Colección Electromagnetismo

Electrostática

José Damián Catalá



Editorial
Tébar Flores

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Electrostática

José Damián Catalá

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Electrostática

José Damián Catalá

Editorial
Tébar Flores

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Datos de catalogación bibliográfica:
ELECTROSTÁTICA
José Damián Catalá

EDITORIAL TÉBAR FLORES, S.L., Madrid, año 2016
ISBN digital: 978-84-7360-585-4
Materias: Física
Formato: 165 × 240 mm
Páginas: 544

www.tebarflores.com

Todos los derechos reservados. Queda prohibida, salvo excepción prevista en la Ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con la autorización expresa de Editorial Tébar Flores. La infracción de estos derechos puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (arts. 270 y siguientes del Código Penal).

ELECTROSTÁTICA
José Damián Catalá
© 2016 Editorial Tébar Flores, S.L.
C/ Matilde Hernández, 34
28019 Madrid
Tel.: 91 550 02 60
Fax: 91 550 02 61
ventas@tebarflores.com
www.tebarflores.com

ISBN digital: 978-84-7360-585-4

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

A toda mi familia

Lo mejor que se puede hacer en favor de aquellos que nos aman es seguir siendo feliz.

Gracias

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Prólogo

Electrostática es una obra resultado de mi experiencia académica en las asignaturas de *Campos y Ondas* y *Fundamentos Físicos*, en la Universidad Politécnica de Cartagena. La razón o justificación de la aparición de este libro la busco en el cambio profundo de los planes de estudio. Espero que este cambio convierta al libro en una herramienta necesaria y útil para los estudiantes. No pretendo que esta obra sea un libro de texto, sino más bien una herramienta de trabajo que permita clarificar conceptos y desarrollar una serie de capacidades, capacidades que permitan crear una visión amplia de la electrostática como pieza fundamental para el estudio del electromagnetismo.

La obra comprende seis capítulos con una estructura de corte clásico. Soy consciente que el conocimiento de la *electrostática* es fundamental e indispensable para tratar fenómenos electromagnéticos, y para ello es necesario realizar una exposición teórica de los fenómenos tratados, intentando comunicarlos de una forma clara y completa con el objetivo de alcanzar una perfecta comprensión del concepto. Parece a priori que el desarrollo del texto es similar a la mayoría de los textos ya publicados, pero difiere en el apartado práctico. Hacemos mención a Séneca, que decía *'Largo es el camino de la enseñanza por medio de teorías; breve y eficaz por medio de ejemplos'*. La casi totalidad de los textos publicados que abordan esta temática, pero no de forma exclusiva, sugieren ejercicios prácticos, y algunos de ellos presentan las soluciones de los mismos. Pensando en el alumno que estudia estos textos, creo que les resultaría muy práctico tener al profesor cerca para poder llegar a las soluciones que éstos proponen. Esto parece

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

difícil, pero una solución válida es realizar los ejercicios, y realizarlos de forma que conecten directamente con los conceptos estudiados y así afianzarlos. Esto constituye una de las novedades del texto: ya no aparece una lista de ejercicios a resolver, sino éstos mismos, ya resueltos.

Otra de las novedades que presenta este libro es el apartado de utilidades. En ellas, el alumno encontrará las herramientas matemáticas necesarias para abordar el tema en estudio. Y por último, propongo algunas lecturas o temas de actualidad, no sólo para ver la aplicación práctica de lo estudiado, sino para motivar al alumno.

Ha sido importante la colaboración del alumnado en el proceso de realización de esta obra, ya que ellos son el mejor punto de referencia para la búsqueda de la claridad conceptual y de la profundidad de esta obra.

El libro va dirigido, en un principio, a alumnos de los primeros cursos de los distintos grados en ingeniería o ciencias; no obstante, cualquiera puede adentrarse en este mundo de la electrostática y de los fenómenos eléctricos, ya que he procurado partir de situaciones históricas, e ir construyendo el conocimiento actual. Es cierto que el libro contiene más material del que se imparte en estos cursos; esto manifiesta que la obra no es un libro de texto. Es una herramienta que también es útil para el profesor, ya que así tendrá una visión de conjunto más amplia, y le permitirá seleccionar aquellos contenidos que estime necesarios.

Uno de los objetivos fundamentales de esta obra es que el alumno y el profesor dispongan de un material de interés, útil y de valor. Creo que de esta forma es posible que el profesor estimule la iniciativa y potencie en el alumno su capacidad creativa.

Es cierto que no todos los autores tienen el mismo punto de vista, y por tanto los detalles que expresan en cada tema difieren mucho entre ellos. He pretendido dar coherencia y sentido a los temas tratados, e intentar buscar el máximo de detalles.

