

Yves Noirod, Jean-Paul Parisot et Nathalie Brouillet

Cours de physique

Mathématiques

pour la physique

DUNOD

Illustration de couverture
© CNRS – INSU MAMA. Variations sur la galaxie du « Sombrero »
© GRGS-CNRS-CNES. Forme du géoïde terrestre
peshkova@fotolia.com

© Dunod 2019 pour la nouvelle présentation
© Dunod, 1997

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-080404-7

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

PRÉFACE

Rédiger la préface d'un ouvrage d'enseignement est un exercice fréquent, convenu même pourrait-on dire, où il est bon, et généralement parfaitement justifié, de vanter les mérites des auteurs, de souligner leur clarté pédagogique et d'exalter l'amour des étudiants que révèle leur entreprise.

Sans échapper bien sûr à l'envie de souligner les points évoqués, je souhaiterais noter d'autres aspects remarquables :

– tout d'abord, le caractère ambitieux du projet : cette petite série couvrira les enseignements de physique de première année d'université (ou d'une manière plus large d'enseignement supérieur). Elle comprend cinq volumes de cours et trois ou quatre volumes d'exercices avec solutions ;

– en second lieu, son caractère collectif : chaque volume a été pris en charge par plusieurs enseignants expérimentés ayant une bonne expérience des niveaux et attentes des étudiants concernés. Ont ainsi collaboré à cet ouvrage Nathalie Brouillet, Yves Noirod et Jean-Paul Parisot ;

– enfin, et la chose, fréquente à l'université Bordeaux 1, est peut-être plus rare ailleurs et mérite donc d'être soulignée, les intervenants dans cette série sont de statuts très variés, professeurs et maîtres de conférences bien sûr, mais aussi chercheurs du CNRS ou astronomes. Un constat tout à fait conforme à la conception de l'enseignement supérieur qu'a notre université.

Ces éléments me semblent de nature à garantir le succès de la démarche, une démarche indispensable aux équipes enseignantes parce qu'elle permet de « capitaliser » les expériences des plus anciens au service des plus jeunes au sein d'une équipe pédagogique, mais une démarche surtout utile aux étudiants.

Certes, ils pourront tirer profit de la présentation, dans certains volumes d'exercices, d'épreuves « réelles » telles qu'elles ont été proposées à des étudiants bordelais, mais on ne saurait trop leur conseiller de tirer de cet ouvrage, par tous les moyens, tout le parti qu'il autorise.

Base de savoirs à assimiler personnellement à l'aide d'un travail personnel rigoureux, ce livre doit être également le support de travaux plus collectifs, en binôme ou par tout petits groupes. N'est-ce pas en démontant, à plusieurs, un processus puis en expliquant certaines des étapes à d'autres que chacun pourra s'assurer d'avoir progressé !

Michel Combarrous

Membre Correspondant de l'Académie des Sciences

Président de l'université Bordeaux 1

AVANT-PROPOS

De toutes les sciences de la nature, la physique est celle qui entretient depuis le plus longtemps des relations étroites avec les mathématiques. Si étroites d'ailleurs que bien des grands noms se retrouvent associés à la fois à des théorèmes de mathématiques et à des lois physiques : Descartes, Fermat, Gauss, Bernoulli...

Si l'étude de la nature ne veut pas se limiter à une élaboration de catalogues mais veut déboucher sur une compréhension des mécanismes qui sont en jeu, le scientifique doit dégager des concepts permettant de faire une description des faits expérimentaux. En étudiant ces concepts pour eux-mêmes, à commencer par les nombres, les mathématiques se sont développées et ont forgé de nouveaux concepts, sans se soucier d'un rapport avec notre environnement. Pour un physicien, ces constructions peuvent parfois paraître plutôt ésotériques et, cependant, pas mal d'entre elles permettent une description simple de certains phénomènes (c'est pas exemple le cas pour les courbes fractales).

Ainsi, avec les mathématiques, le physicien dispose-t-il d'une prodigieuse boîte à outils. Certains de ces outils, très simples, présentés dans ce livre, sont indispensables tout au long du cursus universitaire de physique. Ils sont bien souvent enseignés en parallèle avec diverses spécialités (électrostatique, électromagnétisme...) ; à l'université Bordeaux 1, dans le cadre de l'enseignement du premier cycle, ils sont regroupés dans un module d'enseignement de physique étalé sur une année et auquel nous participons.

