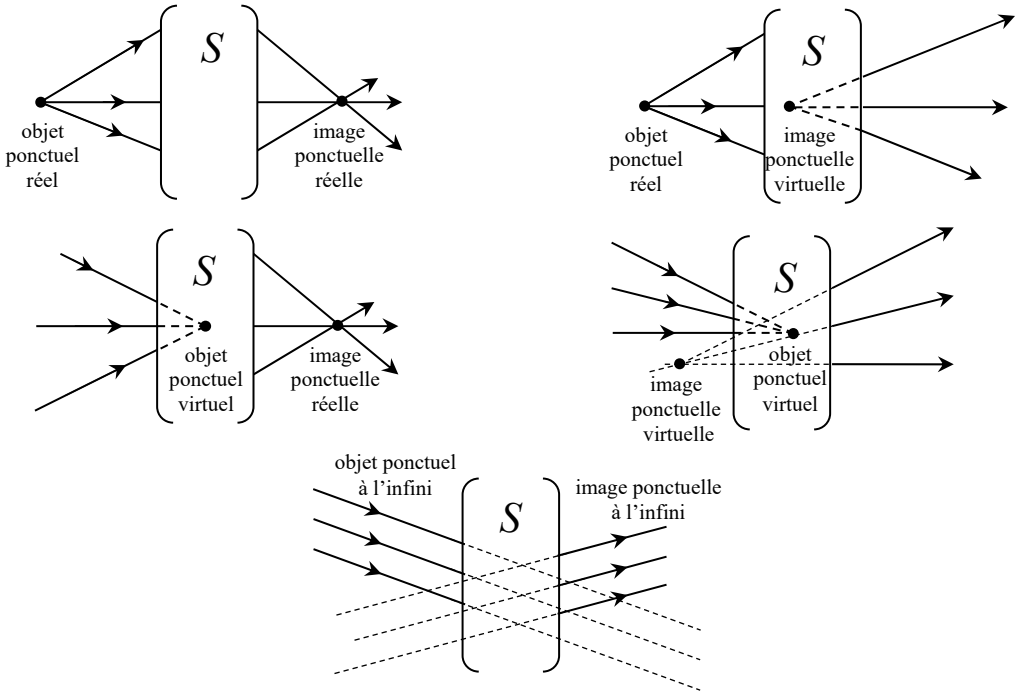
❑ Système optique

Un **système optique** est un ensemble de dioptres et/ou de miroirs, qui modifie la trajectoire des rayons lumineux. Son rôle est de donner une image d'un objet.

❑ Stigmatisme, objets et images

Une intersection d'un grand nombre de rayons incidents, ou de leurs prolongements, est appelée **point objet**. Il est **réel** si les rayons sont vraiment issus de ce point, et **virtuel** si seuls les

prolongements des rayons convergent vers ce point. Des rayons incidents parallèles entre eux définissent un objet **à l'infini** (cas limite d'un objet réel ou virtuel).
Après la traversée d'un système optique, on peut envisager deux cas :
– soit les rayons émergents correspondant aux rayons issus de chaque point objet A convergent vers un point A' ou semblent provenir d'un point A', on dit alors que le système est **stigmatique** et A' est appelé **point image** de A ;
– soit ces rayons émergent de façon désordonnée, et le système n'est pas stigmatique.
Pour un système stigmatique, l'image est **réelle** si les rayons convergent vraiment vers A', et **virtuelle** s'ils semblent provenir de A' (leurs prolongements se coupant en A'). Enfin l'image est **à l'infini** si les rayons émergents sont parallèles entre eux (cas limite d'une image réelle ou virtuelle).
Quelques exemples de combinaisons possibles :

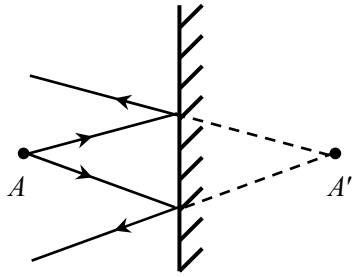


Un objet réel se trouve donc du côté de la lumière incidente, avant la face d'entrée du système, contrairement à un objet virtuel.
Une image réelle se trouve du côté de la lumière émergente, après la face de sortie du système, contrairement à une image virtuelle.

