Emmanuel Hebey

De la L1
à l'Agrégation

Éléments de calcul différentiel

De la droite réelle aux espaces courbes



ellipses

Références sciences

De la L1 à l'Agrégation

Éléments de calcul différentiel

De la droite réelle aux espaces courbes

Emmanuel Hebey

ellipses

Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-121713
Dépôt légal : novembre 2026
©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Le calcul différentiel constitue une des plus belles théories et un des outils les plus puissants de l'analyse. Il intervient dans de très nombreux domaines, bien au-delà du seul champ des mathématiques. L'objectif de ce livre est de proposer une théorie continue de la dérivation en partant des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour arriver aux applications entre variétés, couvrant donc un champ allant de la droite réelle aux espaces courbes. L'idée, qui nous l'espérons ressortira à la lecture de l'ouvrage, est qu'il est finalement toujours question des mêmes objets, construits autour des mêmes grands principes, et qu'il suffit souvent de regarder les choses autrement, avec un peu de recul, sous un angle légèrement différent, pour découvrir qu'elles s'étendent facilement aux nouvelles configurations que l'on rencontre. Et c'est précisément dans ces processus de déplacements que l'on finit par trouver l'essence des objets étudiés. Parce que, finalement, « dans les mathématiques, il ne s'agit pas de nombres, d'équations, de calculs ou d'algorithmes : il s'agit de comprendre » (William Thurston). Nous espérons que ce livre, avec sa volonté de fournir une théorie progressive, approfondie et systématique du calcul différentiel, permettra au lecteur d'aboutir à la triple exigence de comprendre, apprendre et maîtriser les notions qui sont ici mises en jeu. C'est là tout le bien que nous lui souhaitons.

L'ouvrage prend le sujet en partant de la base de la théorie, dans le cadre des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour aboutir à la différentiation sur les variétés, en passant par les applications de plusieurs variables réelles et les applications entre espaces vectoriels normés. Outre les chapitres de calcul différentiel proprement dits, des chapitres spécifiques sont consacrés à la topologie des espaces vectoriels normés, à la topologie générale, à l'étude des fonctions convexes, aux problèmes des moindres carrés et aux algorithmes classiques d'optimisation. Le dernier chapitre se veut être une introduction à la géométrie riemannienne, domaine actif de la recherche mathématique. Inspiré de différents cours enseignés par l'auteur, ce livre autorise plusieurs niveaux de lecture ce qui en fait, nous l'espérons, une de ses richesses.

L'ouvrage couvre finalement un programme allant de la première année de licence avec le chapitre 1 et la première section du chapitre 5 jusqu'à la première année de master avec le chapitre 6 et les chapitres 10 à 12, en traitant des théories rencontrées dans le programme de deuxième année de licence

avec les chapitres 2, 7 et la section 2 du chapitre 5 et en traitant les théories rencontrées au programme de troisième année de licence avec les chapitres 3, 4, 8, 9 et la fin du chapitre 5.

Ce livre s'adresse aux étudiants de la première à la quatrième année d'université, aux étudiants des magistères de mathématiques, aux élèves des classes préparatoires aux grandes écoles, aux élèves de ces mêmes grandes écoles d'ingénieurs, aux capétiens, aux agrégatifs et bien sûr aussi à tout lecteur motivé qui souhaite découvrir ou approfondir ses connaissances sur cette très belle théorie.

Je tiens à remercier Paul Boureau, Olivier Druet, Benoit Pausader, Bruno Premoselli, Pierre-Damien Thizy et Jérôme Vétois pour leur appui, leur aide et leurs remarques intervenus à différentes étapes lors de la préparation de cet ouvrage. Je tiens aussi à chaleureusement remercier Frédéric Robert pour les très nombreuses conversations, toujours enrichissantes, que nous avons pu avoir autour de plusieurs des thèmes abordés dans ce livre. Un grand merci par ailleurs à Giovanna et Inès pour leur soutien, leurs encouragements et leurs conseils. Je remercie enfin, avec la plus grande affection, Christiane et Maximilien, auprès de qui j'ai beaucoup appris au cours de ces dernières années, et sans qui ce livre n'aurait sans aucun doute jamais vu le jour.

Table des matières

Chapitre 1. Calcul différentiel en une variable réelle 1
1.1. Suites réelles 1
1.2. Limites des fonctions 10
1.3. Continuité 14
1.4. Dérivée première 21
1.5. Le théorème des accroissements finis 25
1.6. Règle de l'Hospital 29
1.7. Fonctions strictement monotones 30
1.8. Dérivées d'ordre supérieur 32
1.9. Théorèmes de Rolle 35
1.10. Formules de Taylor 36
1.11. Problèmes d'extremums 41

Chapitre 2. Calcul différentiel en plusieurs variables réelles 45
2.1. Continuité 48
2.2. Le critère polaire de continuité 52
2.3. Différentiabilité 53
2.4. La notion de gradient 61
2.5. Deux exemples classiques 61
2.6. Le théorème des accroissements finis 65
2.7. Applications de classe C^1 66
2.8. Le théorème d'inversion locale 68
2.9. Le théorème des fonctions implicites 72
2.10. Différentielles d'ordre supérieur 73
2.11. Formules de Taylor 76
2.12. Problèmes d'extremums 77
2.13. Lemme de Morse et points critiques isolés 80
2.14. Principe du maximum 84

Chapitre 3. Espaces vectoriels normés, Banach et Hilbert 89
3.1. Normes et distances associées 89
3.2. Topologie dans les espaces vectoriels normés 91
3.3. Compacité et dimension 96
3.4. Continuité et uniforme continuité 100

3.5. Espaces de Banach et de Hilbert 101
3.6. Un espace qui n'est pas de Banach 105
3.7. Sur les exemples 1 à 3 de la Section 3.5 106
3.8. Plusieurs normes, plusieurs limites 109
3.9. Projections et sous-espaces supplémentaires 109
3.10. Applications linéaires continues 112
3.11. Le théorème de Banach 115
3.12. Espace des applications linéaires continues 118
3.13. Isomorphismes et application inverse 120
3.14. Premier théorème de Riesz 123
3.15. Applications multilinéaires continues 124
3.16. Produits d'espaces de Banach 128
3.17. Une isométrie naturelle en bilinéarité 128

Chapitre 4. Calcul différentiel dans les Banach 131
4.1. Applications différentiables 131
4.2. Gateaux-différentiabilité et gradient 136
4.3. Différentiabilité et normes équivalentes 138
4.4. Différentielles d'applications composées 139
4.5. Différentielles d'applications particulières 140
4.6. Différentiabilité du déterminant 144
4.7. Applications à valeurs dans un produit 146
4.8. Pseudo-produits d'applications différentiables 147
4.9. Dérivées partielles - Espace produit 148
4.10. Applications de $\mathbb{R}$ dans un Banach 150
4.11. Le théorème des accroissements finis 151
4.12. Accroissements finis et dérivées partielles 155
4.13. Le théorème d'inversion locale 158
4.14. Le théorème des fonctions implicites 160
4.15. Différentielles secondes et d'ordres supérieurs 163
4.16. Calcul de la différentielle seconde 168
4.17. Formules de Taylor 169
4.18. Extremums et minimisation sous contraintes 171

Chapitre 5. Fonctions convexes 175
5.1. Fonctions convexes d'une variable réelle 175
5.2. Fonctions convexes de plusieurs variables réelles 181
5.3. Fonctions convexes d'une variable banachique 185
5.4. Fréchet et Gateaux-différentiabilités en dimension finie 193
5.5. Convexité des fonctions continues 194
5.6. Convexité et sous-différentiabilité 195
5.7. Fonctions strictement et fortement convexes 197
5.8. Minimiseurs des fonctions convexes 200

Chapitre 6. Différentiabilité presque partout 203
6.1. Théorème de Rademacher en dimension 1 204
6.2. Le théorème de dérivation de Lebesgue 206
6.3. Théorème de Rademacher en dimension quelconque 214
6.4. Curiosités différentielles : Weierstrass et Takagi 222
6.5. Fonctions absolument continues et escalier de Cantor 228

Chapitre 7. Le problème des moindres carrés 233
7.1. Position du problème 233
7.2. Pseudo-inverses de Moore-Penrose 235
7.3. Calculs de pseudo-inverses 237
7.4. Solutions des moindres carrés 238
7.5. Instabilité générique pour les moindres carrés 240
7.6. Décomposition SVD et pseudo-inverses 241
7.7. Moindres carrés et régularisation de Tikhonov 243

Chapitre 8. Algorithmes d'optimisation 245
8.1. Principe général / Méthodes de descente 245
8.2. Méthode de gradient 246
8.3. Preuve du Théorème 8.1 248
8.4. Une convergence linéaire 250
8.5. Deux variantes de la méthode de gradient 251
8.6. Méthode de Newton 256

Chapitre 9. Petit précis de topologie 259
9.1. Espaces topologiques 259
9.2. Continuité - homéomorphismes - topologies particulières 263
9.3. Espaces séparés - convergence 265
9.4. Espaces compacts 268
9.5. Compactifié d'Alexandroff 273
9.6. Espaces paracompacts - partitions de l'unité 273
9.7. Espaces connexes - espaces connexes par arcs 274
9.8. Espaces métriques 279
9.9. Espaces complets et complétion métrique 282
9.10. Complétion pour les E.V.N. 285
9.11. Compacité et complétude 287
9.12. Théorème de Baire 288
9.13. Théorème du point fixe de Banach-Picard 289
9.14. Espace métrique produit 291

Chapitre 10. Variétés différentiables et différentielles 293
10.1. Variétés topologiques 293
10.2. Variétés de classe C^k 297
10.3. Des exemples de variétés différentiables 300

10.4. Applications différentiables entre variétés 302
10.5. Un cas intéressant de (non) multiplicité 304
10.6. Rang, immersions, submersions, plongements 305
10.7. Sous-variétés 309
10.8. Le théorème de Whitney 312
10.9. Existence et unicité des structures lisses 313
10.10. L'espace tangent 315
10.11. Une autre construction de l'espace tangent 319
10.12. Le fibré tangent 319
10.13. L'application linéaire tangente 321
10.14. Champs de vecteurs 323
10.15. L'espace tangent d'une sous-variété 326
10.16. Quadriques en dimension trois 327

Chapitre 11. Calcul tensoriel et connexions linéaires 329
11.1. Le fibré cotangent 329
11.2. Éléments de calcul tensoriel 333
11.3. Le fibré vectoriel des tenseurs 337
11.4. Connexions linéaires 340
11.5. Torsion et courbure 343
11.6. Extension aux champs de tenseurs 345
11.7. Connexions et chaînes de dérivation 348
11.8. Les identités de Bianchi 350
11.9. La connexion de Levi-Civita du cas riemannien 351
11.10. Généralisations du cas riemannien 355

Chapitre 12. Éléments de géométrie riemannienne 357
12.1. Les différentes courbures d'une variété riemannienne 357
12.2. Courbures et topologie 361
12.3. Le théorème de Nash 365
12.4. Cartes normales et carte exponentielle 365
12.5. L'intégrale riemannienne 366
12.6. Le théorème de Gauss-Bonnet 369

Bibliographie 371

Index 375

CHAPITRE 1

Calcul différentiel en une variable réelle

On s'intéresse dans cette partie aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels. Par fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on entend une fonction définie sur un intervalle I, ou un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$, à savoir qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

1.1. Suites réelles

La notion de suite est fondamentale en analyse. Une suite réelle est une famille de réels indexée par $\mathbb{N}$. On a donc un premier élément, souvent commençant à 0 ou 1, puis un second, puis un troisième etc. Une suite réelle est donc une famille (x_n) de réels avec $n \in \mathbb{N}$, ou $n \in \mathbb{N}^\star$, ou $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$ etc. La question intéressante pour les suites est leur comportement à l'infini, donc lorsque $n \to +\infty$, puisque lorsque nous coupons une suite au delà d'un $N \in \mathbb{N}$ nous nous retrouvons finalement avec un nombre fini de points sans grand intérêt.