Para escribir un libro es necesario el concurso de otras personas, amigos que te orientan, critican y buscan sacar el máximo rendimiento de tu trabajo. Este es el caso del catedrático Dr. Carlos González, que con sus consejos, orientaciones y propuestas, consiguió que en momentos difíciles prosiguiera con más tesón la elaboración de este libro. También agradecer al catedrático Dr. Miguel Ortuño, su influencia a la hora de escribir y su participación con la exposición de *Materiales superconductores*. Agradecer a los profesores, Dr. José Abad y Dr. Manuel Caravaca su contribución con

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

los artículos *Microscopía de fuerza electrostática y microscopía Kelvin*, y *Sistemas de unidades eléctricas*, ya que con ellos hemos dado más realce a esta obra. Un apoyo logístico e informático ha sido fundamental para la realización de este libro, por ello agradecer al *Professor*, Dr. Antonio Pérez su esfuerzo y su contribución. De igual forma, quiero disculparme ante mi grupo de investigación en *Materia condensada* por mi dedicación en exclusiva a la realización de esta obra, y darle las gracias por su tolerancia y comprensión durante estos años. Por último, agradecer a *Phywe* su disposición para la utilización de material gráfico, y a mis compañeros del Departamento de Física Aplicada, Dr. Nicolás, Dr. Anastasio y Dr. Javier Padilla, por sus orientaciones y críticas que siempre he tenido en cuenta para ofrecer un libro fundamentalmente útil para el alumno.

Cartagena, mayo 2016

José Damián Catalá

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Índice general

1. Generalidades de campos **1**

1.1. Concepto de campo 1
1.2. Coordenadas 3
1.3. Elemento de arco, área y volumen 4
1.4. Campo escalar 11
1.4.1. Gradiente de un campo escalar 12
1.4.2. Gradiente en coordenadas curvilíneas ortogonales 15
1.5. Campo vectorial 17
1.5.1. Ecuación de las líneas 17
1.5.2. Flujo 19
1.5.3. Divergencia 24
1.5.4. Circulación 28
1.5.5. Rotacional 31
1.6. Campos que derivan de un potencial 40
1.7. Campos solenoidales 43
1.8. Laplaciano de un campo escalar 47
1.9. Teorema de Helmholtz 50
1.10. Teorema de Gauss 51
1.11. Teorema de Stokes 54
1.12. Ejercicios 56
1.13. Utilidades 83
1.14. Cuestiones prácticas 87

2. Campo eléctrico **91**

2.1. Carga eléctrica 91
2.2. Ley de Coulomb 94
2.2.1. Distribuciones continuas de carga 97
2.3. Campo eléctrico 100

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

2.4. Movimiento de partículas cargadas 108
2.5. Densidades de carga y la función Delta de Dirac 110
2.6. Divergencia del campo eléctrico 111
2.6.1. Cálculo directo de la divergencia del campo 116
2.7. Carácter conservativo del campo eléctrico 124
2.8. Ejercicios 127
2.9. Utilidades 159
2.10. Cuestiones prácticas 161

3. Potencial eléctrico **165**
3.1. Consecuencia del carácter conservativo del campo eléctrico 165
3.2. Expresión del potencial eléctrico 166
3.3. Superficies equipotenciales 173
3.4. Ecuación de Poisson y Laplace 174
3.5. Teorema de unicidad 175
3.6. Ecuación de Laplace. Separación de variables. 176
3.6.1. Dependencia en una coordenada 176
3.6.2. Dependencia en más de una coordenada 183
3.6.3. Coordenadas cilíndricas 192
3.7. Ecuación de Poisson 196
3.8. Método de las imágenes 201
3.9. Desarrollo multipolar 204
3.10. Métodos numéricos 216
3.10.1. Método de las diferencias finitas 216
3.11. Ejercicios 221
3.12. Utilidades 257
3.13. Cuestiones prácticas 260

4. Materiales eléctricos **265**
4.1. Conductores, semiconductores y aislantes 265
4.2. Campo eléctrico atómico 270
4.3. Propiedades electroestáticas de los conductores 271
4.4. Campo en la superficie de un conductor 276
4.5. Sistemas de conductores 281
4.5.1. Coeficientes de potencial 281
4.5.2. Coeficientes de capacidad 287
4.6. Capacitancia 289
4.7. Dieléctricos 291

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

4.8. Fuerzas y momentos sobre dipolos 292
4.9. Densidades de carga de polarización 293
4.10. Campo depolarizante 300
4.11. Ley de Gauss en dieléctricos 306
4.12. Susceptibilidad eléctrica 309
4.13. Polarizabilidad 313
4.14. Ferroelectricidad 319
4.15. Condensadores con material dieléctrico 320
4.16. Condiciones en la frontera 328
4.17. Rigidez eléctrica 335
4.18. Ejercicios 338
4.19. Utilidades 373
4.20. Cuestiones prácticas 375

5. Energía electrostática **379**
5.1. Energía de una distribución discreta de cargas 379
5.2. Energía de una distribución continua de carga 384
5.3. Autoenergía 389
5.4. Distribución de carga y campo externo 389
5.5. Energía de un sistema de conductores cargados 392
5.6. Energía electrostática en medios dieléctricos 394
5.7. Variación energética en un dieléctrico 396
5.8. Fuerzas electrostáticas 398
5.9. Fuerza sobre una distribución de carga 402
5.10. Ejercicios 407
5.11. Utilidades 430
5.12. Cuestiones prácticas 432

6. Corriente eléctrica **435**
6.1. Corriente eléctrica y tipos 435
6.2. Densidad de corriente 436
6.3. Ecuación de continuidad 439
6.4. Corriente estacionaria 441
6.5. Ley de Ohm 442
6.6. Resistencia 444
6.7. Consideraciones energéticas 448
6.8. Asociación de resistencias 450
6.9. Fuerza electromotriz 455

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

6.10. Leyes de Kirchhoff 458
6.11. Medida de la fuerza electromotriz 466
6.12. Aparatos de medida 468
6.13. Método de mallas 469
6.14. Medidas de resistencias 472
6.15. Teoremas de redes 474
6.15.1. Teorema de superposición 474
6.15.2. Teorema de Thévenin 476
6.16. Régimen transitorio 478
6.17. Ejercicios 484
6.18. Utilidades 514
6.19. Cuestiones prácticas 518

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Capítulo 1

Generalidades de campos

Presentamos los elementos de cálculo vectorial como herramientas indispensables para el tratamiento del campo electromagnético. De esta forma establecemos la nomenclatura que vamos a utilizar en todo el texto.