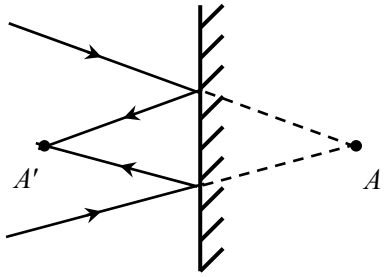
⇨ **Méthode 2.3. Calculer des distances à partir des angles**

❑ Exemple du miroir plan

Le miroir plan est un exemple simple de système optique.
L'image d'un point objet A par un miroir plan est un point image A' symétrique de A par rapport au miroir. Si A est réel, A' est virtuelle ; si A est virtuel, A' est réelle.



objet réel, image virtuelle



objet virtuel, image réelle

⇨ **Méthode 2.4. Déterminer l'image d'un objet par un miroir plan**

❑ Systèmes centrés

Définition

Un système optique est **centré** s'il possède un axe de symétrie de révolution, appelé **axe optique**. Un rayon incident confondu avec cet axe ne sera donc pas dévié par le système.
De plus, d'après la première loi de Snell–Descartes, un rayon incident contenu dans un plan méridien (contenant l'axe) sera ensuite réfracté et/ou réfléchi dans ce plan.

Aplanétisme

Un système centré sera utilisable comme instrument s'il possède la propriété d'**aplanétisme** : l'image d'un objet plan orthogonal à l'axe optique est également plane et orthogonale à l'axe.

Conditions de Gauss

Aucun système optique, excepté le miroir plan, n'est rigoureusement stigmatique ; cependant, les grains d'un détecteur (cellules de la rétine, d'une plaque numérique…) ne sont pas ponctuels mais ont eux-mêmes une certaine largeur, donc un stigmatisme approché est suffisant.
Pour les systèmes optiques centrés, on peut obtenir un stigmatisme approché en ne laissant pénétrer dans le système que les rayons **paraxiaux**, c'est-à-dire rencontrant le système près de l'axe optique et peu inclinés par rapport à celui-ci. Ce sont les **conditions de Gauss**, qui se réalisent pratiquement à l'aide d'un diaphragme et en observant des objets petits et/ou éloignés.

Foyers et plans focaux

Les systèmes optiques centrés, dans les conditions de Gauss, possèdent deux points particuliers :
– le **foyer principal objet** F dont l'image par le système est à l'infini sur l'axe ;
– le **foyer principal image** F', image d'un point objet situé sur l'axe et à l'infini.
Si ces deux points sont à l'infini, le système est dit **afocal** (c'est le cas du miroir plan).

Le plan passant par F (resp. F') et orthogonal à l'axe est le **plan focal objet** (resp. **image**).

– D'après la propriété d'aplanétisme, en dehors de F', tout point du plan focal image, appelé **foyer image secondaire**, est l'image d'un point objet situé à l'infini mais hors de l'axe.
– De même, en dehors de F, tout point du plan focal objet, appelé **foyer objet secondaire**, a son image à l'infini mais hors de l'axe.

■■ Méthodes

■ Comment utiliser les lois de Snell–Descartes ?

❑ Méthode 2.1. Déterminer un rayon réfracté et étudier la réfraction limite

– La loi de la réfraction donne $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin i_1$, d'où $i_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i_1\right)$.

– Le rayon réfracté n'existe que si on trouve $\sin i_2 < 1$, donc si $\frac{n_1}{n_2}\sin i_1 < 1$ ou encore $\sin i_1 < \frac{n_2}{n_1}$. Cette condition est toujours vérifiée si $n_2 > n_1$; mais si $n_2 < n_1$ alors l'angle incident i_1 ne doit pas dépasser la valeur limite $i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ pour que le rayon réfracté existe.

⇨ **Exercices 2.4 à 2.6, 2.8 à 2.13, 2.15**

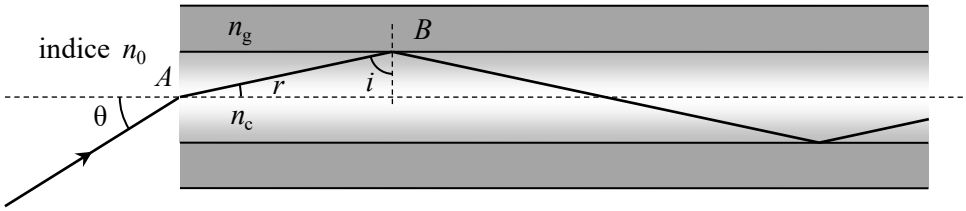
Exemple : un rayon lumineux passe de l'eau ($n_1 = 1{,}3$) vers l'air ($n_2 = 1{,}0$). Le rayon incident forme un angle $i_1 = 30°$ avec la normale au dioptre au point d'intersection avec le dioptre. Le rayon réfracté formera avec cette même normale un angle $i_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i_1\right) = 40{,}6°$.