DÉFINITION 1.1. *Soit (x_n) une suite réelle et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que (x_n) a pour limite ℓ lorsque $n \to +\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, |x_n - \ell| < \varepsilon \ .$$

On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$ ou encore $x_n \to \ell$ lorsque $n \to +\infty$. Une suite qui possède une limite finie (comme c'est le cas dans cette définition) est dite convergente.

En d'autres termes, (x_n) a pour limite ℓ si, étant donné un intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ quelconque centré autour de ℓ, on va pouvoir trouver un rang N à partir duquel tous les élements de la suite se retrouvent dans cet intervalle. Dit comme cela, on devine facilement que la limite, si elle existe, est forcément unique. L'unicité de la limite (lorsqu'elle existe, il est des suites qui n'ont pas de limite, cf. ci-dessous) est donnée par le théorème suivant.

THÉORÈME 1.1. *La limite, lorsqu'elle existe, est unique.*

DÉMONSTRATION. Supposons qu'une suite (x_n) ait deux limites ℓ et ℓ'. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, |x_n - \ell| < \varepsilon \ ,$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N', |x_n - \ell'| < \varepsilon \ .$$

On fixe $\varepsilon > 0$ quelconque. Soit n tel que $n \geq \max(N, N')$. Alors $|x_n - \ell| < \varepsilon$ et $|x_n - \ell'| < \varepsilon$. Donc

$$\begin{aligned} |\ell - \ell'| &= |\ell - x_n + x_n - \ell'| \\ &\leq |x_n - \ell| + |x_n - \ell'| \\ &< 2\varepsilon \ . \end{aligned}$$

On a ainsi montré que $|\ell - \ell'| < 2\varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, on doit avoir $\ell' = \ell$. Le théorème est démontré. □

Une suite (x_n) n'a pas forcément de limite, c'est le cas par exemple lorsque $x_n = (-1)^n$ pour tout n. La limite ℓ, si elle existait, devrait valoir à la fois $\ell = +1$ (se restreindre aux n pairs dans la Définition 1.1) et $\ell = -1$ (se restreindre aux n impairs dans la Définition 1.1). C'est bien sûr impossible. Autre cas de figure, une suite (x_n) peut avoir une limite infinie qui ne rentre pas dans la définition précédente.

DÉFINITION 1.2. *Soit (x_n) une suite réelle. On dit que (x_n) a pour limite $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$ si*

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, x_n > A \ .$$

On dit que (x_n) a pour limite $-\infty$ lorsque $n \to +\infty$ si

$$\forall A < 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, x_n < A \ .$$

Dans le premier cas on écrit que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ ou encore que $x_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Dans le second cas on écrit que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ ou encore que $x_n \to -\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

En d'autres termes, (x_n) a pour limite $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$ si pour tout A fixé, aussi grand que l'on veut, il existe un rang N à partir duquel les éléments de la suite dépassent tous A et (x_n) a pour limite $-\infty$ lorsque $n \to +\infty$ si pour tout A fixé, aussi petit que l'on veut , il existe un rang N à partir duquel les éléments de la suite sont tous plus petits que A, ce qui revient encore à dire que la suite $(-x_n)$ a pour limite $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

Des opérations sur les limites des suites convergentes sont données par le résultat suivant. Elles se généralisent aux limites infinies dès lors qu'on ne rencontre pas les opérations interdites $0 \times \pm\infty$ et $\infty - \infty$.

LEMME 1.1. *Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles convergentes (donc ayant des limites finies) et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors (λx_n), $(x_n + y_n)$ et $(x_n y_n)$ sont elles aussi convergentes et*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} (\lambda x_n) &= \lambda \lim_{n\to+\infty} x_n \ , \\ \lim_{n\to+\infty} (x_n + y_n) &= \lim_{n\to+\infty} x_n + \lim_{n\to+\infty} y_n \ , \\ \lim_{n\to+\infty} (x_n \times y_n) &= \lim_{n\to+\infty} x_n \times \lim_{n\to+\infty} y_n \ . \end{aligned}$$

De même, si $\lim_{n\to+\infty} x_n \neq 0$*, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} x_n}$$

et $x_n \neq 0$ *pour* n *grand.*

DÉMONSTRATION. On va se limiter à démontrer deux affirmations : d'une part que $x_n y_n \to xy$ si $x_n \to x$ et $y_n \to y$, et d'autre part qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$ si $x \neq 0$ et $x_n \to x$.

(i) Supposons donc pour commencer que l'on ait $x_n \to x$ et $y_n \to y$ lorsque $n \to +\infty$. On écrit que

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |(x_n - x)y_n + x(y_n - y)| \\ &\leq |x_n - x| \times |y_n| + |x| \times |y_n - y| \ . \end{aligned}$$

Par hypothèses,

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, |x_n - x| < \varepsilon \ , \\ &\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N', |y_n - y| < \varepsilon \ . \end{aligned}$$

En prenant $\varepsilon = 1$ et puisque, par inégalité triangulaire, $|y_n| \leq |y| + |y_n - y|$, on obtient qu'il existe $N_0 = N$ tel que $|y_n| \leq |y| + 1$ pour tout $n \geq N_0$. On fixe maintenant $\varepsilon > 0$ quelconque. Soit $N_1 = \max(N_0, N, N')$. Alors

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &\leq (|y| + 1)\varepsilon + |x|\varepsilon \\ &\leq (|x| + |y| + 1)\,\varepsilon \end{aligned}$$

pour tout $n \geq N_1$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$, $|x_n y_n - xy| < (|x| + |y| + 1)\,\varepsilon$, et comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, en partant de $\varepsilon/(|x| + |y| + 2)$ plutôt que de ε, on a en fait montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N_1, |x_n y_n - xy| < \varepsilon \ .$$

D'où la convergence de $(x_n y_n)$ vers xy si $x_n \to x$ et $y_n \to y$ lorsque $n \to +\infty$.

(ii) On montre maintenant que si $x_n \to x$ lorsque $n \to +\infty$ et si $x \neq 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$. On reprend la phrase de convergence de (x_n) vers x. On choisit $\varepsilon = \frac{1}{2}|x|$. On a bien $\varepsilon > 0$ puisque $x \neq 0$. Il existe alors $n_0 = N$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|x_n - x| < \frac{1}{2}|x|$. Or, par inégalité triangulaire, $|x_n - x| \geq |x| - |x_n|$. Donc $|x_n| \geq |x| - \frac{1}{2}|x| = \frac{1}{2}|x| > 0$ pour tout $n \geq n_0$. D'où l'affirmation. □

En couplant les propriétés du lemme, si $\lim_{n\to+\infty} x_n \neq 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n\to+\infty} y_n}{\lim_{n\to+\infty} x_n}$$

et si l'on passe aux limites infinies, le résultat reste vrai sauf dans le cas de la forme interdite $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ pour lequel on ne peut rien dire a priori. On verra plus loin, à la Section 1.3 de ce chapitre, que lorsque (x_n) converge, et a donc une limite finie,

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right)$$

dès que f est continue (la continuité étant définie à la Section 1.3). Par suite, avec le Lemme 1.1, et cette remarque, sachant que la fonction sinus est continue, on peut calculer les limites d'expressions comme

$$z_n = x_n y_n^2 \sin(x_n + 2y_n) \ ,$$

la limite valant $xy^2\sin(x+2y)$ sur cet exemple, où x et y sont les limites finies des suites (x_n) et (y_n). Un résultat très utile, permettant d'affirmer la convergence d'une suite à partir de la convergence connue de deux autres suites, est donné par le théorème des gendarmes.

THÉORÈME 1.2 (Théorème des gendarmes). *Soient (x_n), (y_n) et (z_n) trois suites réelles. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \le y_n \le z_n$ pour tout $n \ge n_0$. On suppose que (x_n) et (z_n) convergent et ont même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Alors (y_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} y_n = \ell$.*

DÉMONSTRATION. Par hypothèses

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \ge N, |x_n - \ell| < \varepsilon \ ,$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \ge N', |z_n - \ell| < \varepsilon \ .$$

On fixe $\varepsilon > 0$ quelconque. Soit $\tilde{N} = \max(N, N')$. Alors

$$x_n > \ell - \varepsilon \ \text{ et } \ z_n < \ell + \varepsilon$$

pour $n \ge \tilde{N}$. Comme $x_n \le y_n \le z_n$ pour $n \ge n_0$ on obtient en posant $\hat{N} = \max(N, N', n_0)$ que $\ell - \varepsilon < y_n < \ell + \varepsilon$ pour tout $n \ge \hat{N}$. On a ainsi montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \hat{N} \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \ge \hat{N}, |y_n - \ell| < \varepsilon$$

et donc que (y_n) est convergente avec $\lim_{n\to+\infty} y_n = \ell$. □

Dans le monde des limites infinies il est facile de montrer que si $x_n \le y_n$ pour tout $n \ge n_0$, et si $x_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$, alors $y_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$ et que si $y_n \le z_n$ pour tout $n \ge n_0$, et si $z_n \to -\infty$ lorsque $n \to +\infty$, alors $y_n \to -\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

Le théorème qui suit marque une première rupture avec la Définition 1.1 dans la mesure où on y affirme qu'une suite converge sans pour autant spécifier la limite. Une seconde rupture, plus frappante, aura lieu avec la notion de suite de Cauchy. Dans ce qui suit, on dit d'une suite (x_n) qu'elle est majorée s'il

existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \leq M$ pour tout n, et qu'elle est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \geq m$ pour tout n.

THÉORÈME 1.3. *Soit (x_n) une suite réelle. (1) On suppose que (x_n) est croissante à partir d'un certain rang, à savoir qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \leq x_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$. Alors (x_n) a une limite lorsque $n \to +\infty$ qui est soit finie soit égale à $+\infty$. Cette limite est finie, et la suite (x_n) est convergente, si et seulement si (x_n) est majorée.*
(2) On suppose que (x_n) est décroissante à partir d'un certain rang, à savoir qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \geq x_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$. Alors (x_n) a une limite lorsque $n \to +\infty$ qui est soit finie soit égale à $-\infty$. Cette limite est finie, et la suite (x_n) est convergente, si et seulement si (x_n) est minorée.

