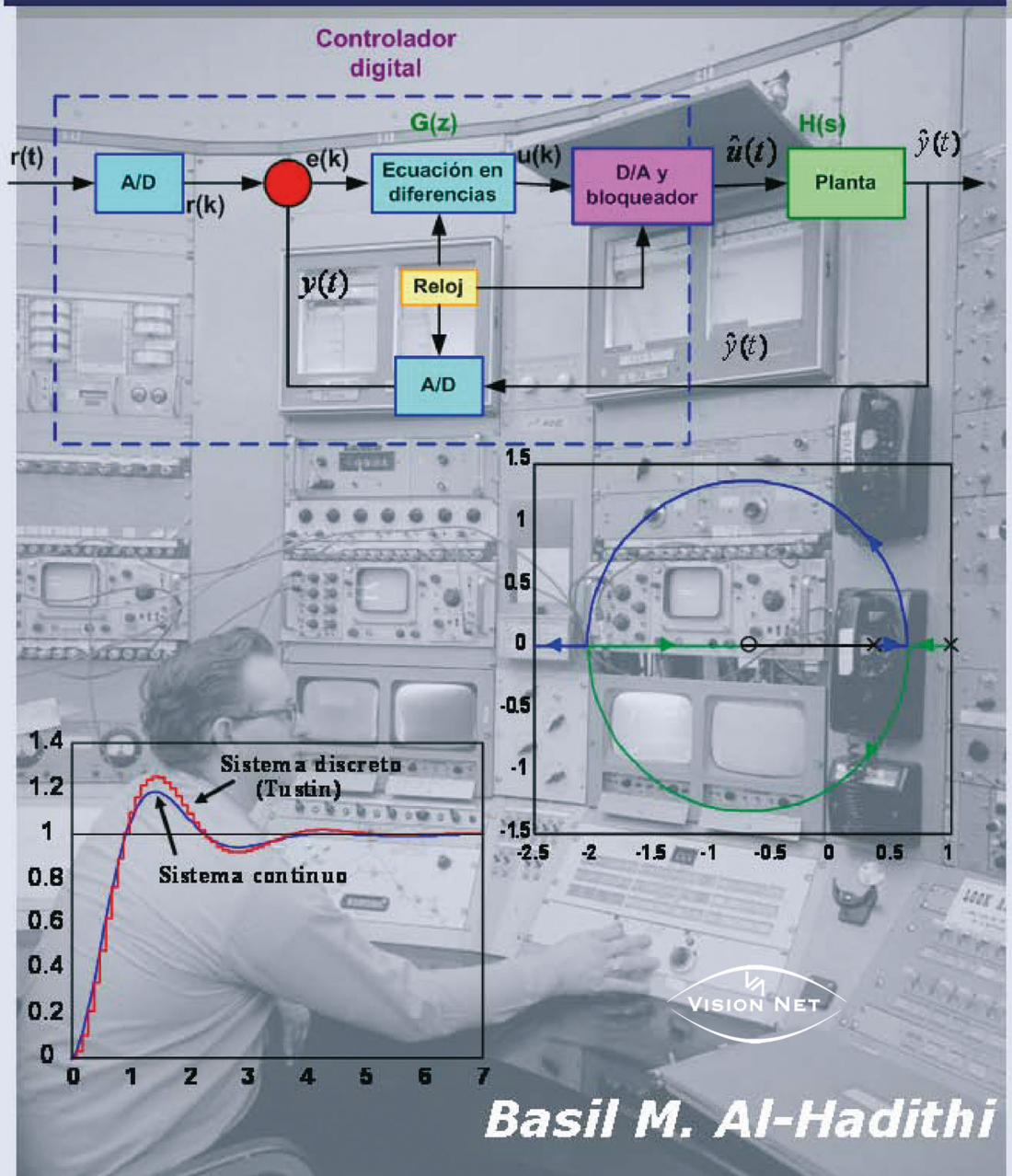


Sistemas Discretos de Control

- Un Enfoque Práctico -



Basil M. Al-Hadithi

SISTEMAS DISCRETOS DE CONTROL

Un Enfoque Práctico

BASIL M. AL-HADITHI
DOCTOR INGENIERO INDUSTRIAL

SISTEMAS DISCRETOS DE CONTROL

Un Enfoque Práctico



2007

SISTEMAS DISCRETOS DE CONTROL

Un Enfoque Práctico

© Autor: BASIL M. AL-HADITHI
DOCTOR INGENIERO INDUSTRIAL

© Editorial Vision Net
Avenida de Asturias s/n impares local 5
Semiesquina a Plaza Castilla 3
28029 Madrid (España)
Tel: 0034 91 3117696
url: www.visionlibros.com

ISBN: 978-84-9983-304-0

Diseño base cubierta: Autor.