L'angle limite vaut $i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = 50{,}3°$. Les rayons ayant un angle incident supérieur à cette valeur ne donnent pas naissance à un rayon réfracté : dans ce cas, il y a seulement un rayon réfléchi et le dioptre se comporte comme un miroir.

❑ Méthode 2.2. Établir l'expression de l'ouverture numérique d'une fibre optique

– Après avoir défini les trois angles qui interviennent dans les calculs, on écrit la condition de réflexion totale sur le dioptre entre le cœur et la gaine, et la loi de la réfraction au point d'entrée dans la fibre (dioptre entre l'extérieur et le cœur).
– On relie géométriquement deux de ces angles, et la combinaison de toutes ces relations fait apparaître l'inégalité cherchée sur l'angle d'entrée.

⇨ **Exercice 2.15**



Au point B, comme $n_c > n_g$, il existe pour l'angle i d'incidence une valeur limite i_{lim} telle que $\sin i_{lim} = \dfrac{n_g}{n_c}$. La condition de réflexion totale s'écrit : $\sin i > \dfrac{n_g}{n_c}$ (1).

Au point A, la loi de Snell–Descartes s'écrit : $n_0 \sin\theta = n_c \sin r$ (2). Or $r = \dfrac{\pi}{2} - i$ (angles complémentaires dans le triangle rectangle), donc $\sin r = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - i\right) = \cos i$.

On doit donc déterminer, à partir de la relation (1), une inégalité pour $\cos i$: sachant que $\sin^2 i + \cos^2 i = 1$, la relation (1) devient : $\sqrt{1-\cos^2 i} > \dfrac{n_g}{n_c}$ d'où $\cos^2 i < 1 - \dfrac{n_g^2}{n_c^2} = \dfrac{n_c^2 - n_g^2}{n_c^2}$.

Finalement : $(2) \Leftrightarrow n_0 \sin\theta = n_c \cos i < n_c \sqrt{\dfrac{n_c^2 - n_g^2}{n_c^2}} = \sqrt{n_c^2 - n_g^2} = n_0 \sin\theta_a$.

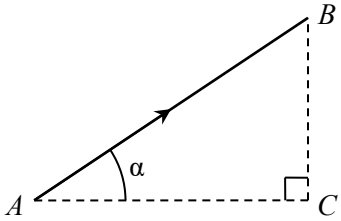
L'ouverture numérique est donc : $\boxed{o_n = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}}$.

■ Comment obtenir les relations géométriques cherchées ?

❑ Méthode 2.3. Calculer des distances à partir des angles

Les lois de Snell–Descartes ne donnent que des relations entre des angles. Pour déterminer des distances ou des mesures algébriques, on combine ces lois avec des relations de trigonométrie, notamment dans des triangles rectangles.

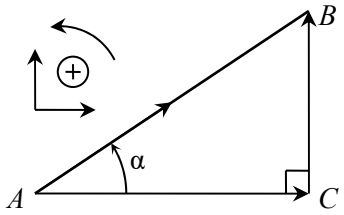
⇨ **Exercices 2.11, 2.12, 2.13, 2.15**



Dans ce triangle rectangle on peut écrire :
$\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$, $\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB}$, $\tan\alpha = \dfrac{BC}{AC}$.

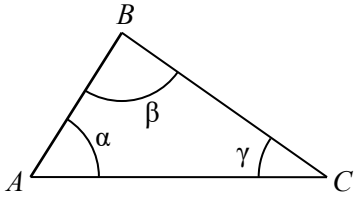
La formule de la tangente peut aussi s'écrire avec un angle orienté et des mesures algébriques :

$$\tan\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}.$$



Enfin on peut écrire la formule des sinus pour un triangle quelconque :

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{CA}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\gamma}.$$

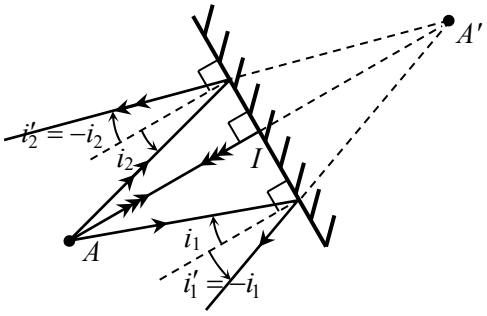


■ Comment déterminer l'image d'un objet ponctuel par un système optique ?