Nous nous sommes appuyés sur les connaissances en mathématiques de tout bachelier scientifique. Nous n'avons abordé ni l'étude du calcul matriciel ni les équations différentielles qui sont enseignées en mathématiques dès la première année de DEUG et utilisables tout de suite en physique. D'autres notions, nouvelles pour l'étudiant, mais qui sont immédiatement nécessaires en physique, ne sont abordées que plus tard en mathématiques ; ce sont elles que nous présentons ici. Elles concernent le calcul vectoriel, le calcul différentiel et intégral, les opérateurs vectoriels différentiels.

Ce livre comporte peu de démonstrations générales, mais plutôt des justifications de certains résultats en supposant satisfaites les conditions rencontrées le plus souvent en physique. Nous utilisons chaque notion nouvelle dans des exercices formels d'application pour familiariser l'étudiant avec sa manipulation et nous donnons des exemples physiques d'utilisation. Chaque chapitre est complété par une récapitulation des résultats les plus importants, un QCM auquel il faut pouvoir répondre, non pas à l'aide d'un calcul, mais grâce à un raisonnement simple, et une série d'exercices, de difficultés variables, avec des solutions condensées.

Nous remercions Pierre Marsau et Francis Taris de nous avoir fourni des données cristallographiques et Denis Dumora, Joseph Léandri et Christian Meyers de leurs conseils informatiques.

TABLE DES MATIÈRES

Préface

Avant-propos

Chapitre 1. Calcul vectoriel **1**

- 1. Rappels sur la notion de vecteur 1
- 2. Produit scalaire de deux vecteurs 8
- 3. Produit vectoriel 12
- 4. Produit mixte de trois vecteurs 18
- 5. Fonction vectorielle d'une variable réelle 25

À retenir 28

QCM 30

Exercices 31

Solutions 34

Chapitre 2. Calcul différentiel **39**

- 1. Rappel : fonction linéaire d'une variable 40
- 2. Fonctions de plusieurs variables réelles 40
- 3. Différentielle d'une fonction 44
- 4. Règles de calcul sur les différentielles 52
- 5. Développements limités 57
- 6. Formes différentielles 60
- 7. Applications 62

À retenir 68

QCM 70

Exercices 71

Solutions 77

Chapitre 3. Systèmes de coordonnées **83**

- 1. Repérage d'un point 83
- 2. Repères locaux 89
- 3. Dérivées des vecteurs de base locaux 93
- 4. Déplacement élémentaire d'un point 94

À retenir 95

QCM 96

Exercices 97

Solutions 101

Chapitre 4. Calcul intégral **107**

- 1. Rappels sur l'intégrale définie 107
- 2. Intégrale double 110
- 3. Intégrale triple 116
- 4. Changement de variables dans une intégrale multiple 118
- 5. Courbes et surfaces 122

6. Intégrales curvilignes	125
7. Intégrales de surface	130
8. Intégrale de volume	135
9. Exemples d'utilisation du calcul intégral en physique	137
<i>À retenir</i>	144
<i>QCM</i>	146
<i>Exercices</i>	147
<i>Solutions</i>	152
 Chapitre 5. Champs scalaires et vectoriels	 159
1. Définition d'un champ	159
2. Définitions diverses	160
3. Gradient d'un champ scalaire	161
4. Intégrale curviligne d'un champ	168
5. Flux d'un champ vectoriel à travers une surface	174
6. Divergence et rotationnel d'un champ vectoriel	182
7. Application répétée des opérateurs vectoriels différentiels	191
<i>À retenir</i>	198
<i>QCM</i>	200
<i>Exercices</i>	201
<i>Solutions</i>	205
 Annexes	
A.1. Équations aux dimensions	217
A.2. Équations de quelques courbes utiles	219
A.3. Moments d'inertie	223
 Index	 227

CHAPITRE 1

CALCUL VECTORIEL

Pré-requis

Pour aborder ce chapitre il suffit de quelques notions de géométrie élémentaire : distance entre deux points de l'espace, droites parallèles, inégalités dans le triangle. Nous rappellerons brièvement l'introduction de la notion de vecteur à partir des bipoints. Le calcul barycentrique a été vu en mathématiques au lycée ; nous en ferons un bref rappel. Nous admettons aussi connues la notion de coordonnées cartésiennes sur laquelle nous reviendrons cependant au chapitre 3 et la notion de dérivée d'une fonction scalaire d'une variable réelle.