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer (1) car on passe de (2) à (1) en considérant $(-x_n)$ au lieu de (x_n). Soit donc (x_n) une suite croissante à partir d'un certain rang n_0. Si (x_n) n'est pas majorée alors pour tout $A > 0$ il existe $N \geq n_0$ tel que $x_N > A$ car sinon il existe $A > 0$ tel que $x_n \leq A$ pour tout $n \geq n_0$ et (x_n) est donc majorée par

$$M(n_0, A) = \max(\max_{0 \leq i \leq n_0 - 1} |x_i|, A) \ .$$

Par croissance de la suite à partir du rang n_0 on obtient ainsi que

$$\forall A > 0, \exists N \ / \ \forall n \geq N, x_n > A \ ,$$

ce qui signifie précisément que $x_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Donc, pour les suites croissantes à partir d'un certain rang,

$$(x_n) \text{ non majorée } \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty \ . \tag{1.1}$$

Supposons maintenant que (x_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Par croissance de (x_n) à partir du rang n_0, $x_n \leq \ell$ pour tout $n \geq n_0$. Sinon on aurait en effet qu'il existe $n_1 \geq n_0$ avec $x_{n_1} > \ell$, et donc $x_n \geq x_{n_1} > \ell$ pour tout $n \geq n_1$, ce qui rend impossible d'avoir que $x_n \to \ell$ lorsque $n \to +\infty$. Comme annoncé, on a bien que $x_n \leq \ell$ pour tout $n \geq n_0$. En particulier, (x_n) est bornée par une constante du type $M(n_0, \ell)$ comme ci-dessus. Donc :

$$\text{si } (x_n) \text{ converge, alors } (x_n) \text{ est majorée} \tag{1.2}$$

et, si l'on oublie les premiers termes, elle est automatiquement majorée par sa limite. Réciproquement, supposons que (x_n) est majorée. On considère $\mathcal{S} = \{x_n, n \geq n_0\}$. Alors $\mathcal{S}$ est majoré, donc a une borne supérieure finie. On note $\ell = \sup \mathcal{S}$ la borne supérieure de $\mathcal{S}$, donc le plus petit des majorants de $\mathcal{S}$ (voir la Section 9.4, Chapitre 9). Alors

(i) $\forall n \geq n_0, x_n \leq \ell$ (car ℓ est un majorant de $\mathcal{S}$) ,

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq n_0 \ / \ x_N > \ell - \varepsilon$ (car ℓ est, par définition, le plus petit des majorants de $\mathcal{S}$).

Soit $\varepsilon > 0$ fixé quelconque. Soit N donné par (ii). Par croissance de (x_n), $x_n > \ell - \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Et par (i) on obtient que

$$\ell - \varepsilon < x_n \leq \ell$$

pour tout $n \geq N$. Or $\ell - \varepsilon < x_n \leq \ell$ implique que $|x_n - \ell| < \varepsilon$. Donc, comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, on a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, |x_n - \ell| < \varepsilon \ .$$

Il s'ensuit que :

$$\text{si } (x_n) \text{ est majorée, alors } (x_n) \text{ converge.} \tag{1.3}$$

En combinant (1.1)-(1.3) on voit donc que (x_n) a toujours une limite, qui est soit finie soit égale à $+\infty$, et que cette limite est finie, et la suite (x_n) convergente, si et seulement si (x_n) est majorée. D'où le théorème. □

La notion de sous-suite d'une suite est très importante. Soit (x_n) une suite réelle. Une sous-suite de (x_n) est une sélection des x_n que l'on réordonne en un 1er élément, un second etc. La définition formelle est donnée par le théorème suivant.

Définition 1.3. *Soit (x_n) une suite réelle. Une sous-suite de (x_n) est une suite qui s'écrit $(x_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.*

On dit aussi que φ est une extractrice. Plus visuellement :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	$\dots$
~~x_1~~	x_2	x_3	~~x_4~~	x_5	~~x_6~~	~~x_7~~	x_8	x_9	$\dots$
$-$	$x_{\varphi(1)}$	$x_{\varphi(2)}$	$-$	$x_{\varphi(3)}$	$-$	$-$	$x_{\varphi(4)}$	$x_{\varphi(5)}$	$\dots$

On montre facilement par récurrence (et c'est une inégalité bien utile) que si φ est une extractrice, donc si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors

$$\varphi(n) \geq n \tag{1.4}$$

pour tout n. La propriété qui est à la base de cette affirmation est que, dans $\mathbb{N}$, $m > n \ \Leftrightarrow \ m \geq n+1$. L'amorce de la récurrence est immédiate : $\varphi(0) \geq 0$ puisque $\varphi(0) \in \mathbb{N}$. Pour ce qui est de l'hérédité: si on suppose que $\varphi(n) \geq n$ pour un $n \in \mathbb{N}$ alors comme $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ c'est que $\varphi(n+1) > n$ et donc en fait que $\varphi(n+1) \geq n+1$, ce qui est le résultat d'hérédité voulu.

Lemme 1.2. *Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et a même limite.*

Démonstration. Soient (x_n) une suite convergente, ℓ sa limite et soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Par hypothèse,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, |x_n - \ell| < \varepsilon \ .$$

Comme φ est strictement croissante, $\varphi(n) \geq n$ pour tout n (voir la remarque ci-dessus). Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, |x_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$$

et ainsi $(x_{\varphi(n)})$ est convergente et $\lim_{n \to +\infty} x_{\varphi(n)} = \ell$. Le lemme est démontré. □

De la même façon, toute sous-suite d'une suite qui a pour limite $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$ a elle aussi $+\infty$ pour limite lorsque $n \to +\infty$ et toute sous-suite d'une suite qui a pour limite $-\infty$ lorsque $n \to +\infty$ a elle aussi $-\infty$ pour limite lorsque $n \to +\infty$.

Le théorème qui suit est extrêmement important. C'est un théorème dit de « compacité » qui exprime en fait que les intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$ sont des compacts de $\mathbb{R}$ (une terminologie qui sera précisée dans les chapitres suivants). Une suite (x_n) est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

THÉORÈME 1.4 (Théorème de Bolzano-Weierstrass). *Toute suite réelle bornée possède une sous-suite convergente.*

DÉMONSTRATION. Soit (x_n) une suite réelle bornée. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note

$$y_n = \sup_{p \geq n} x_p$$

la borne supérieure (voir la Section 9.4, Chapitre 9) du sous-ensemble N_n de $\mathbb{R}$ défini par $N_n = \{x_p \ / \ p \geq n\}$. Comme (x_n) est borné, N_n est borné (compris entre deux réels) et, par définition de la borne supérieure, y_n est fini. Comme $N_{n+1} \subset N_n$, on a que $y_{n+1} \leq y_n$. Donc (y_n) est décroisante. Comme elle est aussi manifestement minorée, elle est convergente en vertu du Théorème 1.3. Il existe ainsi $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = \ell \ .$$

Toujours par définition de la borne supérieure :

(i) $\forall p \geq n, x_p \leq y_n$

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists p \geq n \ / \ x_p > y_n - \varepsilon$.

La première condition exprime que y_n est un majorant de N_n. La seconde qu'il n'y a pas de majorant de N_n qui soit strictement plus petit que y_n. Avec (i) et (ii) y_n est donc le plus petit des majorants de N_n, ce qui est précisément la définition de la borne supérieure. On construit maintenant, par récurrence, une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante vérifiant pour tout $n \geq 1$,

$$|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}| < \frac{1}{n} \ . \tag{1.5}$$

La construction de $\varphi(1)$ ne pose pas vraiment de problème. Avec $n = 1$ et $\varepsilon = 1$ on obtient à partir de (i) et (ii) qu'il existe $p \geq 1$ qui est tel que $y_1 - 1 < x_p \leq y_1$. On pose $\varphi(1) = p$. Par définition de y_p, $x_p \leq y_p$. Par ailleurs, (y_n) étant décroissante, $y_1 \geq y_p$. Donc $y_p - 1 < x_p \leq y_p$ et ainsi, on a

bien que $|y_{\varphi(1)} - x_{\varphi(1)}| < 1$. Supposons maintenant $\varphi(1), \ldots, \varphi(k)$ construits avec donc $\varphi(1) < \cdots < \varphi(k)$ et (1.5) vérifiée pour tout $n = 1, \ldots, k$. On pose $n = \varphi(k)+1$ et $\varepsilon = 1/(k+1)$. Avec (i)-(ii) on obtient qu'il existe $p \geq \varphi(k)+1$ tel que

$$y_{\varphi(k)+1} - \frac{1}{k+1} < x_p \leq y_{\varphi(k)+1} \ .$$

On pose $\varphi(k+1) = p$. Alors $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ et, par définition de y_n, on a que $x_{\varphi(k+1)} \leq y_{\varphi(k+1)}$. Par ailleurs, comme (y_n) est décroissante, on obtient que $y_{\varphi(k+1)} \leq y_{\varphi(k)+1}$. Ainsi

$$y_{\varphi(k+1)} - \frac{1}{k+1} < x_{\varphi(k+1)} \leq y_{\varphi(k+1)}$$

et donc, en particulier, (1.5) est vérifié pour $n = k+1$. On a donc bien construit φ par récurrence. La suite (y_n) étant convergente, la suite $(y_{\varphi(n)})$ l'est aussi puisque toute sous-suite d'une suite convergente est convergente. Avec (1.5) et le théorème 1.2 des gendarmes on en déduit que $(x_{\varphi(n)})$ est convergente. Le théorème est démontré. □

Une des conséquences de ce théorème est qu'une suite bornée qui ne converge pas, ne converge pas « moralement » non pas parce qu'il est impossible de lui trouver des limites mais parce que, au sens des sous-suites, « elle en possède trop ». De fait, une suite bornée qui ne converge pas aura forcément au moins deux sous-suites convergentes avec des limites différentes. Pour le voir supposons que (x_n) est bornée mais ne converge pas. Comme elle est bornée, elle a une sous-suite convergente. Soit ℓ la limite de cette sous-suite. Par hypothèse, (x_n) ne converge pas vers ℓ. Donc

$$\exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \text{ avec } |x_n - \ell| \geq \varepsilon \ . \tag{1.6}$$

A partir de cette formulation on fabrique facilement une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) qui vérifie que $|x_{\varphi(n)} - \ell| \geq \varepsilon$ pour tout n. Pour construire $\varphi(1)$ on pose $N = 1$ et on pose $\varphi(1) = n$ donné par (1.6) avec $N = 1$. Une fois $\varphi(1), \ldots, \varphi(k)$ construits, on prend $N = \varphi(k) + 1$ et on pose $\varphi(k+1) = n$ donné par (1.6) avec $N = \varphi(k) + 1$. On a donc bien construit $(x_{\varphi(n)})$. Cette suite est bornée tout comme (x_n) l'était. Elle possède donc une sous-suite convergente $(x_{\varphi(\psi(n))})$. Une sous-suite d'une sous-suite est une sous-suite car la composée de deux extractrices est encore une extractrice. Si on note

$$\lim_{n \to +\infty} x_{\varphi(\psi(n))} = \ell'$$

alors $\ell' \neq \ell$ puisque $|x_{\varphi(\psi(n))} - \ell| \geq \varepsilon$ pour tout n implique que $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon$. Ainsi, si (x_n) bornée ne converge pas, alors il existe au moins deux sous-suites convergentes de (x_n) qui ont des limites différentes. Un exemple très simple est donné par le cas de la suite des $(-1)^n$ qui a deux sous-suites (choix des n pairs et choix des n impairs) convergeant chacune vers deux limites différentes -1 et $+1$ (puisque constantes, respectivement égales pour tout n à -1 et $+1$).

Une autre formulation de ce que l'on vient de dire fait intervenir la notion de valeur d'adhérence. On dira que $x \in \mathbb{R}$ est valeur d'adhérence d'une suite réelle (x_n) s'il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) avec

$$\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = x \ .$$

Soit (x_n) une suite bornée. Si elle converge elle a une unique valeur d'adhérence puisque toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et a même limite. On vient de montrer la réciproque. En particulier, le résultat suivant a lieu.

THÉORÈME 1.5. *Une suite bornée converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence. Sa limite est alors cette unique valeur d'adhérence.*

Il manque à cette section la notion de suite de Cauchy, que nous abordons maintenant. Une suite de Cauchy est une suite qui « s'écrase » sur elle-même.

DÉFINITION 1.4. *Soit (x_n) une suite réelle. On dit que (x_n) est une suite de Cauchy, ou tout simplement que (x_n) est de Cauchy, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall p, q \geq N, |x_p - x_q| < \varepsilon \ .$$

On écrira aussi que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, \forall p \geq 0, |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Il est facile de voir qu'une suite convergente est nécessairement une suite de Cauchy. La réciproque (dans le contexte général des espaces vectoriels normés abordé plus loin) n'est pas toujours vraie, mais elle l'est dans $\mathbb{R}$. C'est l'objet du théorème qui suit.