❑ Méthode 2.4. Déterminer l'image d'un objet par un miroir plan

Tracer au moins trois rayons incidents se coupant en un même point A, réel ou virtuel. Construire les rayons réfléchis selon les lois de Snell–Descartes. On constate que ces rayons, ou leurs prolongements, se coupent en un même point A', qui est donc l'image de A. Et les différents triangles symétriques montrent que A' est le symétrique de A par rapport au plan du miroir.

⇨ Exercice 2.14



Pour un point objet A réel (faisceau incident divergent), comme ci-dessus, l'image A' est l'intersection des *prolongements* des rayons réfléchis (faisceau réfléchi divergent également), donc A' est un point image *virtuel*. Effectivement, quand on se regarde dans une glace, notre image est virtuelle : si on mettait un écran là où semble se trouver notre image, c'est-à-dire derrière le mur où est fixé le miroir, on ne verrait rien sur l'écran !

■■ Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	La lumière se propage plus vite dans l'eau $(n_{\text{eau}} = 1,3)$ que dans l'air $(n_{\text{air}} = 1,0)$.	☐	☐
2.	L'indice d'un milieu homogène transparent et isotrope dépend de la fréquence de la lumière qui le traverse.	☐	☐
3.	La lumière solaire peut être considérée comme monochromatique.	☐	☐
4.	La lumière d'un laser peut être considérée comme monochromatique.	☐	☐
5.	Lors du passage d'un milieu d'indice faible à un milieu d'indice plus élevé, le rayon se rapproche de la normale.	☐	☐
6.	On peut observer un phénomène de réflexion totale lorsqu'un rayon lumineux passe d'un milieu peu réfringent à un milieu plus réfringent.	☐	☐
7.	Lors du phénomène de réflexion, la direction du rayon réfléchi dépend de la longueur d'onde de la lumière.	☐	☐
8.	Lors du phénomène de réfraction, la direction du rayon réfracté dépend de la longueur d'onde de la lumière.	☐	☐
9.	Un système optique centré ne dévie pas les rayons incidents parallèles à son axe optique.	☐	☐
10.	Le foyer principal image F' d'un système optique centré est l'image par ce système du foyer principal objet F.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

■ Indice et longueur d'onde

❑ Exercice 2.1. Fréquence et longueur d'onde

La lumière visible possède des longueurs d'onde dans le vide comprises entre 0,40 et 0,80 µm.

1. À quel intervalle de fréquences cela correspond-il ?

2. Que deviennent ces longueurs d'onde :

a) dans l'eau, d'indice $n = 1{,}3$? **b)** dans un verre, d'indice $n' = 1{,}5$?

Donnée : $c = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

❑ Exercice 2.2. Longueur d'onde et couleur

Un laser émet une radiation lumineuse quasi monochromatique de fréquence $f = 4{,}73 \cdot 10^{14}$ Hz.

On donne $c = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (vitesse de la lumière dans le vide).

1. Pourquoi qualifie-t-on cette radiation de « quasi monochromatique » ?

2. Quelle est la longueur d'onde dans le vide de cette radiation ? Quelle est sa couleur ?

3. On considère maintenant que cette radiation se propage dans un milieu d'indice 1,66.
Quelle est la vitesse de propagation de la lumière dans ce milieu ?
Quelle est alors la longueur d'onde de la radiation du laser ? Quelle est sa couleur ?

❑ Exercice 2.3. Loi de Cauchy

La formule de Cauchy, donnant l'indice d'un verre pour une radiation monochromatique de longueur d'onde λ_0 dans le vide, est : $n = A + \dfrac{B}{\lambda_0^2}$ où A et B sont des constantes.

1. Donner les dimensions de A et B, et leurs unités dans le Système international.

2. Des mesures effectuées avec un même verre ont donné :
$n_\text{r} = 1{,}618$ pour une radiation rouge de longueur d'onde dans le vide $\lambda_{0\text{r}} = 768$ nm ;
$n_\text{v} = 1{,}652$ pour une radiation violette de longueur d'onde dans le vide $\lambda_{0\text{v}} = 434$ nm.

a) Calculer les valeurs de A et B.

b) En déduire la valeur de l'indice pour une radiation jaune telle que $\lambda_{0\text{j}} = 589$ nm.

■ Réflexion et réfraction

❑ Exercice 2.4. Réfraction et dispersion

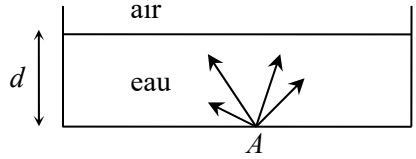
Un rayon lumineux, se propageant dans l'air, arrive avec une incidence $i = 40°$ sur un dioptre air/verre plan. Si ce rayon est constitué de lumière blanche, calculer l'écart angulaire entre les rayons réfractés extrêmes.