En este primer capítulo introducimos el concepto de campo y la utilización de coordenadas curvilíneas, con el objetivo de valorar su aplicación, que conjuntamente con las herramientas matemáticas necesarias, nos permiten analizar los efectos y propiedades de estos campos.

1.1. Concepto de campo

Un campo es toda magnitud física definida en una cierta región del espacio y para un cierto intervalo temporal.

La temperatura de una habitación durante cierto período de tiempo es un ejemplo de campo. En cada punto de la habitación y para cada instante de tiempo, la temperatura tiene un valor bien definido.

El vector de posición de una partícula, por ejemplo, no es un campo, pues no está definido para cada punto del espacio. Se trata de **un** solo vector, que depende únicamente del tiempo, pero no del espacio.

Para describir un campo, hemos de especificar su valor en función de las coordenadas espaciales y temporales. Un campo M es una función de la posición $\vec{r}$ o, equivalentemente, de $(x,\, y,\, z)$ y del tiempo t

$$M = f(x, y, z, t) \tag{1.1}$$

Los campos pueden ser escalares y vectoriales, de acuerdo con el carácter de la

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

magnitud física orrespondiente.

Los campos escalares están representados por una única función, tal como la de la ecuación anterior (1.1). Los campos vectoriales están representados por tres funciones, una para cada componente

$$M_x = f_1(x, y, z, t) \tag{1.2}$$

$$M_y = f_2(x, y, z, t) \tag{1.3}$$

$$M_z = f_3(x, y, z, t) \tag{1.4}$$

El campo de temperaturas, mencionado arriba, es un campo escalar, pues la temperatura es una magnitud escalar. Otros ejemplos de campos escalares son la presión de un fluido y la densidad de una sustancia cualquiera.

La velocidad de las partículas de un fluido (siempre que consideremos a éste como un continuo) son un ejemplo de campo vectorial. Dicha velocidad depende tanto del tiempo como de la posición de la partícula.

Otro ejemplo de campo vectorial lo podemos hallar en la fuerza gravitatoria. Consideremos un conjunto de partículas con unas ciertas masas y en unas determinadas posiciones. Estudiemos la fuerza que producen sobre otra partícula de prueba dada. Dicha fuerza depende de dónde (y cuándo) esté la partícula de prueba, y es por lo que disponemos de un campo de fuerzas. El campo es un *campo tensorial* cuando la magnitud física es un tensor.

Decimos que un campo es *estacionario* o *constante* cuando no depende del tiempo. Se dice que es *uniforme* cuando no depende de la posición.

No todos los campos necesitan de un medio material para su existencia, esto es lo que ha conducido a errores en la consideración del espacio como propio campo. Cuando un campo necesita de la existencia de un medio material, diremos que dicho campo es un *campo material*. Un campo de temperaturas o un campo de densidades necesitan de un medio material, decimos que son campos materiales. En el caso de no necesitar un medio material, el campo es *inmaterial*.

El concepto de campo se introdujo en el estudio de la electricidad para explicar la idea de acción a distancia.

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

1.2. Coordenadas

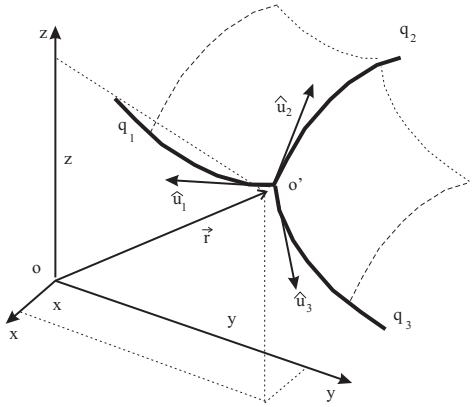


Figura 1.1: Sistemas curvilíneos.

A cada punto del espacio podemos asociar, de forma unívoca, un conjunto de tres números que denominamos coordenadas. En el sistema de coordenadas cartesianas, un punto vendrá caracterizado por los valores x, y, z. Hay otros sistemas cuyos ejes no tienen porqué ser rectas, decimos que tratamos con sistemas curvilíneos, que nos permiten también caracterizar a un punto en el espacio mediante otros valores q_1, q_2, q_3. A tales valores les denominamos coordenadas curvilíneas.