Producido por Grupo Corporativo Visionnet.
Cuatro Amigos 5 Posterior 28029 Madrid (España)

Reservados todos los derechos. Esta publicación no puede ser reproducida, ni registrada, sin el permiso previo por escrito de los titulares del copyright.

Contenido

Prólogo	vii
1 Introducción a los Sistemas Discretos de Control	1
1.1 Introducción	1
1.2 Tipos de señales	2
1.3 Sistema de Control Digital	2
1.4 Consideraciones sobre los Sistemas de Control	3
2 Herramientas Matemáticas	5
2.1 La Transformada Z	5
2.1.1 Secuencias	5
2.1.2 Ecuaciones en Diferencias	6
2.2 Propiedades y Teoremas	7
2.2.1 Adición	8
2.2.2 Multiplicación por una Constante	8
2.2.3 Linealidad	8
2.2.4 Multiplicación por a^k	8
2.2.5 Teorema del Desplazamiento	9
2.2.6 Teorema de la Traslación Compleja	9
2.2.7 Teorema de la Diferenciación Compleja	9
2.2.8 Convolución de Secuencias	9
2.2.9 Teorema del Valor Inicial	10
2.2.10 Teorema del Valor Final	10
2.3 Transformada Z de Funciones Básicas	10
2.4 La Transformada Z Inversa	11
2.4.1 Método de la División Directa	11
2.4.2 Método de la Expansión en Fracciones Parciales	11
2.4.3 Método de la Integral de Inversión	14
2.5 Resolución de Ecuaciones en Diferencias	14
2.6 Función de Transferencia Pulso	16

2.7	Secuencia de Ponderación	17
	Problemas Resueltos	18
	Ejercicios con MATLAB	34
3	Sistemas Muestreados	41
3.1	Introducción	41
3.2	Sistemas Muestreados	41
3.2.1	Muestreo mediante Impulsos	42
3.2.2	Teorema del Muestreo	43
3.2.3	Reconstrucción de Señales	44
3.3	Análisis de Sistemas Discretos	47
3.3.1	Función de Transferencia Equivalente	49
3.3.2	Sistemas con Elementos en Serie	50
3.3.3	Sistema con Bloqueador de Orden Cero	51
3.3.4	Sistema con Bloqueador de Orden Uno	52
3.3.5	Otras Configuraciones de Sistemas Realimentados	52
3.3.6	Sistema Realimentado con Controlador Discreto	57
3.4	Resolución mediante la Integral de Convolución	58
	Problemas Resueltos	60
	Ejercicios con MATLAB	78
4	Análisis de los Sistemas Discretos de Control	81
4.1	Introducción	81
4.2	Correspondencia entre el Plano s y el Plano z	82
4.2.1	El Eje Imaginario $j\omega$	82
4.2.2	El Semiplano Negativo	82
4.2.3	La línea de Frecuencia Constante	83
4.2.4	La Recta que Pasa por el Origen	84
4.3	Análisis de la Estabilidad	85
4.3.1	Criterio de Jury	86
4.3.2	Criterio de Routh Extendido	88
4.4	Análisis de la Respuesta de los Sistemas Discretos	89
4.4.1	Sistemas de Primer Orden	90
4.4.2	Sistemas de Segundo Orden	94
4.4.3	Características Dinámicas en los Sistemas Continuos	95
4.4.4	Características Dinámicas en los Sistemas Discretos	98
4.4.5	Características Dinámicas en Sistemas de Segundo Orden	100
4.4.6	Equivalencia Polo en s - Polo en z	101
4.5	Error en Régimen Permanente	102
4.5.1	Tipo de Sistema	102

4.5.2	Cálculo del Error	103
4.5.3	Constantes de Error	104
4.5.4	Error ante Perturbación	110
4.6	Lugar de las Raíces	112
4.6.1	Reglas de Construcción	115
	Problemas Resueltos	118
	Ejercicios con MATLAB	191
5	Diseño de Reguladores Discretos	199
5.1	Introducción	199
5.1.1	Acciones de Control de los Reguladores	200
5.2	Técnicas de Discretización	201
5.2.1	La Integral de Convolución	201
5.2.2	Bloqueadores $B_0(s)$ y $B_1(s)$	202
5.2.3	Método de Euler (Aproximación Derivada)	202
5.2.4	Método de Tustin	203
5.2.5	Equivalencia Polo-Cero	203
5.3	Reguladores PID Discretos	204
5.3.1	Proporcional (P)	207
5.3.2	Proporcional-Derivativa (PD)	207
5.3.3	Proporcional-Integral (PI)	207
5.3.4	Proporcional-Integral-Derivativa (PID)	208
5.4	Diseño de Reguladores Basado en el Lugar	208
	Problemas Resueltos	211
	Ejercicios con MATLAB	244
6	Espacio de Estado. Introducción y Análisis	249
6.1	Introducción	249
6.2	Conceptos Importantes	250
6.3	Ecuaciones en el Espacio de Estado	250
6.4	Representación en el Espacio de Estado	252
6.5	Otras Representaciones en el Espacio de Estado	256
6.6	Solución de las Ecuaciones de Estado	257
6.6.1	Solución de las Ecuaciones de Estado mediante el Procedimiento de Recursión	257
6.6.2	Solución de las Ecuaciones de Estado mediante la Transformada Z	258
6.7	Matriz de Transición de Estado	259
6.8	Matriz de Función de Transferencia Pulso	260
	Problemas Resueltos	262