Données : l'indice du verre est donné par la formule de Cauchy : $n = A + \dfrac{B}{\lambda_0^2}$, avec $A = 1{,}504$ et $B = 4{,}188 \cdot 10^{-15}$ unité SI ; l'indice de l'air est $n_a = 1{,}000$.

❑ Exercice 2.5. Condition d'émergence

1. Quelle est la condition pour qu'un rayon passant de l'eau (indice n_{eau} = 1,33) à l'air (indice n_{air} = 1,00) soit réfracté ?

2. On place une source de lumière (supposée ponctuelle) au fond d'une piscine remplie d'eau, de profondeur d = 2,50 m. Donner les dimensions de la zone de la surface qui sera traversée par des rayons lumineux.



❑ Exercice 2.6. Capteur de niveau d'eau

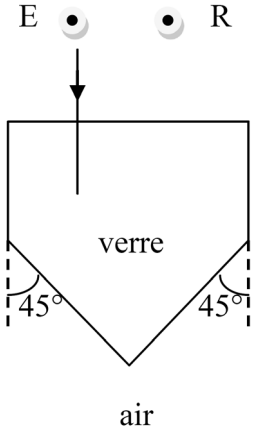
On désire connaitre le niveau du liquide dans un château d'eau. Pour cela on l'équipe d'un capteur optique schématisé sur la figure ci-contre. L'émetteur (E) est un faisceau laser et le récepteur (R) une photodiode. Cette dernière fournit un signal électrique lorsqu'elle reçoit de la puissance lumineuse.

L'indice du verre est n = 1,5 ; celui de l'air est 1.

1. Montrer que le faisceau laser se réfléchit totalement sur les faces et ressort en (R).

2. À la place de l'air, il y a maintenant de l'eau d'indice n' = 1,33. Le récepteur (R) reçoit il toujours de la lumière ?

3. Expliquer comment utiliser ce dispositif pour connaitre le niveau de remplissage du château d'eau.



D'après G2E

❑ Exercice 2.7 Construction de Descartes*

On considère un rayon lumineux passant d'un milieu d'indice $n_1 = 1{,}5$ (verre) à un milieu d'indice $n_2 = 1{,}0$ (air).

1. a) Faire un schéma du plan d'incidence, avec le milieu 1 en haut, et tracer le rayon incident. On note I le point d'intersection de ce rayon avec le dioptre.

b) Construire dans le milieu 2 deux demi-cercles de même centre I, l'un (C_1) de rayon proportionnel à n_1 et l'autre (C_2) de rayon proportionnel à n_2 (échelle au choix).

Soit J le point d'intersection du prolongement du rayon incident avec C_1 : à partir de J, on trace une droite Δ parallèle à la normale. On note alors K le point d'intersection de Δ avec C_2 : la droite (IK) obtenue donne la direction du rayon réfracté.

c) Construire le rayon réfracté selon cette méthode.

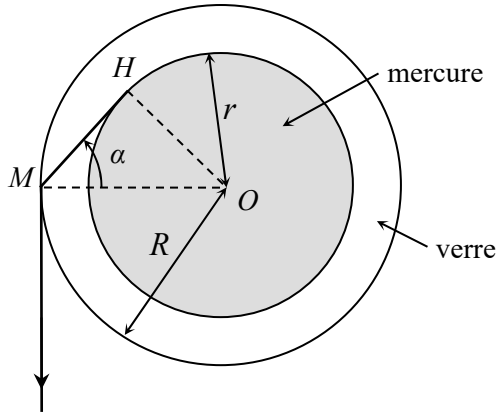
2. Démontrer, par des considérations géométriques, qu'on retrouve la loi de Snell–Descartes de la réfraction en utilisant cette construction.

3. Montrer, à partir de cette construction, qu'il existe une valeur limite de i au-delà de laquelle il n'y a plus de rayon réfracté. Faire la construction de Descartes correspondante. Calculer cet angle et vérifier qu'on retrouve le résultat donné par les formules.

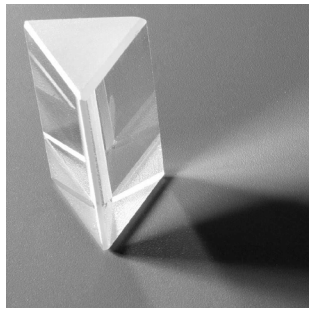
❑ Exercice 2.8. Thermomètre*

On considère un thermomètre à colonne de mercure, dont l'enveloppe est un cylindre en verre de rayon extérieur R et de rayon intérieur r.