Un punto como O' tiene coordenadas x, y y z, que corresponden a las componentes del vector de posición $\vec{r}$ en el sistema cartesiano de origen O. El punto O' puede ser el origen para un sistema curvilíneo con coordenadas q_1, q_2 y q_3. Para definir tales coordenadas curvilíneas establecemos una correspondencia biunívoca entre ellas y las coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} x &= x\,(q_1,\, q_2,\, q_3) \\ y &= y\,(q_1,\, q_2,\, q_3) \\ z &= z\,(q_1,\, q_2,\, q_3) \end{aligned} \tag{1.5}$$

En cada punto definimos un triedro curvilíneo, tal y como muestra la figura 1.2, y las superficies que lo forman se definen como

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1\,(x, y, z) = cte \\ q_2 &= q_2\,(x, y, z) = cte \\ q_3 &= q_3(x, y, z) = cte \end{aligned}$$

Las líneas coordenadas se corresponden con la intersección dos a dos de las superficies anteriores, y los ejes coordenados se corresponden con las tangentes a dichas líneas. En la figura 1.2, el vector $\vec{r} = \overrightarrow{OO'} = x\,(q_i)\,\hat{\imath} + y\,(q_i)\,\hat{\jmath} + z\,(q_i)\,\hat{k}$ determina el origen del sistema curvilíneo y los vectores tangentes a las líneas son

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\hat{\imath} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\hat{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\hat{k}$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = \frac{\partial x}{\partial q_2}\hat{\imath} + \frac{\partial y}{\partial q_2}\hat{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial q_2}\hat{k}$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = \frac{\partial x}{\partial q_3}\hat{\imath} + \frac{\partial y}{\partial q_3}\hat{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial q_3}\hat{k}$$

Vectores unitarios

Los vectores unitarios son los vectores tangentes unitarios a las líneas coordenadas, es decir

$$\hat{u}_t = \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}|}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \tag{1.6}$$

donde $\hat{u}_t$ es el vector unitario tangente, y los h_i son unos coeficientes denominados *factores de escala*, y cuyos valores son los módulos de la variación de $\vec{r}$ con respecto a cada coordenada curvilínea.

Si el sistema es ortogonal, debe verificarse

$$\hat{u}_i \cdot \hat{u}_j \;=\; \delta_{ij} \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker.

1.3. Elemento de arco, área y volumen

El elemento de arco corresponde al análisis de la variación de $\vec{r}$ con respecto a las coordenadas curvilíneas. Este elemento tendrá la forma

$$d\vec{r} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right) dq_1 + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\right) dq_2 + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\right) dq_3$$

utilizamos la expresión 1.6, y las derivadas parciales las escribimos en términos de los parámetros de escala y los unitarios tangentes. Es decir

$$d\vec{r} \;=\; h_1 dq_1 \hat{u}_1 + h_2 dq_2 \hat{u}_2 + h_3 dq_3 \hat{u}_3 \tag{1.7}$$

Los elementos de área los obtenemos a partir del producto vectorial de las componentes curvilíneas del elemento de arco, de esta forma un elemento de superficie cuyo vector lleve la dirección del unitario $\hat{u}_1$ será

$$d\hat{s}_1 \;=\; h_2 dq_2 \hat{u}_2 \times h_3 dq_3 \hat{u}_3$$
$$d\hat{s}_1 \;=\; h_2 dq_2 h_3 dq_3 \hat{u}_1$$

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Si el vector del elemento de superficie lleva la misma dirección que el unitario $\hat{u_2}$, entonces su valor es

$$d\hat{s}_2 = h_1 dq_1 \hat{u}_1 \times h_3 dq_3 \hat{u}_3$$
$$d\hat{s}_2 = h_1 dq_1 h_3 dq_3 \hat{u}_2$$

y si la dirección coincide con el unitario $\hat{u_3}$, el elemento de área es

$$d\hat{s}_3 = h_1 dq_1 \hat{u}_1 \times h_2 dq_2 \hat{u}_2$$
$$d\hat{s}_3 = h_1 dq_1 h_2 dq_2 \hat{u}_3$$

De forma general el elemento de superficie diferencial en coordenadas curvilíneas ortogonales lo escribimos de la siguiente forma

$$d\vec{s} = h_2 dq_2 h_3 dq_3 \hat{u}_1 + h_1 dq_1 h_3 dq_3 \hat{u}_2 + h_1 dq_1 h_2 dq_2 \hat{u}_3 \tag{1.8}$$

El elemento de volumen es el volumen determinado por las componentes curvilíneas del elemento de arco

$$\begin{aligned} dv &= h_1 dq_1 \hat{u}_1 \cdot (h_2 dq_2 \hat{u}_2 \times\ h_3 dq_3 \hat{u}_3) = \\ &= h_1 dq_1 h_2 dq_2 h_3 dq_3 \left(\hat{u}_1 \cdot (\hat{u}_2 \times \hat{u}_3)\right) = \\ &= h_1 dq_1 h_2 dq_2 h_3 dq_3 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Elementos de arco, superficie y volumen para el sistema de coordenadas esféricas.

Dado un vector $\vec{r} = (x, y, z)$ en coordenadas cartesianas, definimos las coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), según 1.5 mediante la transformación

$$\left.\begin{array}{c} x = r\ \sin\theta\ \cos\phi \\ y = r\ \sin\theta\ \sin\phi \\ x = r\cos\theta \end{array}\right\}$$

donde $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Para establecer los elementos de arco, superficie y volumen, como hemos descrito anteriormente, es necesario determinar los factores de escala.