Ejercicios con MATLAB	274
Índice alfabético	286

Prólogo

El presente libro se enmarca dentro del área del control de sistemas discretos. Respecto a los contenidos, se ha procurado simplificar al máximo la teoría, sin profundizar en los desarrollos matemáticos, proporcionando al lector involucrado en esta disciplina las ideas y conceptos necesarios para abordar el análisis y diseño de los sistemas discretos. El libro contiene el material necesario para ampliar las técnicas de control de sistemas, aplicadas a los sistemas continuos en cursos anteriores, para enlazar ahora con aquellos sistemas que van a ser tratados con técnicas computacionales.

La bibliografía disponible en el campo del control, tanto de sistemas continuos como discretos, es abundante. Este libro proporciona al alumno/lector una serie de problemas acompañados de ejercicios resueltos mediante la aplicación MATLAB¹. De esta manera, el alumno/lector tiene la posibilidad de afianzar los conceptos teóricos y verificar por si mismo las soluciones de los ejercicios del libro y de todos aquellos que le vayan surgiendo. El uso de MATLAB puede acercar al alumno que cursa alguna asignatura de control al campo del análisis y del diseño de los sistemas, de una forma más participativa y, a su vez, tremendamente atractiva.

Se trata de un libro de control de sistemas discretos, estructurado en seis grandes capítulos, cada uno de los cuales comienza con una introducción que resume los fundamentos teóricos que posteriormente se aplicarán. Puede considerarse un segundo curso de control, donde se asume que el lector ya es conocedor del funcionamiento básico de teoría de sistemas continuos.

En el Capítulo 1 se encontrará una introducción a los sistemas discretos de control. Se trata principalmente de definir los distintos tipos de señales como la señal muestreada y la señal digital. También se explican los bloques principales de un sistema de control digital como el muestreador, el bloqueador, el convertidor

¹MATLAB® es una marca registrada de **The MathWorks Inc.**

A/D, el convertidor D/A y el transductor o sensor.

El Capítulo 2 se centra en las herramientas matemáticas utilizadas para el análisis y diseño de los sistemas discretos de control. En los sistemas continuos se emplea la transformada de Laplace para el análisis y diseño de aquellos, facilitando el tratamiento de los modelos que suelen venir dados a través de ecuaciones diferenciales. La herramienta equivalente en los sistemas discretos de control es la transformada Z. Se parte de detallar las propiedades y teoremas de la transformada Z como la adición, multiplicación por una constante, linealidad, multiplicación por a^k . También se comentan los teoremas de desplazamiento, la traslación compleja, la diferenciación compleja, la convolución de secuencias. Se comentan los teoremas del valor inicial y del valor final. Además, se detallan los métodos de la transformada Z inversa como el método de división directa, el método de la expansión en fracciones parciales y el método de la integral de inversión; y se explican la resolución de las ecuaciones en diferencias, la función de transferencia pulso y la secuencia de ponderación.

En el Capítulo 3 se presentan los sistemas muestreados. Se comenta la técnica del muestreo mediante impulsos y se analiza el teorema de muestreo y la reconstrucción de señales. Se explican las distintas configuraciones de los sistemas discretos como sistemas con elementos en serie, sistema con bloqueador orden cero, sistemas con bloqueador orden uno y sistemas discretos realimentados. Finalmente, se explica la resolución mediante la integral de convolución.

En el Capítulo 4 encontrará el análisis de los sistemas discretos de control en el que se analiza primero la correspondencia entre el plano s y el plano z. Se estudia la estabilidad de los sistemas discretos mediante el criterio de Routh extendido y el criterio de Jury. Se analiza la respuesta de los sistemas discretos y se explican las características dinámicas de los sistemas de primer y de segundo orden. Se explica además el cálculo del error en régimen permanente y las constantes de error de posición, de velocidad y de aceleración y se define el error ante perturbaciones. Posteriormente se estudia en detalles el lugar de las raíces donde se explican las reglas de construcción del mismo.