THÉORÈME 1.6. *Soit (x_n) une suite réelle. Alors (x_n) est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

DÉMONSTRATION. Il est tout d'abord facile de vérifier que si (x_n) est convergente, alors elle est de Cauchy. Supposons que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, |x_n - \ell| < \varepsilon$$

pour $\ell \in \mathbb{R}$. En remarquant que

$$\begin{aligned} |x_p - x_q| &= |(x_p - \ell) + (\ell - x_q)| \\ &\leq |x_p - \ell| + |x_q - \ell| \ , \end{aligned}$$

on obtient que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que pour tous $p, q \geq N$, $|x_p - x_q| < 2\varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque on a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall p, q \geq N, |x_p - x_q| < \varepsilon \ ,$$

et donc que (x_n) est une suite de Cauchy. La réciproque se déduit facilement du théorème de Bolzano-Weierstrass. Si (x_n) est de Cauchy, en prenant $\varepsilon = 1$ et $q = N$ dans la phrase des suites de Cauchy on obtient que $|x_p| \leq |x_N| + 1$ pour tout $p \geq N$. Donc (x_n) est bornée. Mais si (x_n) est bornée alors, avec

le théorème de Bolzano-Weierstrass, le Théorème 1.4, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) qui converge. Soit ℓ sa limite. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N', |x_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon \ .$$

On a vu en (1.4) que $\varphi(n) \geq n$ pour tout n. Soit $\varepsilon > 0$ fixé quelconque. Pour tout $n \geq N$, $|x_n - x_{\varphi(n)}| < \varepsilon$. On pose $\hat{N} = \max(N, N')$. Alors

$$\begin{aligned} |x_n - \ell| &= |(x_n - x_{\varphi(n)}) + (x_{\varphi(n)} - \ell)| \\ &\leq |x_n - x_{\varphi(n)}| + |x_{\varphi(n)} - \ell| \\ &< 2\varepsilon \end{aligned}$$

pour tout $n \geq \hat{N}$. Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, on a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \hat{N} \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq \hat{N}, |x_n - \ell| < \varepsilon$$

Donc (x_n) est convergente. Le théorème est démontré. □

Ce théorème est très utile et la théorie des séries est d'ailleurs basée sur ce résultat. Le point fondamental ici est, qu'en dehors d'utiliser la croissance ou la décroissance, il était jusque là impossible de montrer qu'une suite converge sans avoir à « deviner » sa limite pour vérifier ensuite que la phrase de convergence vers cette limite est vraie. Avec ce théorème on a maintenant un autre outil qui ne nécessite pas la connaissance de la limite : montrer que la suite est de Cauchy.

1.2. Limites des fonctions

Par définition la limite des fonctions s'entend « par valeurs différente ». Si $D \subset \mathbb{R}$ on notera $\overline{D}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ constitué des $x \in \mathbb{R}$ qui sont limites d'une suite de points de D. Par exemple, si $D =]a, b[$ alors $\overline{D} = [a, b]$. On a bien sûr toujours $D \subset \overline{D}$ (si $x \in D$, alors x est limite de la suite constante $x_n = x$ pour tout n, qui est bien une suite de points de D).

DÉFINITION 1.5. *Soit $D \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur D. Soit $a \in \overline{D}$ un point de $\overline{D}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$ un réel. On dit que f admet ℓ pour limite lorsque x tend vers a si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in D, x \neq a, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \ .$$

On écrit $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ et on demande que $a \in \overline{D \backslash \{a\}}$ (voir ci-dessous).

Si D est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si a est une des bornes de D, la limite telle que définie ci-dessus renvoie aux notions de limite à droite si a est la borne gauche de D et de limite à gauche si a est la borne droite de D. Par ailleurs, il se pourrait très bien, si on n'imposait pas la condition $a \in \overline{D \backslash \{a\}}$, qu'il n'y ait pas de $x \neq a$ proche de a qui soit dans D, par exemple si $D = [0, 1] \bigcup \{2\}$ et $a = 2$. Dans ce cas la définition est hors sujet et l'on s'abstient de parler de limite en a. On supposera donc toujours dans ce qui suit, et c'est l'objet de la dernière

demande dans la Définition 1.5, que pour tout $\delta > 0$, $]a-\delta, a+\delta[\cap (D\backslash\{a\}) \neq \emptyset$ ce qui revient encore à demander que $a \in \overline{D\backslash\{a\}}$. Dans la plupart des cas étudiés, D est un intervalle, ou une union finie d'intervalles, et, dans ces situations, tout point $a \in \overline{D}$ vérifie que $a \in \overline{D\backslash\{a\}}$. A noter : la double condition $x \neq a$ et $|x-a| < \eta$ s'écrira aussi $0 < |x-a| < \eta$, une formulation que l'on trouvera dans plusieurs ouvrages.

THÉORÈME 1.7. *La limite, lorsqu'elle existe, est unique.*

DÉMONSTRATION. On suppose donc que $a \in \overline{D\backslash\{a\}}$. Supposons qu'une fonction f ait deux limites ℓ et ℓ' lorsque $x \to a$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in D, x \neq a, |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \ ,$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta' > 0 \ / \ \forall x \in D, x \neq a, |x-a| < \eta' \Rightarrow |f(x) - \ell'| < \varepsilon \ .$$

On fixe $\varepsilon > 0$ quelconque. Soit $x \in D$, $x \neq a$, tel que $|x-a| < \min(\eta, \eta')$. Alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ et $|f(x) - \ell'| < \varepsilon$. Donc

$$\begin{aligned} |\ell - \ell'| &= |\ell - f(x) + f(x) - \ell'| \\ &\leq |f(x) - \ell| + |f(x) - \ell'| \\ &< 2\varepsilon \ . \end{aligned}$$

On a ainsi montré que $|\ell - \ell'| < 2\varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, on obtient que $\ell' = \ell$. Le théorème est démontré. □

Là encore un parle de limites finies, mais on peut facilement définir les limites infinies et les limites lorsque x tend vers $-\infty$ ou alors vers $+\infty$. Cela donne les phrases suivantes pour les limites infinies en un réel $a \in \overline{D\backslash\{a\}}$,

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \text{ si } \forall A < 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in D, x \neq a, |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) < A \ ,$$
$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \text{ si } \forall A > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in D, x \neq a, |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) > A \ ,$$

les phrases suivantes pour les limites en $-\infty$,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \text{ si } \forall A < 0, \exists B < 0 \ / \ \forall x \in D, x < B \Rightarrow f(x) < A \ ,$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \text{ si } \forall A > 0, \exists B < 0 \ / \ \forall x \in D, x < B \Rightarrow f(x) > A \ ,$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists B < 0 \ / \ \forall x \in D, x < B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \ ,$$

où $\ell \in \mathbb{R}$, et les phrases suivantes pour les limites en $+\infty$,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \text{ si } \forall A < 0, \exists B > 0 \ / \ \forall x \in D, x > B \Rightarrow f(x) < A \ ,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ si } \forall A > 0, \exists B > 0 \ / \ \forall x \in D, x > B \Rightarrow f(x) > A \ ,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0 \ / \ \forall x \in D, x > B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \ ,$$

toujours avec $\ell \in \mathbb{R}$. Soit D_a^+ l'ensemble des x de D qui sont tels que $x \geq a$ et D_a^- l'ensemble des x de D qui sont tels que $x \leq a$. En remplaçant D par D_a^+

dans les phrases mathématiques des limites en a on obtient la notion de limite à droite en a. En remplaçant D par D_a^- dans les phrases mathématiques des limites en a on obtient la notion de limite à gauche en a. On écrit souvent

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a^-} f(x)$$

pour les limites à droite et les limites à gauche. Dans tous les cas, les limites, lorsqu'elles existent, sont uniques.

Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ est dite croissante sur D si $f(x) \leq f(y)$ pour tous $x \leq y$ dans D. Elle est dite décroissante sur D si $f(x) \geq f(y)$ pour tous $x \leq y$ dans D. La fonction est dite minorée sur D s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in D$. La fonction est dite majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in D$. Une fonction est dite bornée lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée.

THÉORÈME 1.8. *Soient $a < b$ deux réels et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante sur $]a, b[$. Les limites à droite de f en a et à gauche de f en b existent toujours. La limite à droite de f en a est finie si et seulement si f est minorée sur $]a, b[$. La limite à gauche de f en b est finie si et seulement si f est majorée sur $]a, b[$. On passe des fonctions croissantes aux fonctions décroissantes en changeant f en $-f$. Pour les fonctions décroissantes la limite à droite de f en a est finie si et seulement si f est majorée sur $]a, b[$ et la limite à gauche en b est finie si et seulement si f est minorée sur $]a, b[$.*

DÉMONSTRATION. La dernière partie du théorème suit clairement de la première. Il suffit donc de démontrer le résultat pour les fonctions croissantes. En passant ensuite de f à la fonction $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ que l'on définit pour tout $x \in]a, b[$ par $g(x) = -f(a + b - x)$, on constate facilement qu'il suffit de démontrer le résultat pour les limites à gauche en la borne supérieure pour les fonctions croissantes. Soit donc $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ croissante. Si f n'est pas majorée sur $]a, b[$ alors pour tout $A > 0$ il existe $x_A \in]a, b[$ pour lequel $f(x_A) > A$. Mais alors $f(x) > A$ pour tout $x \in]x_A, b[$ par croissance de f et on obtient (poser $\eta = b - x_A$) que $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to b^-$. Par ailleurs, si f a une limite finie lorsque $x \to b^-$, alors, toujours par croissance de f, la fonction f est forcément majorée sur $]a, b[$ par cette limite. Il reste donc à montrer que si f est majorée sur $]a, b[$, alors f a une limite finie lorsque $x \to b^-$. On note ℓ le sup de f sur $]a, b[$ (Section 9.4, Chapitre 9), donc le plus petit des majorants de l'ensemble des $f(x)$ pour $x \in]a, b[$. Clairement $\ell \in \mathbb{R}$, car f est majorée, et

(i) $\forall x \in]a, b[,\ f(x) \leq \ell$,

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in]a, b[\ /\ f(x_\varepsilon) \geq \ell - \varepsilon$.

Le point (i) traduit le fait que ℓ est un majorant de l'ensemble des $f(x)$ pour $x \in]a, b[$ et le point (ii) qu'il s'agit du plus petit des majorants de cet ensemble. De (i) et (ii), et par croissance de f, on tire que pour tout $\varepsilon > 0$ il

existe $x_\varepsilon \in]a,b[$ avec la propriété que $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell$ pour tout $x \in [x_\varepsilon, b[$. On en déduit (poser $\eta = b - x_\varepsilon$) que $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to b^-$. Le théorème est démontré. □

Le Théorème 1.8 reste vrai si $a = -\infty$, la limite à droite en a devenant la limite en $-\infty$, et si $b = +\infty$, la limite à gauche en b devenant la limite en $+\infty$. Le lien entre limite à droite et limite à gauche est par ailleurs donné par le résultat suivant. On peut y relaxer la condition voulant que $a \in D$ est un point intérieur à D en demandant seulement que a soit intérieur à $D \cup \{a\}$ pour autoriser des situations du type $D =]c,a[\cup]a,b[$.