El vector de posición de un punto p en coordenadas esféricas, como apreciamos en la figura 1.2, lo escribimos de la siguiente forma

$$\vec{r} = r\sin\theta\ \cos\phi\,\hat{\imath} + r\sin\theta\ \sin\phi\,\hat{\jmath} + r\cos\theta\,\hat{k}$$

A continuación determinamos la variación de $\vec{r}$ con respecto a todos los parámetros

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

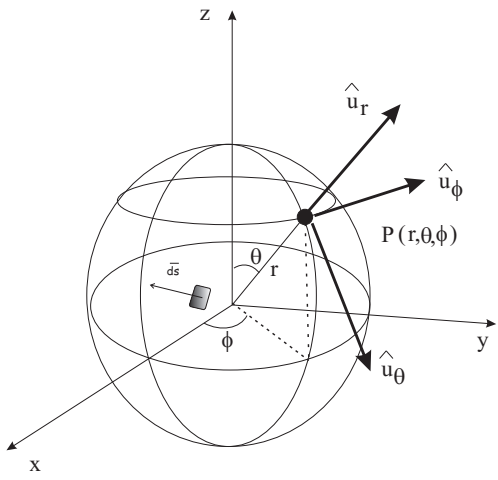


Figura 1.2: **Coordenadas esféricas.**

- $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial r}$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin\theta\,\cos\phi\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\sin\phi\,\hat{\jmath} + \cos\theta\,\hat{k}$$

cuyo módulo es

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right| = \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta} = 1$$

y el factor de escala h_1, es según 1.6

$$h_1 = 1$$

- $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$

De igual forma determinamos la variación de $\vec{r}$ respecto de θ

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r\cos\theta\,\cos\phi\,\hat{\imath} + r\cos\theta\,\sin\phi\,\hat{\jmath} - r\sin\theta\,\hat{k}$$

cuyo módulo es

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right| = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = r$$

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

y el factor de escala correspondiente es

$$h_2 = r$$

- $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}$

  La variación de $\vec{r}$ con respecto a ϕ es

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -r \sin\theta \, \sin\phi \, \hat{\imath} + r \sin\theta \, \cos\phi \, \hat{\jmath}$$

  y su módulo

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = \sqrt{r^2 \sin^2\theta} = r \sin\theta$$

  de forma que el factor de escala h_3 es

$$h_3 = r \sin\theta$$

Para determinar el elemento de arco, utilizamos la expresión 1.7, y como el vector de superficie lleva dirección radial, entonces $\vec{ds} = ds\,\hat{r}$, y el valor del área de dicha superficie elemental la determinamos mediante la expresión 1.8.

Para el volumen, utilizamos la expresión 1.9

- Elemento de arco

$$\overrightarrow{dr} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}$$

- Elemento de superficie

$$\overrightarrow{ds} = ds\,\hat{r} = r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

- Elemento de volumen

$$dv = r^2\,dr\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

Elementos de arco, superficie y volumen para un sistema de coordenadas cilíndricas.

Un punto P, como el indicado en la figura 1.3, está localizado mediante el vector $\vec{r}$ con componentes

$$\vec{r} = r\,\cos\theta\,\hat{\imath} + r\,\sin\theta\,\hat{\jmath} + z\hat{z}$$

siendo $0 < \theta < 2\pi$. Procedemos de forma análoga a la realizada anteriormente y determinamos los factores de escala

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

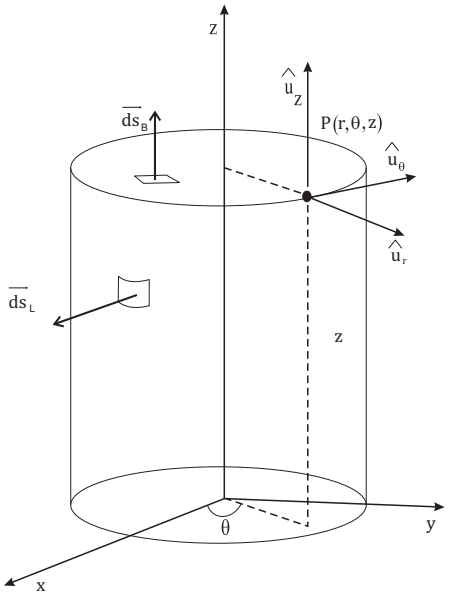


Figura 1.3: **Coordenadas cilíndricas.**

$$h_1 = |\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

$$h_2 = |\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}| = \sqrt{r^2\,\sin^2\theta + r^2\,\cos^2\theta} = r$$

$$h_3 = |\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}| = 1$$

- El elemento de arco es según la expresión 1.6

$$\overrightarrow{dr} = dr\,\hat{r} + rd\theta\,\hat{\theta} + dz\hat{z}$$

- Si el elemento de superficie está en la base del cilindro, dicha superficie tendrá dirección según el unitario $\hat{z}$, el valor de dicha superficie es

$$\overrightarrow{ds}_B = h_1\,h_2\,\mathrm{dq_1}\,\mathrm{dq_2}\,\hat{\mathrm{u}}_1 \times \hat{\mathrm{u}}_2 = \mathrm{r}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{dr}\,\hat{\mathrm{z}}$$

El valor de un elemento de superficie en la pared lateral del cilindro es

$$\overrightarrow{ds}_L = h_3\,h_2\,\mathrm{dq_3}\,\mathrm{dq_2} = \mathrm{r}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{dz}\,\hat{\mathrm{r}}$$

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

- El elemento de volumen

$$dv \;=\; h_1\, h_2\, h_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3 \;=\; r\, dr\, d\theta\, dz$$

Aplicaciones

➪ Disponemos de un campo escalar que en coordenadas esféricas tiene la expresión $\xi = r^2 \sin\theta \tan\phi$, encuentra su expresión en coordenadas cartesianas y cilíndricas.