En el Capítulo 5 se tratan las técnicas de diseño de reguladores discretos. Primero se analizan las técnicas de discretización como la integral de convolución, el bloqueador orden cero y orden uno, el método de Euler (aproximación derivada), el método de Tustin y la equivalencia polo-cero. Se explican los distintos tipos de los reguladores PID discretos como el regulador Proporcional (P), Proporcional-Integral (PI), Proporcional-Derivativa (PD) y Proporcional-Integral-derivativa (PID). Luego, se presentan en detalle los reguladores discretos basados en el lugar de las raíces.

Por último, el Capítulo 6 está dedicado al análisis en el espacio de estado.

Se presentan las distintas representaciones como la forma canónica controlable, forma canónica observable, forma canónica diagonal y la forma de Jordan. Se verá cómo se resuelven las ecuaciones de estado mediante el precedimiento de recursión y mediante la transformada Z. Se explica la matriz de transición de estado y la matriz de función de transferencia pulso.

Ya sabe lo que he pretendido, ahora le toca a usted

Basil M. Al-Hadithi
Madrid, Septiembre de 2007

Capítulo 1

Introducción a los Sistemas Discretos de Control

1.1 Introducción

A medida que el computador y los microcontroladores se fueron introduciendo en los esquemas de control, se hizo necesario el estudio de nuevas técnicas de análisis y diseño para controlar los sistemas. Aparece así una nueva disciplina bajo el nombre de sistemas discretos. En la teoría de control, el concepto de señal y sistema continuos se asocian al mundo analógico, mientras que la señal y sistema discretos lo hacen al mundo digital.

Una de las ventajas principales que presentan los nuevos sistemas discretos de control frente los sistemas continuos es su flexibilidad, ya que permiten la implementación de distintas estrategias de control a muy bajo coste. Los controladores o reguladores analógicos están rígidamente unidos a su diseño hardware haciéndolos inviables a cualquier cambio en su algoritmo de control sin que haya que rediseñarlo completamente. Este inconveniente queda subsanado con el uso de microcontroladores y programas de ordenador para implementar controladores o reguladores digitales. El notable avance de la tecnología hace que estos nuevos dispositivos digitales sean cada vez más rápidos y precisos.

La realidad de nuestro entorno es analógica, los sistemas y procesos de control manipulan señales continuas, esto es, toman distintos valores de forma continua a lo largo de tiempo. La inclusión del computador hace imposible el uso directo de señales continuas (analógicas) si previamente no se convierten a magnitudes digitales (bits). Esto conlleva la incorporación de nuevos dispositivos (bloqueadores, muestreadores, convertidores...etc) a los esquemas de control y

el estudio de nuevas herramientas matemáticas y teorías desarrolladas para este campo.

1.2 Tipos de señales

Tomando como base el tiempo “ t ” se puede definir las siguientes señales:

- **Señal Analógica:** es una señal cuya amplitud varía en un intervalo continuo de tiempo, tal y como se muestra en la figura 1.1.
- **Señal Muestreada:** es una señal cuya amplitud tiene valor sólo en instantes discretos de tiempo, tal y como se muestra en la figura 1.1.
- **Señal Digital:** suele ser la señal muestreada y codificada para ser interpretada por un computador.

1.3 Sistema de Control Digital

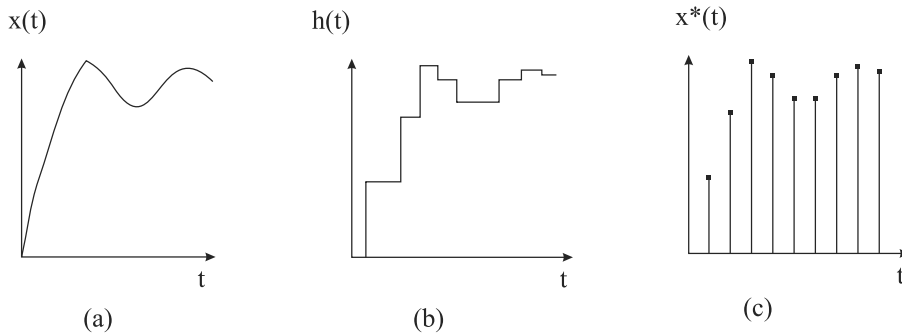


Figura 1.1: Tipos de señales: (a) señal analógica, (b) y (c) señal muestreada

La figura 1.2 muestra el esquema global de un sistema de control digital. Los bloques son:

- **Muestreador:** convierte una señal continua en una señal discreta o muestreada; se suele representar como un interruptor gobernado con el parámetro “ T ” que representa el tiempo de muestreo.
- **Bloqueador:** convierte una señal discreta o digital en una señal continua.