LEMME 1.3 (Limites, limites à droite, limites à gauche). *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$ un point intérieur à D au sens où il existe $\eta > 0$ tel que $]a-\eta, a+\eta[\subset D$. Alors f admet une limite ℓ en a si et seulement si elle admet une limite à gauche en a, une limite à droite en a et ces deux limites à gauche et à droite sont égales à ℓ.*

DÉMONSTRATION. On se restreint au cas où $\ell \in \mathbb{R}$, mais le lemme reste vrai pour $\ell = \pm\infty$. Tout d'abord, qui peut le plus peut le moins. Il est donc clair que si f a une limite ℓ en a, alors elle a aussi des limites à gauche et à droite en a qui valent toutes deux ℓ. Réciproquement, supposons que f a des limites à gauche et à droite en a qui sont égales. Soit ℓ cette valeur commune. On a donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in D_a^-, x \neq a, |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \ ,$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta' > 0 \ / \ \forall x \in D_a^+, x \neq a, |x-a| < \eta' \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \ .$$

En posant $\eta'' = \min(\eta, \eta')$, et puisque si $x \neq a$, soit $x < a$ soit $x > a$, on obtient que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta'' > 0 \ / \ \forall x \in D, x \neq a, |x-a| < \eta'' \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \ ,$$

soit donc que f a une limite en a qui vaut ℓ. Le lemme est démontré. □

THÉORÈME 1.9. *Soit $D \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur D. Soit $a \in \overline{D \backslash \{a\}}$. La fonction f admet une limite lorsque x tend vers a si et seulement si pour toute suite (x_n) de point de $D\backslash\{a\}$ qui tend vers a lorsque $n \to +\infty$, la suite des $f(x_n)$ a une limite lorsque $n \to +\infty$.*

DÉMONSTRATION. La première chose qui surprend dans cet énoncé est qu'on ne demande pas une valeur commune aux limites des $f(x_n)$. On va tout de suite régler ce petit problème : si pour toute suite (x_n) de point de $D\backslash\{a\}$ qui tend vers a, la suite des $f(x_n)$ a une limite lorsque $n \to +\infty$, alors ces suites $(f(x_n))$ ont toutes la même limite. Considérons en effet deux suites (x_n) et (y_n) de points de $D\backslash\{a\}$ qui tendent toutes deux vers a lorsque $n \to +\infty$. Soit (z_n) la suite définie par $z_{2n} = x_n$ et $z_{2n+1} = y_n$. On montre sans grande difficulté que les z_n sont dans $D\backslash\{a\}$ et surtout que $z_n \to a$ lorsque $n \to +\infty$.

Mais donc la suite des $f(z_n)$ a une limite. Or les suites des $f(x_n)$ et $f(y_n)$ sont des sous-suites de cette suite. Ces trois suites ont donc la même limite en vertu du Lemme 1.2. En particulier la limite des $f(x_n)$ est égale à la limite des $f(y_n)$. On passe maintenant à la preuve du résultat proprement dite. Par « emboîtement », consistant à insérer une relation dans une autre, il est aisé de montrer que si la fonction f admet une limite lorsque x tend vers a, alors, pour toute suite (x_n) de point de $D\backslash\{a\}$ qui tend vers a lorsque $n \to +\infty$, la suite des $f(x_n)$ a une limite lorsque $n \to +\infty$ qui vaut précisément la limite de f lorsque x tend vers a. En effet, par exemple dans le cas d'une limite finie, d'une part

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in D, x \neq a, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

et, d'autre part,

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists N \ / \ \forall n \geq N, x_n \in (D\backslash\{a\}) \cap]a - \varepsilon', a + \varepsilon'[\ .$$

On fixe $\varepsilon > 0$ puis on pose $\varepsilon' = \eta$. Alors, pour tout $n \geq N$, $x_n \in D\backslash\{a\}$ et $|x_n - a| < \eta$ de sorte que $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$. Donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \ / \ \forall n \geq N, |f(x_n) - \ell| < \varepsilon \ ,$$

ce qui signifie précisément que $f(x_n) \to \ell$ lorsque $n \to +\infty$. Réciproquement on suppose que pour toute suite (x_n) de point de $D\backslash\{a\}$ qui tend vers a lorsque $n \to +\infty$, la suite des $f(x_n)$ a une limite lorsque $n \to +\infty$. La limite des $f(x_n)$ est toujours la même comme on vient de le voir. Supposons cette limite réelle pour fixer les idées. Soit ℓ cette limite. On montre que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a. On raisonne par l'absurde et on suppose que $f(x)$ n'a pas ℓ pour limite (ou même pas de limite du tout) lorsque $x \to a$. Alors :

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ / \ \forall \eta > 0, \ \exists x \in D\backslash\{a\} \text{ avec } |x - a| < \eta \text{ et } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon_0 \ .$$

En posant $\eta = 1/n$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on fabrique une suite (x_n) de points de $D\backslash\{a\}$ qui est telle que

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$$

pour tout $n \geq 1$. La première inégalité donne par théorème des gendarmes que $x_n \to a$ lorsque $n \to +\infty$. On devrait donc, par hypothèse, avoir que $f(x_n) \to \ell$ lorsque $n \to +\infty$, ce qui est rendu impossible par la seconde inégalité. Une contradiction. Ce qui prouve le théorème. □

1.3. Continuité

On aborde maintenant la définition de la continuité d'une fonction en un point. Intuitivement la continuité d'une fonction réelle sur un intervalle signifie que l'on peut tracer le graphe de cette fonction « sans lever la main ». Le graphe d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ constitué des points $(x, f(x))$ pour $x \in D$. Le point (iii) de la définition ci-dessous porte le nom de « caractérisation séquentielle de la continuité ».

DÉFINITION 1.6. *Soient $D \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur D. Soit $a \in D$ un point de D. On dit que f est continue au point a si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ *(si* $a \in \overline{D \backslash \{a\}}$*)* ,

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in D, |x - a| < \eta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$,

(iii) pour toute suite (x_n) de points de D vérifiant que $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$, on a forcément que $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$.

On dit que f est continue sur D lorsque f est continue en tout point de D.

La limite dans (i) s'entend pour les $x \in D$, le domaine de définition de la fonction. Il est toujours sous entendu que la fonction est inconnue et non définie en dehors de son domaine de définition D même si, dans les faits, il peut arriver qu'on la connaisse en dehors de D, par exemple parce qu'elle provient d'une formule explicite. Dans le cas où $D = [a, b]$ cette définition inclue les notions de continuité à droite en a et de continuité à gauche en b.

PREUVE DES ÉQUIVALENCES DE (I)-(III) DANS LA DÉFINITION 1.6. Sans perdre en généralité on peut supposer que $a \in \overline{D \backslash \{a\}}$. Si ce n'est pas le cas, il existe $\delta > 0$ tel que $]a - \delta, a + \delta[\cap D = \{a\}$ et les points (ii) et (iii) sont trivialement vérifiés. On suppose donc que $a \in \overline{D \backslash \{a\}}$. Le point (ii) est alors la traduction mathématique exacte du point (i). On peut ici se passer de l'hypothèse $x \neq a$ puisque pour $x = a$, $|f(x) - f(a)| = 0$ qui sera toujours strictement inférieur à ε. Par définition (i) et (ii) sont équivalents. Pour l'équivalence de (i) et (iii) on procède comme dans la preuve du Théorème 1.9. On répète les arguments car ils sont importants.

On montre l'équivalence de (i) et (iii). Il est déjà clair que (i) $\Rightarrow$ (iii). Supposons en effet (i) et soit (x_n) une suite de points de D qui converge vers a. Alors (x_n) est aussi proche que l'on veut de a pourvu que n soit suffisamment grand tandis que $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de $f(a)$ pourvu que x soit suffisamment proche de a. On en déduit facilement que $f(x_n)$ est aussi proche que l'on veut de $f(a)$ pourvu que n soit suffisamment grand. D'où l'affirmation que (i) implique (iii).

Réciproquement supposons (iii) et montrons (i). Comme (i) et (ii) sont en fait équivalentes, on peut se « borner » à montrer que (iii) $\Rightarrow$ (ii). Pour cela on va raisonner par l'absurde. On suppose donc à la fois (iii) et le contraire de (ii), à savoir :

$$\exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall \eta > 0, \exists x \in D \text{ vérifiant } |x - a| < \eta \text{ et } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon \ .$$

On se donne une suite (ε_n) de réels strictement positifs qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Pour tout n on pose $\eta = \varepsilon_n$. On obtient alors une suite (x_n) de points de D qui vérifie

$$\begin{cases} 0 \leq |x_n - a| < \varepsilon_n \ , \\ |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon \ , \end{cases} \tag{1.7}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. La première de ces deux relations, avec le théorème des gendarmes, entraîne que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = a \ .$$

En ayant supposé (iii) cela implique que

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a) \ .$$

Mais cette dernière affirmation est en désaccord avec la seconde équation du système (1.7). D'où une contradiction et on a bien que (iii) $\Rightarrow$ (ii). Les trois affirmations de la définition sont bien équivalentes. □

Le théorème suivant porte le nom de théorème général sur la continuité.

THÉORÈME 1.10 (Théorème général sur la continuité). *Si f et g sont continues en un point a, alors $f+g$ et fg sont continues en a. Si de plus $g(a) \neq 0$ alors $g(x) \neq 0$ pour x proche de a et $\frac{f}{g}$ est continue en a. Si par ailleurs f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a. Pour finir, les fonctions polynômes, puissances, valeur absolue,* cos, sin, tan, exp, ln *sont continues là où elles sont définies.*

Par fonction puissance on entend les $x \to x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, définies pour $x > 0$ par $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ et les $x \to x^p$ avec $p \in \mathbb{Z}$ qui sont définies lorsque $p < 0$ pour tout $x \neq 0$ et lorsque $p \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (et qui rejoignent dans ce cas les fonctions polynômes). Lorsque $\alpha > 0$ les x^α se prolongent par continuité en 0 et sont définies sur $[0, +\infty[$. La fonction $x \to \sqrt{x}$ est une fonction puissance. Sa puissance étant positive, elle est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

DÉMONSTRATION. Que $f+g$ et fg soient continues en a si f et g le sont suit facilement du point (iii) de la Définition 1.6 et du Lemme 1.1. Si $g(a) \neq 0$, et g est continue au point a, il existe forcément $\eta > 0$ tel que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in D_g \cap]a - \eta, a + \eta[$, où D_g est le domaine de définition de g. Deux approches pour démontrer cette affirmation sont possibles. Par l'absurde, on fabriquerait sinon une suite (x_n) de D_g qui converge vers a et pour laquelle $g(x_n) = 0$ pour tout n. Par passage à la limite $n \to +\infty$ et continuité de g on devrait alors avoir $g(a) = 0$. On peut sinon procéder par voie directe. Par continuité de g en a,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in D_g, |x - a| < \eta \ \Rightarrow \ |g(x) - g(a)| < \varepsilon \ .$$