Objectif

Le but de ce chapitre est de fournir les techniques de calcul vectoriel qui permettent de manipuler les vecteurs tant par l'intermédiaire de leurs composantes que globalement.

Après un bref rappel de la notion de vecteur à partir des bipoints ainsi que des propriétés de la somme vectorielle et de la multiplication d'un vecteur par un nombre, nous obtenons la définition d'un espace vectoriel. Puis nous définissons des lois de composition sur les vecteurs : produits scalaire, vectoriel et mixte avec quelques exemples d'utilisation. Enfin nous introduisons la notion de fonction vectorielle d'une variable réelle pour laquelle la notion de dérivée reste valable.

1. RAPPELS SUR LA NOTION DE VECTEUR

Encart historique. Origine du mot vecteur

Ce mot fait son apparition dans la langue française à la fin du XVI^e siècle avec son sens latin, du verbe *vehere* (« transporter en char » et « porter sur ses épaules »). Ce verbe se retrouve dans *véhicule*. Il est aussi apparenté au mot sanscrit *vāhati* (« il transporte en char ») dont on peut trouver l'origine dans la racine indo-européenne *wegh* (« aller en char »). Ce sens originel s'est perdu pendant quelques siècles. Au XVIII^e siècle, on retrouve ce mot comme adjectif, en astronomie, dans l'expression *tourbillon vecteur* et dans *rayon vecteur* qui désigne le segment de droite joignant une planète au Soleil. L'utilisation du mot vecteur en mathématiques remonte à 1899 ; il est emprunté à

l'anglais *vector* que William Rowan Hamilton, astronome et physicien irlandais (1805-1865) a utilisé pour désigner un segment de droite orienté. Hamilton a bâti des règles de calcul vectoriel. Il a été en cela en concurrence et en opposition avec Hermann Günther Grassmann, mathématicien et linguiste allemand (1809-1877) qui a introduit le calcul vectoriel dans des espaces de dimensions supérieures à 3.

Le sens étymologique du mot réapparaît au XX^e siècle, probablement après un détour par l'anglais. Il désigne, en médecine, un animal susceptible de transporter un agent infectieux d'un sujet à un autre (1949). Vers 1960 enfin il désigne des engins capables de transporter des charges nucléaires.

Certaines grandeurs physiques sont décrites par un nombre. C'est le cas, par exemple, des masses, des charges électriques. On les appelle des **scalaires**. D'autres grandeurs, en revanche, ne peuvent être décrites que par la donnée simultanée de plusieurs nombres ; de plus, ces nombres ne peuvent être définis que relativement à un corps de référence et dépendent aussi du repère que l'on utilise pour faire cette description. Parmi ces grandeurs figurent les grandeurs vectorielles. C'est le cas, par exemple, de la vitesse d'un point matériel : parler de la vitesse d'un point matériel n'a de sens que lorsqu'on a choisi un objet qui serait considéré comme immobile ; mais la grandeur de la vitesse ne suffit pas à la décrire complètement et il faut aussi préciser sa direction. C'est aussi le cas d'une force dont l'effet sur un système matériel ne dépend pas seulement de son intensité mais aussi quelquefois du point d'application et toujours de la direction dans laquelle elle s'exerce. Ces grandeurs sont décrites à l'aide d'un concept nouveau (par rapport à celui de nombre) qui est celui de vecteur. Cette notion a été formalisée en mathématique ce qui en a rendu l'usage plus facile. Dans ce chapitre, nous allons rappeler ou présenter des résultats essentiels en vue de l'utilisation des vecteurs en physique.

1.1. Définitions

L'espace $\mathcal{G}$ dans lequel nous vivons est un ensemble de points. Un couple (A, B) de points de l'espace $\mathcal{G}$, pris dans cet ordre, est ce que l'on appelle un bipoint dont A est l'origine et B l'extrémité. Par les deux points A et B passe une droite Δ que l'on appelle support du bipoint. La longueur du segment de droite AB est la **norme** du bipoint. (A, B) et (B, A) sont deux bipoints de même norme, de même support et de sens opposés. Deux bipoints dont les supports sont parallèles sont dits de même direction.

On peut définir une relation d'équivalence entre bipoints, que l'on appelle équipollence : on dit que deux bipoints sont équipollents s'ils ont même direction, même sens, même norme.