Conocemos cómo están definidas las coordenadas esféricas

$$x \;=\; r\, \sin\theta\, \cos\phi$$

$$y \;=\; r\, \sin\theta\, \sin\phi$$

$$z \;=\; r\, \cos\theta$$

Obtenemos fácilmente que

$$x^2 \,+\, y^2 \;=\; r^2 \sin^2\theta$$

$$x^2 \,+\, y^2 \,+\, z^2 \;=\; r^2 \;\;\Rightarrow\;\; r \;=\; \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\sin\theta \;=\; \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{y}{x} \;=\; \tan\phi$$

Para expresar el campo en coordenadas cartesianas sólo nos queda sustituir estos resultados en la expresión del campo escalar

$$\xi \;=\; (x^2 \,+\, y^2 \,+\, z^2)\, \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}\right)\, \frac{y}{x}$$

Para expresar el campo ξ en coordenadas cilíndricas, partimos de la definición de tales coordenadas y de su expresión en cartesianas

$$x \;=\; r\, \cos\theta$$

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

$$y = r \sin\theta$$

$$z = z$$

deducimos que

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2$$

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{\frac{r^2}{r^2+z^2}}$$

$$\frac{y}{x} = \tan\theta$$

Toda esta información la reflejamos en la expresión en coordenadas cartesianas, y quedará expresada en coordenadas cilíndricas

$$\xi = (r^2 + z^2)\sqrt{\frac{r^2}{r^2+z^2}}\,\tan\theta$$

➪ Dado un campo en coordenadas cartesianas, $\vec{A} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$. Determina su expresión en coordenadas cilíndricas.

Conocemos cómo están definidas las nuevas coordenadas según 1.5 y los factores de escala h_1, h_2 y h_3. La posición de un punto en el sistema de coordenadas cartesianas viene determinado por el vector

$$\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$$

Los vectores unitarios son calculados según 1.6

$$\hat{u}_i = \frac{1}{h_i}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{1}{h_i}\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\,\hat{\imath} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\,\hat{k}\right)$$

De esta forma obtenemos un sistema de ecuaciones que nos expresan unos vectores unitarios en función de otros. En concreto, la relación entre los

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

vectores unitarios en coordenadas cilíndricas y los unitarios en cartesianas es

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \\ \hat{k} \end{pmatrix}$$

Si queremos expresar, como es el caso, los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ en función de los unitarios curvilíneos, tomamos la matriz inversa

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de forma que

$$\hat{\imath} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$$

$$\hat{\jmath} = \sin\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta}$$

$$\hat{k} = \hat{z}$$

y la expresión del campo en coordenadas cilíndricas, resulta

$$\vec{A} = (r\cos\theta)(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}) + (r\sin\theta)(\sin\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta}) + z\,\hat{z}$$

$$\vec{A} = r\,\hat{r} + z\,\hat{z}$$

1.4. Campo escalar

La magnitud física que define un campo escalar es de naturaleza escalar, y por tratarse de un campo, tomará valores distintos según las coordenadas espaciales. Un ejemplo de un campo escalar es el representado en la figura 1.4, donde las distintas zonas con tonalidad diferente se corresponden a valores de temperaturas distintas. Se trata pues, $T = T(x, y, z)$, de un campo escalar de temperaturas.

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

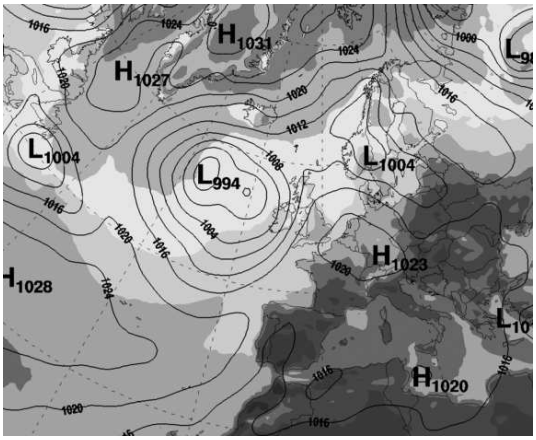


Figura 1.4: Campo escalar (Meteocentre).

En el espacio se pueden encontrar puntos donde el valor del campo, en este caso la temperatura, sea la misma. Estos puntos forman una superficie que llamamos de nivel o equiescalar, siendo su ecuación $T(x, y, z) = cte$. Si dibujamos dichas superficies obtenemos la representación gráfica del campo escalar.

Es útil introducir magnitudes relevantes para que nos proporcionen información del campo. Una de estas magnitudes, que caracteriza a un campo escalar, es el *gradiente* y nos informa de cómo desplazarnos en el seno de dicho campo para obtener la máxima variación local de éste.