Comme $g(a) \neq 0$ on peut choisir $\varepsilon = \frac{1}{2}|g(a)|$. On obtient alors un $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D_g$ vérifiant que $|x-a| < \eta$, $|g(x)-g(a)| < \frac{1}{2}|g(a)|$. Or $|g(x)-g(a)| \geq |g(a)| - |g(x)|$ et donc, pour tout $x \in D_g$ vérifiant que $|x-a| < \eta$, $|g(x)| \geq |g(a)| - \frac{1}{2}|g(a)| = \frac{1}{2}|g(a)| > 0$. D'où l'affirmation faite un peu plus haut. En appliquant de nouveau le point (iii) de la Définition 1.6 et le Lemme 1.1, on obtient la continuité de f/g en a si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$. Pour $g \circ f$ notons D le domaine de définition de cette composée. Soit (x_n) une suite de points de D convergeant vers a. Avec le point (iii) de la Définition 1.6, appliqué à f, $f(x_n) \to f(a)$ lorsque $n \to +\infty$. En appliquant de nouveau le point (iii) de la Définition 1.6, $g\left(f(x_n)\right) \to g\left(f(a)\right)$ puisque g est continue en $f(a)$. Comme (x_n) est quelconque dans D convergeant vers a, c'est que, toujours en raison du point (iii) de la Définition 1.6, $g \circ f$ est continue en a. Reste à montrer que les fonctions usuelles sont continues là où elle sont définies. Pour les fonctions polynômes la preuve suit du point (iii) de la Définition 1.6 et du Lemme 1.1. Pour la fonction valeur absolue la preuve suit trivialement de l'inégalité triangulaire qui donne que $\big||y|-|x|\big| \leq |y-x|$ pour tous x, y. Pour les autres fonctions il faut à chaque fois trouver un argument spécifique. On se restreint ici à une discussion rapide du cas des fonctions sinus et cosinus. Pour la fonction sinus on pourra montrer (en comparant aires de triangles et aires de secteurs angulaires dans la représentation circulaire du sinus et par parité) que pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, l'inégalité large $|\sin(x)| \leq |x|$ est vraie. De là on tire du point (iii) de la Définition 1.6 que sin est continue en 0. Comme $\cos = \sqrt{1-\sin^2}$ au voisinage de 0, la fonction cos est elle aussi continue en 0 en vertu de ce que nous avons démontré plus haut sur les compositions, sommes, produits et en admettant la continuité de la fonction racine carrée sur $[0, +\infty[$. Reste pour obtenir la continuité des fonctions sinus et cosinus en un point a quelconque à utiliser les formules trigonométriques

$$\sin(a+x) = \sin(x)\cos(a) + \sin(a)\cos(x)$$
$$\cos(a+x) = \cos(a)\cos(x) - \sin(a)\sin(x)$$

et à utiliser la continuité en 0 que l'on vient de démontrer, le point (iii) de la Définition 1.6 et le Lemme 1.1. D'où le théorème. □

Dans ce théorème il se peut que $g \circ f$ ne soit au final défini qu'au point a, de sorte que la question de la continuité de $g \circ f$ devient sans grand intérêt. C'est par exemple le cas si l'on considère la fonction f définie par $f(x) = x^2$. Pour cette fonction $D_f = \mathbb{R}$, où D_f est le domaine de définition de f, et f est bien sûr continue en tout point de $\mathbb{R}$ puisque polynômiale. Si maintenant g est la fonction définie sur $]-\infty, 0]$ par $g(x) = x\ln(-x)$ si $x < 0$ et $g(0) = 0$, alors $D_g =]-\infty, 0]$, où D_g est le domaine de définition de g, et g est continue en 0 d'après notre définition. Si l'on regarde $g \circ f$ cette fonction n'est définie qu'en 0. Une telle configuration limite ne se produira pas si g est définie sur au moins un intervalle ouvert contenant $f(a)$ et f est définie sur au moins un

intervalle ouvert contenant a. Dans ce cas, par continuité de f en a, il existe $\eta > 0$ pour lequel $g \circ f$ est définie sur $]a-\eta, a+\eta[$. Plus généralement, si D_f et D_g sont les domaines de définition de f et g, et si $D_{g\circ f}$ est le domaine de définition de $g \circ f$, on a obligatoirement que $D_{g\circ f} \subset D_f$ et que $f(D_{g\circ f}) \subset D_g$. Si l'on suppose que $f(D_f) \subset D_g$ alors $D_{g\circ f} = D_f$, une situation qu'il est plus facile d'appréhender. Pour fixer les idées, dans un théorème général tel que le Théorème 1.10, et cela sera vrai aussi pour le Théorème 1.14 qui suivra,

(i) pour $f+g$, fg et $\frac{f}{g}$ on prendra f et g définies sur un même sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}$ contenant a,

(ii) pour $g\circ f$, on prendra f définie sur un $D \subset \mathbb{R}$ contenant a, g définie sur un $\tilde{D} \subset \mathbb{R}$ contenant $f(a)$ et, pour faire simple, on demandera que $f(D) \subset \tilde{D}$.

Dans la variante du Théorème 1.10 qui traitera de dérivation, donc dans le Théorème 1.14, on demandera que D contienne un intervalle ouvert centré en a, ou tout simplement que D soit un intervalle ouvert contenant a, et, dans le cas de la composition, que $\tilde{D}$ contienne un intervalle ouvert centré en $f(a)$, ou tout simplement que $\tilde{D}$ soit un intervalle ouvert contenant $f(a)$.

PROPOSITION 1.1. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie et continue sur I et $a < b$ deux points de I. On suppose que f change de signe en a et b et donc que $f(a)f(b) < 0$. Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*

DÉMONSTRATION. Quitte à remplacer la fonction f par $-f$, on peut supposer que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Notons

$$J = \left\{ t \in [a, b] \ / \ \forall t' \in [a, t], f(t') < 0 \right\} .$$

Clairement J est un sous-intervalle non vide ($a \in J$) de I. Notons c la borne droite de J. On a $a < c < b$ puisque

(i) $f(a) < 0$ et la continuité de f en a entraînent que $f < 0$ dans un intervalle du type $[a, a+\eta]$, et donc $[a, a+\eta] \subset J$,

(ii) $f(b) > 0$ et la continuité de f en b entraînent que $f > 0$ dans un intervalle du type $[b-\eta, b]$ pour $0 < \eta \ll 1$.

Par continuité de f en c :

(iii) si $f(c) < 0$ alors $f < 0$ dans un intervalle du type $[c, c+\eta]$,

(iv) si $f(c) > 0$ alors $f > 0$ dans un intervalle du type $[c-\eta, c]$.

Dans le premier cas c ne serait pas la borne droite de J car on aurait en fait $[a, c+\eta] \subset J$. Dans le second cas c ne serait toujours pas la borne droite de J car cette fois-ci on aurait $J \subset [a, c-\eta]$. Donc, forcément, $f(c) = 0$. La proposition est démontrée. □

Il y a cachée derrière cette preuve la notion topologique importante de connexité (les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes, les connexes de $\mathbb{R}$ sont des intervalles). Le résultat est trivialement faux si on ne suppose plus que I est un intervalle (penser au graphe de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ que l'on regarde sur $I =]-\infty, 0[\bigcup]0, +\infty[$). Le résultat est par ailleurs intuitif. Dans le tracé du graphe de f, si on part d'un point $(a, f(a))$ avec $f(a) < 0$ pour rejoindre un point $(b, f(b))$ avec $f(b) > 0$, et s'il est interdit de lever la main, alors il faudra bien couper l'axe des x à un moment. A noter : rien n'interdit de le couper plusieurs fois. La preuve ci-dessus fournit en fait la première abscisse en partant de a où f s'annule. La proposition 1.1 est souvent énoncée sous la forme suivante, connue sous le nom de théorème des valeurs intermédiaires.

THÉORÈME 1.11 (Théorème des valeurs intermédiaires). *Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie et continue sur $[a, b]$. Alors f prend toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$.*

DÉMONSTRATION. Supposons $f(a) \leq f(b)$. Si ce n'est pas le cas, on pourra changer f en $-f$ pour se ramener à cette situation. Si $f(a) = f(b)$ le théorème dit juste que f prend la valeur $f(a)$, ce qui est évident. On pourra donc supposer que $f(a) < f(b)$. Soit $d \in]f(a), f(b)[$ et soit $g = f - d$. Alors g est continue sur I, $g(a) < 0$ et $g(b) > 0$ de sorte que $g(a)g(b) < 0$. Donc, avec la Proposition 1.1, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g(c) = 0$, soit $f(c) = d$. Que f prenne les valeurs $f(a)$ et $f(b)$ est évident. Le théorème est démontré. □

Le théorème des valeurs intermédiaires s'étend facilement au cas où la fonction $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est continue, a une limite s à droite en a, $s \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, et une limite t à gauche en b, $t \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors f prend toutes les valeurs strictement comprises entre s et t. Pour tout sous-intervalle $[A, B]$ strictement compris entre s et t on va effectivement pouvoir trouver des $c, d \in]a, b[$ tels que $f(c) \leq A$ et $f(d) \geq B$ et on se ramène alors au Théorème 1.11.

Le théorème qui suit explore maintenant les relations entre compacité (ici la compacité des intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$) et continuité. On parle d'extremum pour un minimum ou un maximum. Si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un ensemble D, un point a est un point de minimum (respectivement un point de maximum) de f si $f(x) \geq f(a)$ (respectivement $f(x) \leq f(a)$) pour tout $x \in D$.

THÉORÈME 1.12. *Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie et continue sur I. Alors f est bornée sur I et f admet un point de maximum et un point de minimum sur I.*

DÉMONSTRATION. Cette fois-ci c'est la notion de compacité qui se cache derrière ce résultat. Les intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$ sont des compacts et donc (en topologie métrique par exemple) des ensembles ayant la propriété que toute suite de points dans l'ensemble possède une sous-suite convergente

comme nous l'avons vu avec le théorème de Bolzano-Weierstrass. Montrons par exemple que f et majorée et possède un point de maximum dans $[a, b]$. Notons

$$M = \text{borne sup}\,\{f(x), x \in [a, b]\}\ ,$$

ce que l'on écrit $M = \sup_{[a,b]} f$ ou $\sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Par définition M est le plus petit des majorants de l'ensemble $\{f(x), x \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}$ (et possiblement, à ce stade de la preuve, on pourrait avoir $M = +\infty$). On a alors

(i) $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leq M$

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in I$ avec $M - \varepsilon \leq f(x) \leq M$ si $M < +\infty$

(iii) $\forall R > 0$, $\exists x \in I$ avec $f(x) \geq R$ si $M = +\infty$.

Prenons une suite (ε_n) de réels strictement positifs qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. En prenant $\varepsilon = \varepsilon_n$ dans le cas (ii), et $R = \frac{1}{\varepsilon_n}$ dans le cas (iii), et ce pour tout n, on obtient immédiatement une suite (x_n) de points de I qui vérifie que

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = M\ .$$

Comme I est borné, il existe avec le Théorème 1.4 une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) qui est convergente. Notons $\overline{x}$ sa limite de sorte que $x_{\varphi(n)} \to \overline{x}$ lorsque $n \to +\infty$. Puisque I est fermé, $\overline{x} \in I$. Toute sous-suite d'une suite convergente étant convergente et de même limite, on a aussi que

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = M\ .$$

Comme f est continue sur I, donc en particulier en $\overline{x}$, on peut écrire (voir la Définition 1.6) que $f(x_{\varphi(n)}) \to f(\overline{x})$ lorsque $n \to +\infty$. D'où $f(\overline{x}) = M$. En particulier $M < +\infty$ et, avec (i), le théorème est démontré. □

Un autre résultat est fréquemment associé à la compacité : si $I = [a, b]$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle définie et continue sur I, alors f est en fait uniformément continue sur I, la continuité uniforme sur I signifiant que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0\ /\ \forall x, y \in I, |y - x| < \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon\ .$$

Cette phrase de continuité uniforme est plus forte que la phrase de continuité en tout $x \in I$ puisque, maintenant, dans la continuité uniforme, le η ne dépend que de ε et non pas du point x où l'on regarde la continuité. Le η est ici « uniforme » par rapport à x. On renvoie au Chapitre 3, Théorème 3.10, pour la preuve de ce résultat dans un cadre plus général. Le résultat est connu sous le nom de Théorème de Heine.