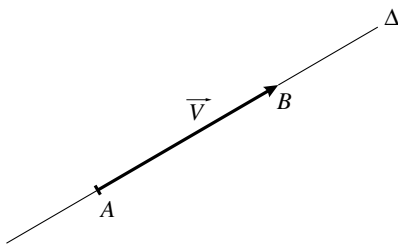


Figure 1.1 • Le vecteur lié $(A, \vec{V})$ est le bipoint (A, B) .

On appelle **vecteur** ou **vecteur libre** un objet caractérisé par ces trois grandeurs. Cela revient à considérer que tous les bipoints équipollents entre eux jouent des rôles identiques. Chaque bipoint de cet ensemble est un représentant du vecteur. Autrement dit, quand on fixe une origine en plus des trois propriétés ci-dessus, on choisit un bipoint particulier pour représenter le vecteur. Le vecteur dont le bipoint (A, B) est un représentant est noté $\vec{AB}$. Pour désigner un

bipoint ou **vecteur lié**, associé à un vecteur $\vec{V}$ on écrira $(A, \vec{V})$, spécifiant ainsi l'origine du bipoint (figure 1.1). Quand on identifie non pas tous les vecteurs liés équipollents entre eux, mais seulement les vecteurs liés équipollents ayant le même support, on caractérise un **glisseur** ou **vecteur glissant** : autrement dit, un glisseur est caractérisé par une droite Δ et un vecteur $\vec{V}$; c'est l'un quelconque des vecteurs liés représentant un même vecteur et dont l'origine est un point de la droite.

Géométriquement, la construction de la somme de deux vecteurs peut se faire comme indiqué sur la figure 1.2, suivant la règle du triangle en prenant comme représentant de l'un des vecteurs un bipoint dont l'origine coïncide avec l'extrémité du bipoint qui représente l'autre vecteur (fig. 1.2a) ou bien en utilisant la règle du parallélogramme (fig. 1.2b).

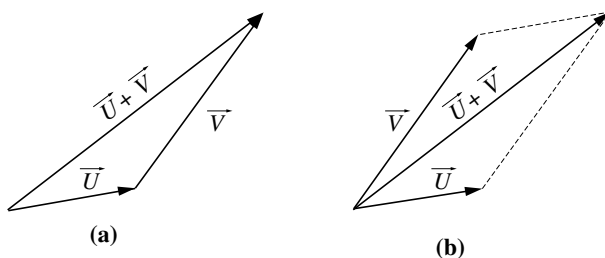


Figure 1.2 • Somme de deux vecteurs : règles du triangle (a) et du parallélogramme (b).

Il est clair sur ces figures, en particulier sur la figure a, que $\|\vec{U}\|$, $\|\vec{V}\|$ et $\|\vec{U} + \vec{V}\|$ sont les longueurs des trois côtés d'un triangle. Par conséquent, elles satisfont les inégalités triangulaires :

$$\|\vec{U}\| - \|\vec{V}\| \leq \|\vec{U} + \vec{V}\| \leq \|\vec{U}\| + \|\vec{V}\|$$

Pour des vecteurs tous deux différents de $\vec{0}$, ces inégalités sont strictes, sauf dans le cas où les deux vecteurs sont colinéaires. Dans ce cas, l'une des inégalités devient une égalité : il s'agit de l'inégalité de gauche si les deux vecteurs sont de sens opposés et de celle de droite s'ils sont de même sens.

Il est clair également, à partir de cette construction, que la somme est une loi associative, commutative, et qu'elle possède un élément neutre qui est le vecteur nul $\vec{0}$ de norme zéro.

On définit également la multiplication d'un vecteur par un réel λ ce qui donne un vecteur $\lambda \vec{V}$, de même direction que $\vec{V}$, de même sens ou de sens opposé selon que λ est positif ou négatif, et de norme $|\lambda| \|\vec{V}\|$.

Il y a distributivité de la multiplication par un scalaire sur la somme vectorielle et sur la somme des réels :

$$\lambda(\vec{U} + \vec{V}) = \lambda \vec{U} + \lambda \vec{V} \quad \text{et} \quad (\lambda + \mu) \vec{U} = \lambda \vec{U} + \mu \vec{U}$$

Enfin, d'après la définition de $\lambda \vec{V}$, on a bien :

$$\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{V}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{V} \quad \text{et} \quad 1 \cdot \vec{V} = \vec{V}$$

L'ensemble de ces propriétés caractérisent un **espace vectoriel**. Ses éléments sont des vecteurs.