1.4.1. Gradiente de un campo escalar

Establecemos un campo escalar $V = V(x, y, z)$. En un punto de coordenadas (x,y,z) el campo tiene un valor V, si nos desplazamos un $\vec{dr}$, estaremos en el punto $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$, y por tanto el valor del campo habrá cambiado a $V + dV$, y dicho cambio es

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{x,y} dz \tag{1.10}$$

donde hemos supuesto que el campo escalar V admite derivadas parciales. Estas derivadas parciales pueden ser tomadas como las componentes de un vector que llamamos *gradiente*

$$\overrightarrow{grad}\, V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{y,z} \hat{\imath} + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{x,z} \hat{\jmath} + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{x,y} \hat{k}$$

La variación de V, si introducimos dicho vector en 1.10, es

$$dV = \overrightarrow{grad}\, V \cdot d\vec{r} \tag{1.11}$$

Si tomamos una superficie de nivel y nos desplazamos a lo largo de ella, no se producirá, por propia definición, cambio alguno en el valor del campo. Es decir

$$dV = 0$$

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Por tanto

$$\overrightarrow{grad}\, V \cdot \vec{dr} = 0 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{grad}\, V \perp \vec{dr}$$

Es decir, el gradiente del campo es perpendicular al desplazamiento producido en la superficie de nivel.

En cada punto del espacio donde está definido el campo escalar, podemos construir una línea de forma que la tangente a ella en dicho punto sea paralela a la dirección del gradiente. Es decir que el vector $(dx,\, dy,\, dz)$, tangente a la línea, y el $\overrightarrow{grad}\, V$ sean paralelos. La ecuación que representa a esta línea en un punto es

$$\frac{dx}{\frac{\partial V}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial V}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial V}{\partial z}} \tag{1.12}$$

A estas líneas les llamamos *líneas de gradiente* y nos indican las trayectorias ortogonales a las superficies de nivel.

Dado un campo escalar $V = V(x, y, z)$, definimos la derivada direccional de dicho campo según una dirección $\hat{r}$, al siguiente producto escalar

$$\frac{dV}{dr} = \overrightarrow{grad}\, V \cdot \hat{r}$$

Si nos preguntamos por el máximo valor de la variación local del campo en una determinada dirección, el módulo del gradiente nos daría tal información

$$\left(\frac{dV}{dr}\right)_{max} = |\overrightarrow{grad}\, V|$$

Luego el gradiente nos va a informar sobre cómo desplazarnos en el seno de un campo escalar, para determinar puntualmente la máxima variación de éste.

Aplicaciones

➪ Dado el campo escalar $V = x^2 - y^2$, en el plano $z = 0$, determina la ecuación de las líneas de nivel así como las líneas de gradiente.

Las líneas de nivel son aquellos lugares geométricos donde el campo tiene el mismo valor. Por tanto la ecuación de tales líneas es

$$x^2 - y^2 = C$$

siendo C una constante. Estas líneas son hipérbolas. La ecuación de las líneas de gradiente según 1.12 es

$$\frac{dx}{2\,x} = \frac{dy}{-\,2y}$$

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

o bien

$$x\,dy + y\,dx = 0$$

y por tanto

$$x\,y = C$$

que son también hipérbolas equiláteras, trayectorias ortogonales a las líneas de nivel.

➪ Dado el campo escalar $V = x^2 + y^2 + z^2$, determina su derivada direccional según el vector $\left(\frac{\hat{\imath}+\hat{\jmath}}{\sqrt{2}}\right)$ en el punto (1,1,1).

Para determinar la derivada direccional, hemos de proyectar el campo de gradientes sobre el vector unitario que define la dirección. Es decir

$$\frac{dV}{dr} = \overrightarrow{grad}\,V \cdot \hat{r}$$

donde

$$\overrightarrow{grad}\,V = 2\,x\,\hat{\imath} + 2\,y\,\hat{\jmath} + 2\,z\,\hat{z}$$

por tanto

$$\frac{dV}{dr} = (2x, 2y, 2z) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{2x + 2y}{\sqrt{2}}$$

y para el punto pedido

$$\left(\frac{dV}{dr}\right)_{(1,1,1)} = 2\sqrt{2}$$

➪ A partir del punto $P_0(-1, 3, 2)$, ¿hacia qué dirección hay que dirigirse para que aumente el campo $\phi = (x + y)^2 + z^2 - xy + 2z$ lo más rápidamente posible.

La máxima variación local del campo la determinamos mediante el gradiente en el punto considerado

$$\left[\overrightarrow{grad}\,\phi\right]_{(-1,3,2)} = \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right]_{(-1,3,2)}$$

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

$$\left[\overrightarrow{grad}\,\phi\right]_{(-1,3,2)} = \left[(\,2(x+y)\,-\,y,\,2(x+y)\,-\,x,\,2z\,+\,2\,)\right]_{(-1,3,2)}$$

$$\left[\overrightarrow{grad}\,\phi\right]_{(-1,3,2)} = (1,5,6)$$

siendo ésta la dirección del desplazamiento.

1.4.2. Gradiente en coordenadas curvilíneas ortogonales

Disponemos de un campo escalar $V = V(q_1, q_2, q_3)$, cuya expresión en coordenadas curvilíneas es

$$\overrightarrow{grad}\,V = A\hat{u}_1 + B\hat{u}_2 + C\hat{u}_3$$

y quedará totalmente especificado cuando determinemos los valores de A, B y C.