Montrer qu'à partir d'une certaine valeur de $\frac{r}{R}$, un observateur voit le mercure comme s'il remplissait entièrement un cylindre de rayon R, c'est-à-dire que l'épaisseur du verre n'est plus visible. On pourra utiliser les points O, M, H et l'angle α. L'indice du verre est $n = 1{,}5$.

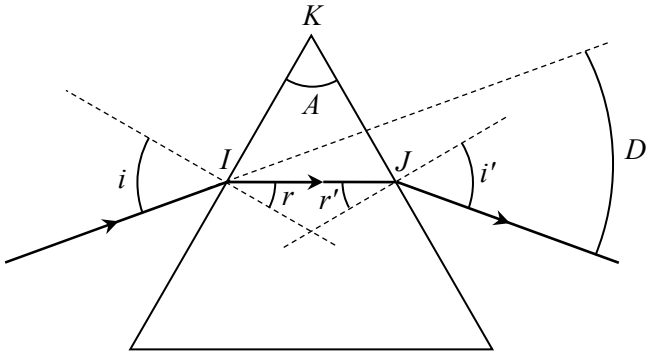


❑ Exercice 2.9. Mesure de l'indice d'un prisme**



On réalise la dispersion de la lumière au moyen d'un prisme en verre, d'angle A entre ses deux faces utiles, et d'indice de réfraction n pour une longueur d'onde donnée. Le milieu extérieur est l'air, d'indice pris égal à 1.

Soit un rayon parvenant au point I sur la face d'entrée avec un angle d'incidence i : il émerge par la face de sortie en un point J avec un angle i'. On note D l'angle mesurant la déviation entre le rayon incident et le rayon émergent.



1. Appliquer la loi de Snell–Descartes en I et J. Établir également les deux relations géométriques : $A = r + r'$ et $D = i + i' - A$. (Ces quatre relations sont les *formules du prisme*.)

2. Montrer que l'existence du rayon émergent en J dépend d'une condition sur r', puis en déduire une condition sur i.

3. Montrer que l'existence d'un rayon émergent impose aussi une condition sur A.

4. Pour un prisme en verre *flint* d'indice $n = 1{,}74$, vérifier que l'angle usuel $A = 60°$ convient. Déterminer alors numériquement l'encadrement de i.

5. On constate expérimentalement que, lorsqu'on fait varier i de 0° à 90° en tournant le prisme, la déviation D passe par un minimum unique D_m.

a) Justifier sans calcul que ce minimum correspond nécessairement à $i = i'$.

b) Exprimer alors D_m en fonction de i et A, puis en déduire l'indice n en fonction de D_m et A.

❑ Exercice 2.10. Arc-en-ciel* *

Lorsque le Soleil illumine un rideau de pluie, chaque goutte d'eau constitue une sphère réceptionnant un faisceau de rayons parallèles entre eux. On recherche les conditions pour que la lumière émergente, issue d'une goutte d'eau, se présente sous forme d'un faisceau de lumière parallèle (c'est à cette condition que l'intensité lumineuse sera maximale, donc observable pour l'œil). Pour cela on fait intervenir l'angle de déviation D de la lumière à travers la goutte d'eau, mesuré entre le rayon émergent et le rayon incident. Cet angle de déviation D est une fonction de l'angle d'incidence i. On admettra que la condition de parallélisme des rayons émergents se traduit mathématiquement par $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 0$.

1. Rappeler les lois de Snell–Descartes pour la réfraction d'un rayon lumineux passant de l'air (milieu d'indice unité) vers un milieu d'indice n. Exprimer la dérivée $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i}$ exclusivement en fonction de l'indice n et du sinus de l'angle d'incidence.

2. Une goutte d'eau quelconque, représentée par une sphère de centre O et de rayon R, est atteinte par la lumière solaire sous des incidences variables, comprises entre 0° et 90°. Son indice, pour une radiation donnée, sera noté n tandis que celui de l'air sera pris égal à l'unité.
Répondre aux questions **a**, **b**, **c** ci-après pour chacun des trois cas suivants :

– lumière directement transmise (figure 1) ;
– lumière transmise après une réflexion partielle à l'intérieur de la goutte (figure 2) ;
– lumière transmise après deux réflexions à l'intérieur de la goutte (figure 3).