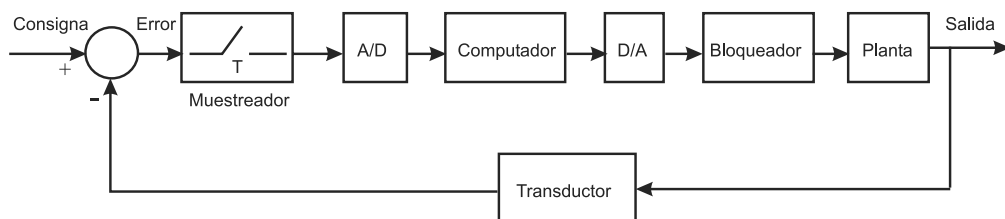


Figura 1.2: Esquema global de un sistema discreto de control

- **Convertidor A/D:** convierte una señal analógica en una señal digital con datos codificados (normalmente en binario).
- **Convertidor D/A:** convierte una señal digital en una señal analógica.
- **Transductor o sensor:** Capta o mide una determinada propiedad física (caudal, temperatura, etc) convirtiéndola en una magnitud eléctrica (voltios, corriente).

Nota: Existen dispositivos comerciales que son muestreadores y bloqueadores todo en uno (en inglés se denota sample & hold S/H), también suelen formar parte del convertidor A/D.

1.4 Consideraciones sobre los Sistemas de Control

Se analizan en este libro los sistemas de control discretos, lineales e invariantes en el tiempo. Los sistemas lineales son aquellos en los que se cumple el principio de superposición. Los sistemas invariantes en el tiempo son aquellos en los que no varían las propiedades del mismo a lo largo del tiempo, o lo que es lo mismo, son sistemas con modelos matemáticos de coeficientes constantes.

Estos sistemas se representan mediante ecuaciones diferenciales en el caso de los sistemas continuos, y con ecuaciones en diferencias en el caso de los sistemas discretos; ambas lineales y de coeficientes constantes.

Capítulo 2

Herramientas Matemáticas

2.1 La Transformada Z

En los sistemas continuos se emplea la transformada de Laplace para el análisis y diseño de aquellos, facilitando el tratamiento de los modelos que suelen venir dados a través de ecuaciones diferenciales.

El hecho de trabajar con señales que toman valores sólo en los instantes de tiempo obtenidos por el proceso de muestreo, obliga a introducir nuevas herramientas, conceptos y teoremas que faciliten el análisis de los sistemas discretos. Estas señales se obtienen al muestrear una señal continua $x(t)$, sólo en los instantes de muestreo, para obtener la señal muestreada $x(kT)$. La dinámica de los sistemas discretos se describen mediante ecuaciones en diferencias que son el equivalente a las ecuaciones diferenciales de los sistemas continuos.

2.1.1 Secuencias

Una secuencia es un conjunto numerado de elementos que se denomina $x(k)$ siendo “k” el índice de la secuencia con un rango de variación $-\infty \leq k \leq \infty$.

$$\{x(k)\} = \{x(-2), x(-1), x(0), x(1), x(2)\}$$

- Secuencia Unilateral: es una secuencia en el intervalo $0 \leq k \leq \infty$.

$$\{x(k)\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- Secuencia Bilateral: es una secuencia en el intervalo $-\infty \leq k \leq \infty$.

$$\{x(k)\} = \{1, 2, 4, 2, 1, \}$$

- Secuencia Retrasada: $y(k)$ es una secuencia retrasada n elementos con respecto a $x(k)$ si verifica $\forall k$: (ver figura 2.1)

$$y(k) = x(k - n)$$

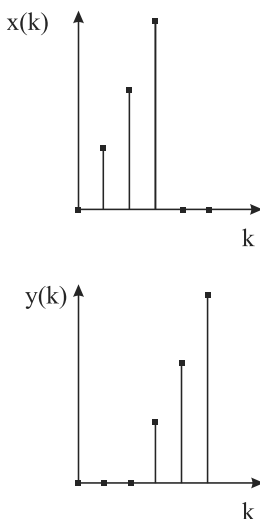


Figura 2.1:

- Secuencia Adelantada: $y(k)$ es una secuencia adelantada n elementos con respecto a $x(k)$ si verifica $\forall k$: (ver figura 2.2)

$$y(k) = x(k + n)$$

2.1.2 Ecuaciones en Diferencias

El modelo matemático de los sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo viene dado mediante sus ecuaciones en diferencias, del mismo modo que las ecuaciones diferenciales definen los modelos matemáticos de los sistemas continuos. La ecuación en diferencias se puede representar como sigue:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m) \quad (2.1)$$