COROLLAIRE 1.1. *Soient $I = [a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie et continue sur I. On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors soit il existe $c \in]a, b[$ un point où f atteint son minimum, soit il existe $d \in]a, b[$ un point où f atteint son maximum, soit les deux.*

DÉMONSTRATION. Si f est constante la dernière situation est trivialement satisfaite (tous les points de l'intervalle sont à la fois des points de minimum et de maximum). Supposons que f n'est pas constante. D'après le Théorème 1.12 il existe $c, d \in [a, b]$ tels que

$$f(c) = \inf_{x \in I} f(x) \quad \text{et} \quad f(d) = \sup_{x \in I} f(x) \ .$$

On ne peut avoir simultanément $c, d \in \{a, b\}$ puisque $f(a) = f(b)$ et f n'est pas constante. Donc soit $c \in \{a, b\}$ et alors $d \in]a, b[$, soit $d \in \{a, b\}$ et alors $c \in]a, b[$, soit encore $c, d \in]a, b[$. D'où le corollaire. □

1.4. Dérivée première

La dérivée d'une fonction en un point c, lorsqu'elle existe, est la limite finie lorsque $x \to c$ du taux d'accroissement de la fonction en c. Elle s'interprète géométriquement comme le coefficient directeur de la tangente au graphe de f en ce point.

DÉFINITION 1.7. *Soient $I =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $c \in]a, b[$ un point de I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur I. On dit que f est dérivable au point c si le quotient*

$$Q(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ ,$$

appelé taux d'accroissement de f en c, admet une limite finie lorsque x tend vers c. Lorsque cette limite existe elle est bien sûr unique, on la note $f'(c)$ et on dit que $f'(c)$ est la dérivée de f en c. La fonction f est dite dérivable sur I lorsqu'elle est dérivable en tout point de I.

L'écriture mathématique de la limite de la définition est la suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in I \backslash \{c\}, |x - c| < \eta \ \Rightarrow \ \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < \varepsilon \ . \quad (1.8)$$

Une fonction dérivable en un point est forcément continue en ce point. C'est l'objet du théorème suivant. L'idée est que si le taux d'accroissement a une limite finie, et puisque le dénominateur tend vers zéro, forcément le numérateur tend lui aussi vers zéro. Par suite $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ et f est donc continue en c.

THÉORÈME 1.13. *Si une fonction est dérivable en un point, alors elle est continue en ce point.*

DÉMONSTRATION. On utilise (1.8). Soit $\varepsilon > 0$ fixé quelconque. Il existe alors $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$,

$$|f(x) - f(c)| < |f'(c)| \times |x - c| + \varepsilon |x - c|$$

dès que $0 < |x - c| < \eta$. On pose

$$\hat{\eta} = \min\left(\eta, \frac{\varepsilon}{|f'(c)| + 1}, 1\right) .$$

Pour tout $x \in I\backslash\{c\}$ tel que $|x - c| < \hat{\eta}$ on a alors que

$$|f(x) - f(c)| < 2\varepsilon ,$$

et on peut réintégrer $x = c$ puisque clairement $0 < 2\varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, on a obtenu la phrase de continuité de f en c. Le théorème est démontré. □

Les fonctions dérivables sont continues. A l'inverse il existe des fonctions continues qui ne sont dérivables en aucun point. C'est le cas des fonctions de Weierstrass et Takagi discutées à la Section 6.4 du Chapitre 6.

DÉFINITION 1.8. *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$ un point de I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur I. Si f est dérivable au point a, l'équation*

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

est l'équation d'une droite appelée tangente en a au graphe de f.

Tout comme pour les fonctions continues, il y a un théorème général pour les fonctions dérivables. On reprend ici les conventions qui suivent la preuve du Théorème 1.10.

THÉORÈME 1.14 (Théorème général sur la dérivabilité). *Si f et g sont dérivables en un point a, alors $f + g$ et fg sont dérivables en a et*

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a) ,$$
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) .$$

Si de plus $g(a) \neq 0$ alors $g(x) \neq 0$ pour x proche de a et $\frac{f}{g}$ est dérivable en a avec

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2} .$$

Les fonctions constantes sont par ailleurs toujours de dérivées nulles. En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$. Enfin, si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a avec

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a) .$$

Pour finir, les fonctions polynômes, puissances, cos, sin, tan, exp, ln *sont dérivables en tout point des intervalles ouverts où elles sont définies et on a que* $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^\star$, $\cos'(x) = -\sin(x)$, $\sin'(x) = \cos(x)$, $\exp'(x) = \exp(x)$, $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

DÉMONSTRATION. Pour ne pas trop alourdir la présentation, on se restreint à ne démontrer ce théorème que dans le cas de fg. On écrit que

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = (f(x) - f(a))\, g(x) + f(a)\,(g(x) - g(a)) \ .$$

Par suite,

$$\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times g(x) + f(a) \times \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \ .$$

Les taux d'accroissements de f et g en a ont une limite lorsque $x \to a$. De même, par continuité de g en a, puisque dérivable implique continue, g a une limite lorsque $x \to a$. On en déduit que le taux d'accroissement de fg en a a une limite lorsque $x \to a$, et que cette limite vaut $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$. D'où le résultat. □

A partir de la formule de dérivation pour f/g on trouve la formule

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = \frac{-f'(a)}{f(a)^2}$$

valable dès que $f(a) \neq 0$. En ce qui concerne les fonctions puissances, soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction puissance $x \to x^\alpha$, définie pour $x > 0$ par $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$, est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, par composition et formules de dérivation pour l'exponentielle et le logarithme,

$$\begin{aligned}(x^\alpha)' &= \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln(x)} \\ &= \alpha e^{\alpha \ln(x)} e^{-\ln(x)} \\ &= \alpha x^{\alpha - 1} \ .\end{aligned}$$

La fonction racine carrée est ainsi dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée donnée par $(\sqrt{x})' = 1/2\sqrt{x}$ en tout $x > 0$. Si $p = -n$ est un entier négatif, $n \in \mathbb{N}^\star$, on peut aussi définir $x^p = 1/x^n$ pour tout $x \neq 0$. Cette fonction est dérivable en tout point $x \neq 0$ et, là encore, comme on pourra le vérifier facilement avec les formules de dérivation pour $1/f$ et x^n, on trouve que $(x^p)' = px^{p-1}$.

DÉFINITION 1.9. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur I. On dit que f est de classe C^1 sur I si f est dérivable sur I et si sa dérivée $f' : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur I.*

En « mélangeant » les Théorèmes généraux 1.10 et 1.14 sur la continuité et sur la dérivabilité on obtient facilement le théorème suivant.

THÉORÈME 1.15 (Théorème général sur la classe C^1). *Si f et g sont de classe C^1 sur un intervalle ouvert I, alors $f+g$ et fg sont de classe C^1 sur I. Si de plus $g \neq 0$ sur I, alors $\frac{f}{g}$ est de classe C^1 sur I. Si par ailleurs f est de classe C^1 sur I et g est de classe C^1 sur J, avec I, J intervalles ouverts et $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est de classe C^1 sur I. Pour finir, les fonctions polynômes,*

puissances, cos, sin, tan, exp, ln *sont de classe* C^1 *sur les intervalles ouverts où elles sont définies.*

Par induction, en anticipant sur ce qui suit, ce théorème passe facilement à la classe C^k pour tout $k \leq +\infty$. Les fonctions polynômes, puissances, cos, sin, tan, exp, ln sont en fait de classe C^∞ sur les intervalles ouverts où elles sont définies.

Par extremum local d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert I on entend un maximum local ou un minimum local de f. On dira que f a un maximum local en un point $c \in I$ s'il existe $\eta > 0$ tel que $]c-\eta, c+\eta[\subset I$ et $f(x) \leq f(c)$ pour tout $x \in]c-\eta, c+\eta[$. On parle de maximum local strict si $f(x) < f(c)$ pour tout $x \in]c-\eta, c+\eta[$, $x \neq c$. De même, on dira que f a un minimum local en un point $c \in I$ s'il existe $\eta > 0$ tel que $]c-\eta, c+\eta[\subset I$ et $f(x) \geq f(c)$ pour tout $x \in]c-\eta, c+\eta[$. On parle de minimum local strict si $f(x) > f(c)$ pour tout $x \in]c-\eta, c+\eta[$, $x \neq c$. Un extremum local strict est soit un minimum local strict soit un maximum local strict.

THÉORÈME 1.16. *Si une fonction admet un extremum local en un point, et est dérivable en ce point, alors sa dérivée en ce point est forcément nulle.*

On dit encore que les extremums locaux d'une fonction dérivable sont forcément des (à rechercher parmi les) points critiques de cette fonction. Par définition les points critiques d'une fonction dérivable f sont les x pour lesquels $f'(x) = 0$.

DÉMONSTRATION. En changeant f en $-f$ on passe des minimums aux maximums. Supposons que f a un minimum local en c et que f est dérivable en c. Alors $f(x) - f(c) \geq 0$ pour x proche de c. D'un autre côté,

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ ,$$

et le dénominateur $x - c$ change de signe selon que x tende vers c en restant à la gauche de c, ou que x tende vers c en restant à la droite de c. On a donc pour Q (selon que l'on fasse tendre x vers c en restant à la gauche de c ou en restant à la doite de c) des quotients du type

$$Q = \frac{\text{quantité positive ou nulle}}{\text{quantités tantôt positives tantôt négatives}}$$

et donc $f'(c)$ devrait être à la fois négative ou nulle et positive ou nulle. La seule possibilité est que $f'(c) = 0$. Le théorème est démontré. □

On démontre pour finir un compagnon différentiable de la Proposition 1.1.

PROPOSITION 1.2. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a < b$ deux points de I et $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable en a et en b. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$ et que $f'(a)f'(b) > 0$. Il existe alors $c \in]a, b[$ qui est tel que $f(c) = 0$.*

DÉMONSTRATION. Quitte à changer f en $-f$ on peut ici supposer que $f'(a) > 0$ et $f'(b) > 0$. Comme

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ ,$$

et puisque $f(a) = 0$, on obtient facilement (par contradiction) que pour tout $\eta > 0$, il existe $a' \in]a, a + \eta[$ qui est tel que $f(a') > 0$. De même,

$$f'(b) = \lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \ ,$$

et puisque $f(b) = 0$, pour tout $\eta > 0$, il existe $b' \in]b - \eta, b[$ qui est tel que $f(b') < 0$. En choisissant $\eta > 0$ suffisamment petit, $a' < b'$. La fonction f est alors continue sur $[a', b']$ et telle que

$$f(a')f(b') < 0 \ .$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la Proposition 1.1 pour obtenir l'existence de $c \in]a', b'[\subset]a, b[$ pour lequel $f(c) = 0$, ce qui constitue le résultat voulu. □

1.5. Le théorème des accroissements finis

Le théorème des accroissements finis est à la base des analyses différentielles de croissance et décroissance des fonctions. Il est une conséquence simple de ce qui a été dit jusqu'à maintenant.

THÉORÈME 1.17 (Le théorème des accroissement finis). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.*

DÉMONSTRATION. On définit la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = (f(b) - f(a))\,(x - a) - (b - a)\,(f(x) - f(a)) \ .$$

Alors g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et elle vérifie que

$$g(a) = g(b) = 0 \ .$$

Avec le Corollaire 1.1, il existe $c \in]a, b[$ un point où f est extrémale. Donc, d'après le Théorème 1.16, $g'(c) = 0$. Or $g'(c) = f(b) - f(a) - (b - a)f'(c)$. D'où le théorème des accroissements finis. □

Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$, définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$, est dite strictement croissante sur D si $f(x) < f(y)$ pour tous $x < y$ dans D. De même, f est dite strictement décroissante sur D si $f(x) > f(y)$ pour tous $x < y$ dans D. La notion de connexité (voir le Chapitre 9) se cache derrière le résultat suivant qui devient trivialement faux si l'on ne se place plus sur un intervalle. Il suffit de penser à la fonction inverse $x \mapsto 1/x$ sur $] - \infty, 0[\bigcup]0, +\infty[$ pour s'en convaincre. Cette fonction, de dérivée $-1/x^2$ strictement négative, est bien strictement décroissante sur chacun des intervalles $] - \infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, mais $f(-1)$, qui est négatif, n'est pas supérieur à $f(1)$ qui, lui, est positif.