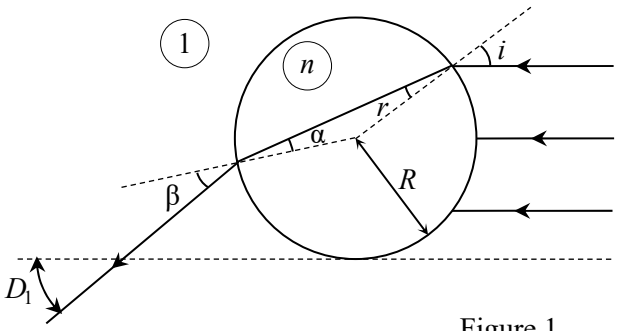


Figure 1

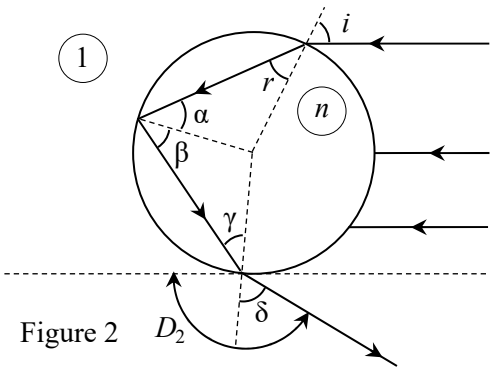


Figure 2

a) Exprimer en fonction de l'angle d'incidence i ou de l'angle de réfraction r, tous les angles marqués de lettres grecques.

b) En déduire l'angle de déviation D propre à chaque cas, en fonction de i et de r.

c) Rechercher ensuite, si elle existe, une condition d'émergence d'un faisceau parallèle, exprimée par une relation entre le sinus de l'angle d'incidence et l'indice n de l'eau.

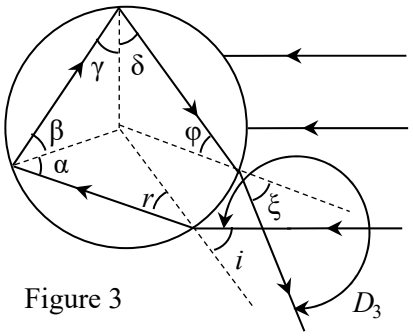


Figure 3

Madame Michu se trouve face à un rideau de pluie, et observe le ciel en tournant le dos au Soleil, qui est assez bas sur l'horizon.

3. Montrer qu'elle ne pourra observer la lumière transmise que si la goutte d'eau se trouve sur deux cônes d'axes confondus avec la direction solaire et de demi-angles au sommet θ_2 et θ_3. Exprimer ces deux angles en fonction de D_2 et D_3.

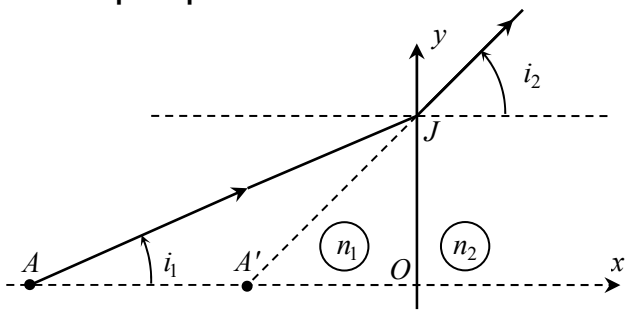
4. Les angles θ_2 et θ_3 dépendant de l'indice n de l'eau, on observe une séparation des couleurs due au fait que cet indice varie en fonction de la longueur d'onde. Calculer ces angles pour le rouge (indice 1,3317) et le violet (indice 1,3448).

5. Dessiner les deux arcs-en-ciel qui apparaissent dans le champ de vision de Madame Michu, en notant la position respective des rouges et des violets sur chacun des deux.

■ Formation d'images par un système optique

❑ Exercice 2.11. Stigmatisme du dioptre plan*

Un dioptre plan sépare un milieu d'indice n_1 d'un milieu d'indice n_2. On considère rayon issu d'un point A, situé dans le milieu d'indice n_1, et d'angle d'incidence orienté i_1. On note A' l'intersection du rayon réfracté avec l'axe perpendiculaire au dioptre et passant par A.



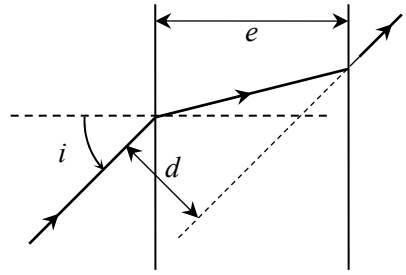
1. Exprimer $\overline{OA'}$ en fonction de $\overline{OA}$, $\sin i_1$, n_1 et n_2.