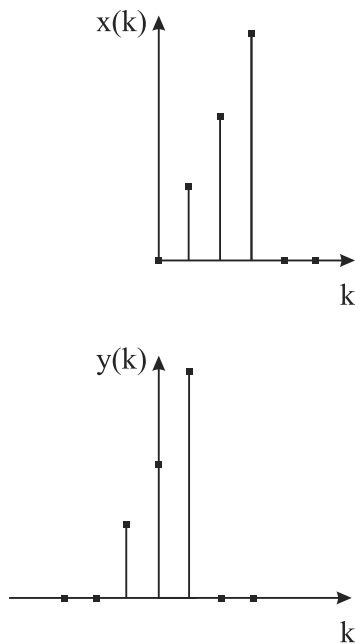


Figura 2.2:

2.2 Propiedades y Teoremas

La transformada Z es la herramienta fundamental para el análisis de los sistemas discretos, del mismo modo que en los sistemas continuos se recurre a la transformada de Laplace. La transformada Z convierte las ecuaciones en diferencias en ecuaciones algebraicas en función de la variable z .

La señal muestreada se define como $x(kT)$, siendo T el tiempo de muestreo. Para simplificar esta notación se suele eliminar el parámetro T , de forma que la señal muestreada se define como $x(k)$.

La transformada Z para una secuencia unilateral $x(k)$ es:

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(t)] = \mathcal{Z}[x(kT)] = \mathcal{Z}[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \quad (2.2)$$

La transformada Z para una secuencia bilateral $x(k)$ es:

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(t)] = \mathcal{Z}[x(kT)] = \mathcal{Z}[x(k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \quad (2.3)$$

Desarrollando (2.2), se obtiene:

$$X(z) = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + x(3T)z^{-3} + x(4T)z^{-4} + \cdots + x(kT)z^{-k} \quad (2.4)$$

A continuación se definen las propiedades y teoremas más importantes de la transformada Z.

2.2.1 Adición

La transformada Z de la suma de dos secuencias es igual a la suma de la transformada Z de cada una de las secuencias, es decir,

$$\mathcal{Z}[x_1(k) + x_2(k)] = \mathcal{Z}[x_1(k)] + \mathcal{Z}[x_2(k)] = X_1(z) + X_2(z)$$

2.2.2 Multiplicación por una Constante

La transformada Z de una secuencia multiplicada por una constante es igual a la transformada Z de dicha secuencia multiplicada por esa constante, es decir,

$$\mathcal{Z}[ax(k)] = a\mathcal{Z}[x(k)] = aX(z)$$

2.2.3 Linealidad

Aplicando las dos propiedades anteriores, se puede obtener la siguiente propiedad de linealidad como sigue:

$$\mathcal{Z}[\alpha f(k) + \beta g(k)] = \alpha\mathcal{Z}[f(k)] + \beta\mathcal{Z}[g(k)] = \alpha F(z) + \beta G(z)$$

2.2.4 Multiplicación por a^k

Si $X(z)$ es la transformada Z de $x(k)$, entonces la transformada Z de $y(k) = a^k x(k)$ es:

$$Y(z) = \mathcal{Z}[a^k x(k)] = X(a^{-1}z)$$

2.2.5 Teorema del Desplazamiento

Si $X(z)$ es la transformada Z de $x(k)$, entonces la transformada Z de una secuencia retrasada n instantes $x(k - n)$ es:

$$\mathcal{Z}[x(k - n)] = z^{-n}X(z)$$

Si $X(z)$ es la transformada Z de $x(k)$, entonces la transformada Z de una secuencia adelantada n instantes $x(k + n)$ es:

$$\mathcal{Z}[x(k + n)] = z^n \left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(k)z^{-k} \right]$$

2.2.6 Teorema de la Traslación Compleja

Si $X(z)$ es la transformada Z de $x(t)$, entonces la transformada Z de $y(t) = e^{-at}x(t)$ es:

$$Y(z) = \mathcal{Z}[e^{-at}x(t)] = X(ze^{aT})$$

2.2.7 Teorema de la Diferenciación Compleja

Si $X(z)$ es la transformada Z de $x(t)$, entonces:

$$T \frac{dX(z)}{dz} = -z^{-1} \mathcal{Z}[tx(t)]$$

2.2.8 Convolución de Secuencias

La transformada del producto de convolución de dos secuencias es el producto de sus transformadas.

$$\mathcal{Z}[x(k)] = X(z)$$

$$\mathcal{Z}[y(k)] = Y(z)$$

$$W(z) = X(z).Y(z)$$

La secuencia de convolución resultante $\{w(k)\}$ se expresa,

$$w(k) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n).y(k - n)$$

2.2.9 Teorema del Valor Inicial

Si $X(z)$ es la transformada Z de $x(t)$ y existe el $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$, entonces:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