THÉORÈME 1.18. *Soit I un intervalle d'extrémités $a < b$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $]a, b[$. Alors f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$ et décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. De plus si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement croissante sur I et si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement décroissante sur I.*

DÉMONSTRATION. Traitons le cas de la croissance (on passe de croissante à décroissante en changeant f en $-f$). Supposons que $f' \geq 0$ (respectivement $f' > 0$) sur I. Soient $x < y$ deux points de I. Avec la formule des accroissements finis il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = (y - x)f'(c)$$

et si $f' \geq 0$ (respectivement $f' > 0$) sur I alors $f'(c) \geq 0$ (respectivement $f'(c) > 0$) et donc $f(x) \leq f(y)$ (respectivement $f(x) < f(y)$). Comme x, y avec $x < y$ sont quelconques, f est croissante (respectivement strictement croissante). Réciproquement, si f est croissante, comme pour tout $c \in I$

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ ,$$

on constate que $f'(c) \geq 0$ pour tout c en remarquant que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

pour tout $x \neq c$ (si $x > c$ on récupère du « positif sur positif » et si $x < c$ on récupère du « négatif sur négatif », donc encore du positif). Le théorème est démontré. □

Une fonction dérivable f peut très bien être strictement croissante (respectivement décroissante) sans pour autant que l'on ait $f' > 0$ (respectivement $f' < 0$) en tout point de son intervalle de définition. La fonction $x \mapsto x^3$ est ainsi strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais de dérivée nulle en 0. Pour intégrer cet exemple, et dans la seconde partie du théorème, on peut en fait supposer que f est continue sur I, dérivable sur $]a, b[\backslash\mathcal{S}$, avec $\mathcal{S} \subset]a, b[$ un ensemble fini, et telle que $f'(x) > 0$ (respectivement $f'(x) < 0$) pour tout $x \in]a, b[\backslash\mathcal{S}$. Pour le voir, et si par exemple $\mathcal{S} = \{c_1, \ldots, c_n\}$, il suffira tout simplement d'appliquer le théorème tel qu'énoncé ci-dessus sur les intervalles $[a, c_1]$, $[c_1, c_2]$,…,$[c_{n-1}, c_n]$, $[c_n, b]$ avec ouverture ou fermeture en a et b selon que I est lui-même ouvert ou fermé en a et b. Par contre, là encore, on ne peut pas dire que cette situation avec $\mathcal{S}$ fini caractérise la stricte croissance ou décroissance. Un contre-exemple, ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante de stricte croissance dans le cas C^1, donc aussi de stricte décroissance en passant de f à $-f$, sont donnés dans le lemme suivant. La densité d'un ensemble $\mathcal{H} \subset]a, b[$ signifie que tout point de $]a, b[$ est limite d'une suite de points de $\mathcal{H}$. Cela revient encore à dire (voir le

Chapitre 9) que le complémentaire $]a,b[\backslash\mathcal{H}$ de cet ensemble ne contient aucun intervalle ouvert.

LEMME 1.4. *(1) Il existe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec la propriété qu'il existe une suite (x_n) de réels non nuls et deux à deux distincts, convergeant vers 0 et telle que $f'(x_n)=0$ pour tout n.*

(2) Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, avec $a<b$ deux réels, est de classe C^1 sur $]a,b[$ et continue sur $[a,b]$, alors f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur $[a,b]$ si et seulement si l'ensemble $\mathcal{H}$ des $x\in]a,b[$ qui sont tels que $f'(x)>0$ (respectivement $f'(x)<0$) est dense dans $]a,b[$.

DÉMONSTRATION. (1) On note $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction donnée pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=|x\sin(\frac{1}{x})|$ si $x\neq 0$ et $\varphi(0)=0$. Comme $|\varphi(x)|\leq|x|$, φ est continue en 0. Elle l'est sur $\mathbb{R}^\star$ par théorème général sur la continuité. On définit la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ en posant pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)=\int_0^x\varphi(t)dt\ .$$

Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ en vertu du théorème fondamental de l'analyse, de dérivée $f'(x)=\varphi(x)$ en tout point $x\in\mathbb{R}$. Si $x_n=\frac{1}{n\pi}$ pour $n\geq 1$, et $x_0=0$, alors $f'(x_n)=0$ pour tout n. Les x_n sont deux à deux distincts et la suite (x_n) converge vers 0. Par ailleurs, f est strictement croissante par propriété élémentaire de l'intégrale des fonctions continues car si $a<b$ et $f(a)\geq f(b)$, alors $\int_a^b\varphi(t)dt\leq 0$ par relation de Chasles, et comme φ est continue et positive, on devrait avoir $\varphi=0$ sur $[a,b]$, ce qui est impossible car φ ne s'annule qu'en les points isolés x_n. Donc f est strictement croissante. Le point (1) est démontré.

(2) On démontre maintenant (2). On se restreint au cas de la stricte croissance sachant que l'on passe de l'énoncé pour les fonctions strictement croissantes à l'énoncé pour les fonctions strictement décroissantes en changeant f en $-f$. Du théorème fondamental de l'analyse on tire que $f(x)=\int_a^x f'(t)dt+f(a)$ pour tout x tandis que la stricte croissance entraînant la croissance, il suit du Théorème 1.18 que $f'(x)\geq 0$ pour tout x si f est strictement croissante. Si f est strictement croissante on ne peut avoir que $f'=0$ sur un intervalle $]x,y[$ avec $x<y$ car, par Chasles,

$$f(y)-f(x)=\int_x^y f'(t)dt\ .$$

On aurait donc que $f(x)=f(y)$, ce qui contredit la stricte croissance de f. Comme on a toujours que $f'(x)\geq 0$, $]a,b[\backslash\mathcal{H}$ ne contient aucun intervalle ouvert et $\mathcal{H}$ est dense dans $]a,b[$. Réciproquement, si $\mathcal{H}$ est dense dans $]a,b[$, alors $f'(x)\geq 0$ pour tout x par continuité de f'. Toujours par Chasles, si $f(x)=f(y)$ pour $x<y$ alors $\int_x^y f'(t)dt=0$ et donc $f'=0$ sur $]x,y[$ par

propriété élémentaire de l'intégrale des fonctions continues. Une contradiction avec la densité de $\mathcal{H}$ dans $]a,b[$. Le résultat est démontré. □

Le Théorème de Rolle que nous verrons un peu plus loin, à la Section 1.9 de ce chapitre, est une des conséquences directes les plus connues du théorème des accroissements finis. Le Théorème de Darboux en est une autre. Dans l'énoncé de ce théorème on considère qu'un singleton $\{a\}$ est un intervalle, qui ne sera donc rien d'autre que l'intervalle $[a,a]$.

THÉORÈME 1.19 (Théorème de Darboux). *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. L'image $f'(I)$ de I par f' est alors un intervalle de $\mathbb{R}$. En particulier, la fonction f' vérifie donc le théorème des valeurs intermédiaires.*

DÉMONSTRATION. Si f' est constante, le résultat est trivialement vrai (on a admis qu'un singleton était un intervalle). On supposera donc que f' n'est pas constante. Soient $a, b \in I$, $a < b$, tels que $f'(a) \neq f'(b)$. Quitte à changer f en $-f$ on peut supposer que

$$f'(a) < f'(b) \ .$$

Soit $y \in]f'(a), f'(b)[$. Clairement, par définition même de la dérivée comme limite du taux d'accroissement, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $h \in]0,\eta[$,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq f'(a) + \varepsilon \ ,$$
$$\frac{f(b+h)-f(b)}{h} \geq f'(b) - \varepsilon \ .$$

En choisissant $\varepsilon > 0$ suffisamment petit,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < y < \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$$

pour tout $h \in]0,\eta[$. On fixe un $h \in]0,\eta[$. La fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

est continue sur $[a,b]$. Comme $y \in]g(a), g(b)[$, il existe en vertu du théorème des valeurs intermédiaires un point $c \in]a,b[$ tel que $g(c) = y$. Le théorème des accroissement finis donne par ailleurs l'existence d'un point $d \in]c, c+h[$ tel que

$$f(c+h) - f(c) = hf'(d) \ .$$

On en déduit qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que $f'(d) = y$. En conclusion, étant donnés deux points quelconques $f'(a)$ et $f'(b)$ de $f'(I)$, et y un point quelconque entre $f'(a)$ et $f'(b)$, il existe toujours un $x \in I$ tel que $f'(x) = y$. Cela implique clairement que $f'(I)$ est un intervalle. Le théorème de Darboux est démontré. □

1.6. Règle de l'Hospital

La règle de l'Hospital est un outil très utile qui permet dans bien des cas de lever les indéterminations $\frac{0}{0}$ dans les limites de fonctions quotients. On en présente deux versions : une simple régulière et une autre, épointée, un peu plus sophistiquée.

THÉORÈME 1.20 (Règle de l'Hospital.1). *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$ un point de I et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables au point a. On suppose que $f(a) = g(a) = 0$ et que $g'(a) \neq 0$. Alors g est non nulle sur un ensemble $]a-\delta, a+\delta[\backslash\{a\}$, $\delta > 0$, et $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{f'(a)}{g'(a)}$ lorsque $x \to a$.*

DÉMONSTRATION. La limite du quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ lorsque $x \to a$ représente une forme indéterminée puisque du type $0/0$. Par contre, par définition même de la dérivabilité en a, et puisque $f(a) = g(a) = 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)f'(a) + o(x-a) \ , \\ g(x) &= (x-a)g'(a) + o(x-a) \ , \end{aligned} \tag{1.9}$$

où $o(x-a)$ désigne une expression qui, lorsque divisée par $x-a$, tend vers zéro lorsque $x \to a$. Donc une expression qui s'écrit sous la forme $(x-a)\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to a$. Comme $g'(a) \neq 0$, on obtient avec la seconde des équations de (1.9) qu'il existe $\delta > 0$ tel que $g(x) \neq 0$ pour $x \in]a-\delta, a+\delta[\backslash\{a\}$. Maintenant, pour $x \neq a$, en simplifiant par $x-a$, on obtient avec (1.9) que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a) + \varepsilon(x)}{g'(a) + \tilde{\varepsilon}(x)}$$

pour x proche de a, où $\varepsilon(x) \to 0$ et $\tilde{\varepsilon}(x) \to 0$ lorsque $x \to a$. On en déduit que $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{f'(a)}{g'(a)}$ lorsque $x \to a$. Le théorème est démontré. □

Une variante très utile, qui s'appuie sur le théorème des accroissements finis, est donnée par le théorème suivant.

THÉORÈME 1.21 (Règle de l'Hospital.2). *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$ un point de I et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I et dérivables sur $I\backslash\{a\}$. On suppose que $f(a) = g(a) = 0$ et que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I\backslash\{a\}$. Alors g est non nulle sur $I\backslash\{a\}$ et si $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \ell$ lorsque $x \to a$, avec $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors forcément $\frac{f(x)}{g(x)} \to \ell$ lorsque $x \to a$.*

DÉMONSTRATION. En anticipant un peu, on tire du Théorème de Rolle de la Section 1.9 (ou encore du théorème des accroissements finis) que si $g(x) = 0$ pour un $x \neq a$ alors forcément il existe un c entre a et x (ou x et a selon que $a < x$ ou $x < a$) tel que $g'(c) = 0$. Or un tel c ne peut exister si l'on suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I\backslash\{a\}$. Donc $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I\backslash\{a\}$. En