2. Le système est-il rigoureusement stigmatique ?

3. En utilisant une approximation, déterminer l'image du point objet A, puis d'un objet AB parallèle au dioptre.

❑ Exercice 2.12. Lame à faces parallèles*

On considère une lame de verre à faces parallèles, d'épaisseur e, d'indice n, plongée dans l'air d'indice 1. Un rayon incident arrive avec un angle d'incidence i.



1. Déterminer l'écart d entre le rayon incident et le rayon émergent en fonction de n et $\sin i$.

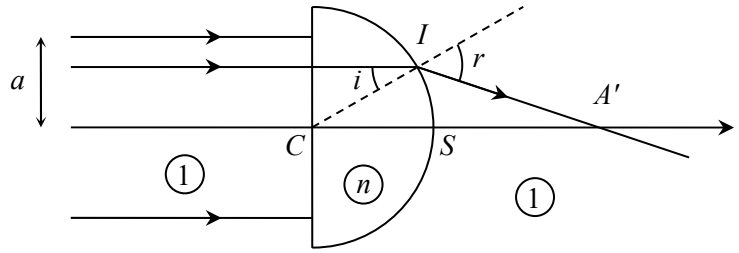
2. Faire l'application numérique pour $e = 4$ mm, $n = 1{,}5$ et $i = 50°$.

3. Cette lame est-elle stigmatique ? Quel est son effet sur la vision d'un objet ?

❑ Exercice 2.13. Lentille demi-boule*

On considère une lentille en forme de demi-boule de rayon R et d'indice n, plongée dans l'air d'indice 1. Un faisceau lumineux cylindrique, de rayon a, arrive sous incidence normale sur la face plane de la lentille.

1. Un rayon donné de ce faisceau émerge en coupant l'axe optique en un point A'. Établir la relation donnant CA' en fonction de $R = CS$ et des angles i et r.

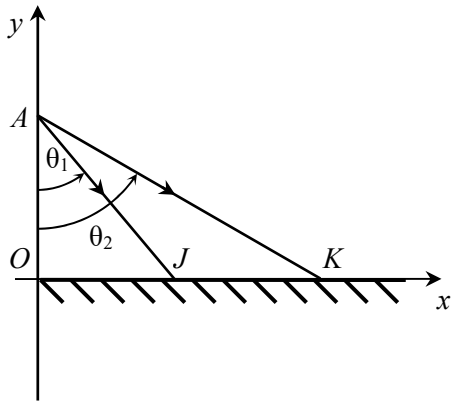


2. En déduire la limite CF' de CA' lorsqu'on se place dans l'approximation de Gauss (à définir). Quelle propriété de la lentille obtient-on ? Que représente le point F' ?

3. Quelle est la valeur limite a_0 du rayon du faisceau incident si l'on veut que tous les rayons ressortent de la lentille ? Faire l'application numérique pour $n = 1{,}5$ et $R = 5{,}0$ cm.

❑ Exercice 2.14. Jeux avec un ou deux miroirs**

On considère un miroir plan contenu dans le plan xOz et un objet ponctuel A placé sur l'axe Oy ($OA = a$). On cherche à déterminer l'image A' de A par le miroir.



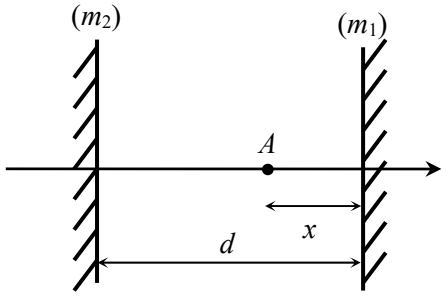
1. Construire les rayons réfléchis correspondant aux rayons incidents AJ et AK.

2. Établir les équations des droites des rayons réfléchis en fonction des tangentes des angles θ_1 et θ_2.

3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection C de ces deux droites.

4. Quelle est l'image de A par le miroir ? En déduire une propriété caractéristique du miroir plan.

On place maintenant deux miroirs plans identiques, parallèles et distants de d. Un objet ponctuel A est placé entre les deux miroirs à la distance x de (m_1).
On note A_1 l'image de A par (m_1), puis A_2 l'image de A_1 par (m_2), etc.



5. Déterminer, en fonction de x et d, les mesures algébriques $\overline{AA_1}$, $\overline{AA_2}$, $\overline{AA_3}$ et $\overline{AA_4}$.

6. En déduire $\overline{AA_n}$. Combien d'images peut-on observer ?