2.2.10 Teorema del Valor Final

Si $X(z)$ es la transformada Z de $x(t)$, siempre que $X(z)$ sea estable y exista el $\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$, entonces:

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$$

2.3 Transformada Z de Funciones Básicas

- Escalón unitario

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \forall t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{Z}[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- Rampa unitaria

$$x(t) = \begin{cases} t & \forall t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

donde $x(kT) = kT$, $k=0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{Z}[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} kT \cdot z^{-k} = Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + \dots \\ &= \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

- Exponencial

$$x(t) = e^{-at} \quad \forall t \geq 0$$

donde $x(kT) = e^{-akT}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{Z}[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} \cdot z^{-k} = 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.4 La Transformada Z Inversa

La transformada Z inversa permite obtener la secuencia $x(kT)$ a partir de su transformada $X(z)$. Proporciona información de la secuencia $x(kT)$ sólo en los instantes de muestreo “KT” $k=0, 1, 2, \dots$. Puesto que lo que se obtiene son los valores de $x(kT)$, toda la información que cae fuera de esos instantes es desconocida. Esto hace que una misma secuencia pueda coincidir con el muestreo procedente de distintas señales continuas $x(t)$.

Existen varios métodos para calcular la transformada Z inversa, entre ellos:

2.4.1 Método de la División Directa

Expresando $X(z)$ en forma de cociente, este método consiste en dividir los polinomios del numerador y del denominador para obtener una serie de potencias negativas de z de manera que, por inspección, los valores de la secuencia $x(kT)$ son los coeficientes de esas potencias.

2.4.2 Método de la Expansión en Fracciones Parciales

El método de expansión en fracciones parciales que se utiliza para sistemas discretos es idéntico al método de expansión en fracciones parciales que se utiliza en sistemas continuos.

Expresando $X(z)$ como:

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}$$

Primero hay que factorizar el polinomio del denominador de $X(z)$ de la forma:

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)}$$

Luego se expande $X(z)$ en fracciones simples de manera que puedan encontrarse sus transformadas fácilmente en la siguiente tabla 2.1.

x(t)	X(s)	x(k)	X(z)
-	-	$\delta(t)$	1
1(t)	$\frac{1}{s}$	1(k)	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
t	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$(kT)^2$	$\frac{T^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-akT}$	$\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-z^{-1})}$
-	-	a^k	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
$\text{sen}(ct)$	$\frac{c}{s^2+c^2}$	$\text{sen}(ckT)$	$\frac{z^{-1}\text{sen}(cT)}{1-2z^{-1}\cos(cT)+z^{-2}}$
$\cos(ct)$	$\frac{s}{s^2+c^2}$	$\cos(ckT)$	$\frac{1-z^{-1}\cos(cT)}{1-2z^{-1}\cos(cT)+z^{-2}}$
$e^{-at}\text{sen}(ct)$	$\frac{c}{(s+a)^2+c^2}$	$e^{-akT}\text{sen}(ckT)$	$\frac{e^{-aT}z^{-1}\text{sen}(cT)}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos(cT)+e^{-aT}z^{-2}}$
$e^{-at}\cos(ct)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+c^2}$	$e^{-akT}\cos(ckT)$	$\frac{1-e^{-aT}z^{-1}\text{sen}(cT)}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos(cT)+e^{-aT}z^{-2}}$

Tabla 2.1: Transformada Z

- Polos reales y distintos:

$$X(z) = \frac{a_1}{z - p_1} + \frac{a_2}{z - p_2} + \cdots + \frac{a_n}{z - p_n}$$

siendo cada coeficiente,

$$a_1 = [(z - p_1)X(z)]_{z=p_1}$$

⋮

$$a_n = [(z - p_n)X(z)]_{z=p_n}$$

- Polos múltiples:

Si $X(z)$ tiene polos múltiples p_1 de orden r , junto a otras raíces simples:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{b_r}{(z-p_1)^r} + \frac{b_{r-1}}{(z-p_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{b_1}{z-p_1} + \cdots + \frac{a_{r+1}}{z-p_{r+1}} \\ &+ \frac{a_{r+2}}{z-p_{r+2}} + \cdots + \frac{a_n}{z-p_n} \end{aligned} \quad (2.7)$$

siendo cada coeficiente b_r ,

$$\begin{aligned} b_r &= [(z-p_1)^r X(z)]_{z=p_1} \\ b_{r-1} &= \left\{ \frac{d}{dz} [(z-p_1)^r X(z)] \right\}_{z=p_1} \\ b_{r-j} &= \frac{1}{j!} \left\{ \frac{d^j}{dz^j} [(z-p_1)^r X(z)] \right\}_{z=p_1} \\ b_1 &= \frac{1}{(r-1)!} \left\{ \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} [(z-p_1)^r X(z)] \right\}_{z=p_1} \end{aligned}$$

Los coeficientes $a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_n$ se calculan como se ha mostrado en el caso anterior con polos reales y distintos.

- Polos complejos conjugados:

$$X(z) = \frac{\alpha_1 z + \alpha_2}{(z-p_1)(z-p_2)} + \frac{a_3}{z-p_3} + \cdots + \frac{a_n}{z-p_n}$$

siendo los coeficientes α_1 y α_2 ,

$$(\alpha_1 z + \alpha_2)_{z=p_1} = [(z-p_1)(z-p_2)X(z)]_{z=p_1}$$

2.4.3 Método de la Integral de Inversión

La integral de inversión de la transformada Z es:

$$\mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = x(kT) = x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{k-1} dz$$

siendo C un círculo en el plano Z, con centro en el origen, dentro del cual quedan todos los polos de $X(z)z^{k-1}$.

La solución de la integral de inversión aplicando el teorema de los residuos es:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] &= x(k) = \sum_{i=1}^m \left[\text{residuo de } X(z)z^{k-1} \text{ en el polo } z = z_i \text{ de } X(z)z^{k-1} \right] \\ &= K_1 + K_2 + \cdots + K_m \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde los términos $K_1, K_2, \dots, K_m$ corresponden a los residuos de $X(z)z^{k-1}$ en los polos $p_1, p_2, \dots, p_m$ respectivamente.

Los residuos se calculan de la siguiente manera:

- si el denominador de $X(z)z^{k-1}$ tiene un polo simple en $z = z_i$, entonces el residuo correspondiente será:

$$K_i = \lim_{z \rightarrow z_i} \left[(z - z_i) X(z) z^{k-1} \right]$$

- si el denominador de $X(z)z^{k-1}$ tiene un polo múltiple en $z = z_i$ de orden r, entonces el residuo correspondiente será:

$$K_i = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \left[\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} \left[(z - z_i)^r X(z) z^{k-1} \right] \right]$$

2.5 Resolución de Ecuaciones en Diferencias

El modelo matemático de un sistema discreto viene dado mediante la ecuación en diferencias, la cual describe la dinámica del mismo. La solución de esta ecuación se puede obtener fácilmente mediante una computadora. Sin embargo este método no permite obtener una expresión en forma cerrada para $x(k)$, tal y como se consigue con el método de la transformada Z.

La ecuación en diferencias de un sistema discreto lineal viene dado por la siguiente expresión:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \cdots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_m u(k-m) \quad (2.9)$$

Si los coeficientes a_i y b_i son constantes el sistema se dice es invariante. Un sistema lineal e invariante cumple el principio de superposición.

Las secuencias $u(k)$ e $y(k)$ representan la entrada y la salida del sistema. Aplicando la transformada Z a la ecuación en diferencias se obtiene el modelo matemático del sistema en función de la variable z . Cada uno de los términos de la ecuación en diferencias se resuelven aplicando el teorema del desplazamiento tal y como se muestra en la tabla 2.2.

Función discreta	Transformada z
$x(k+3)$	$z^3 X(z) - z^3 x(0) - z^2 x(1) - zx(2)$
$x(k+2)$	$z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1)$
$x(k+1)$	$zX(z) - zx(0)$
$x(k)$	$X(z)$
$x(k-1)$	$z^{-1} X(z)$
$x(k-2)$	$z^{-2} X(z)$
$x(k-3)$	$z^{-3} X(z)$

Tabla 2.2: Transformada Z de ecuaciones en diferencias

2.6 Función de Transferencia Pulso

La función de transferencia de un sistema continuo relaciona las transformada de Laplace de la salida con la de la entrada. De forma similar, la función de transferencia de un sistema discreto relaciona las transformada Z de la salida con la transformada Z de la entrada.

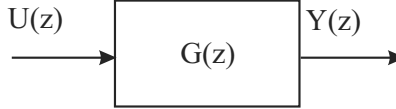


Figura 2.3:

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

$G(z)$ recibe el nombre de función de transferencia pulso, y se obtiene mediante la ecuación en diferencias (2.9) operando de la siguiente manera:

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) + \dots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \dots + b_m z^{-m} U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

La función de transferencia $G(z)$ coincide con la respuesta del sistema ante entrada impulso δ_k .

$$u(k) = \delta_k$$

$$\mathcal{Z}[u(k)] = \mathcal{Z}[\delta_k]$$

$$Y(z) = G(z)U(z) = G(z)$$

En los sistemas continuos se da la misma circunstancia en la cual, la función de transferencia $G(s)$ del sistema coincide con la respuesta del mismo ante entrada impulso.