El cambio en el valor del campo dV, lo expresamos en virtud de 1.11 de la forma

$$\begin{aligned} dV &= (A\hat{u}_1 + B\hat{u}_2 + C\hat{u}_3)\cdot(h_1dq_1\hat{u}_1 + h_2dq_2\hat{u}_2 + h_3dq_3\hat{u}_3) \\ &= Ah_1dq_1 + Bh_2dq_2 + Ch_3dq_3 \end{aligned}$$

donde $(h_1dq_1\hat{u}_1 + h_2dq_2\hat{u}_2 + h_3dq_3\hat{u}_3)$ es el elemento de arco $\vec{dr}$.

Por otro lado, dicha variación la calculamos como

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)dq_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)dq_2 + \left(\frac{\partial V}{\partial q_3}\right)dq_3$$

Comparamos ambas expresiones, y deducimos que

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right) \\ B &= \frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right) \\ C &= \frac{1}{h_3}\left(\frac{\partial V}{\partial q_3}\right) \end{aligned}$$

Por tanto la expresión del gradiente es

$$\overrightarrow{grad}\,V = \frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)\hat{u}_1 + \frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)\hat{u}_2 + \frac{1}{h_3}\left(\frac{\partial V}{\partial q_3}\right)\hat{u}_3 \qquad (1.13)$$

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Gradiente de un campo escalar en coordenadas esféricas y cilíndricas

- Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

  Introducimos los factores de escala ($h_1 = 1,\ h_2 = r,\ y\, h_3 = r\sin\theta$), y las coordenadas correspondientes en la expresión 1.13. El gradiente adopta la forma

$$\overrightarrow{grad}V = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)\hat{\phi}$$

- Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

  Realizamos el mismo proceso que el efectuado para las coordenadas esféricas, es decir, introducimos los factores de escala ($h_1 = 1,\ \ , h_2 = r,\ \ , h_3 = 1$) en la expresión 1.13, y las coordenadas correspondientes. Obtenemos el gradiente del campo en coordenadas cilíndricas

$$\overrightarrow{grad}V = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)\hat{\theta} + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\hat{z} \tag{1.14}$$

Aplicaciones

➪ Dado el campo escalar $V = r\,\sin\theta\, e^{-5\,z}$ en coordenadas cilíndricas, determina el campo de gradientes.

Aplicamos la expresión del gradiente en coordenadas cilíndricas, expresión 1.14. Las derivadas parciales en dicha expresión tienen los siguientes valores

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) = \sin\theta\, e^{-5\,z}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) = -\,r\,\cos\theta\, e^{-5\,z}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) = -\,5\,r\,\sin\theta\, e^{-5\,z}$$

y la expresión del gradiente

$$\overrightarrow{grad}\,V = \sin\theta\, e^{-5\,z}\,\hat{r} - \cos\theta\, e^{-5\,z}\,\hat{\theta} - 5\,r\,\sin\theta\, e^{-5\,z}\,\hat{z}$$

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

1.5. Campo vectorial

La magnitud $\vec{M} = \vec{M}(x, y, z)$ representa un campo vectorial, de forma que a cada punto del espacio le corresponde un valor único de la magnitud $\vec{M}$, siendo ésta vectorial e independiente del sistema de referencia. Nuestro objetivo se centra en buscar magnitudes que nos permitan la visualización del campo, de forma análoga a la que realizamos con el campo escalar. Para ello la representación del campo la realizamos mediante *líneas de campo*, líneas construidas de forma que sonn tangentes en cada punto al vector campo y además están dirigidas según el sentido de éste.

1.5.1. Ecuación de las líneas

Supongamos un campo vectorial $\vec{M}$, y nos desplazamos un $\vec{dr}$ a lo largo de una línea de campo. Bajo esta situación el campo $\vec{M}$ es paralelo al desplazamiento $d\vec{r}$. Por este motivo se verifica

$$\frac{dx}{M_x} = \frac{dy}{M_y} = \frac{dz}{M_z} \tag{1.15}$$

Si el campo viene expresado en coordenadas curvilíneas, y como el elemento de arco es $\vec{dr} = h_1 dq_1 \hat{u}_1 + h_2 dq_2 \hat{u}_2 + h_3 dq_3 \hat{u}_3$, entonces

$$\frac{h_1 dq_1}{M_1} = \frac{h_2 dq_2}{M_2} = \frac{h_3 dq_3}{M_3} \tag{1.16}$$

La intensidad o módulo del campo está indicado por el número de líneas de campo que atraviesa una determinada superficie que es normal a ellas, es decir

$$\frac{dn}{dS_n} = M \tag{1.17}$$

donde dS_n representa una superficie elemental normal al campo.

Es necesario mencionar que las líneas de campo no pueden cortarse, ya que esto supondría la no biyección entre coordenadas espaciales y valores de campo.

Aplicaciones

➪ Disponemos de un campo vectorial expresado en coordenadas cilíndricas $\vec{V} = A r \hat{\phi} + B \hat{z}$, siendo A y B constantes. Determina las ecuaciones de las líneas de campo.

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Los factores de escala para estas coordenadas son

$$h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = 1$$

por tanto las ecuaciones de línea según 1.15, son

$$\frac{r\,d\phi}{Ar} = \frac{dz}{B}$$

$$dr = 0$$

de donde deducimos

$$z = \frac{B}{A}\,\phi + C$$

$$r = C'$$

siendo C y C' constantes.

➪ Disponemos de un campo vectorial, $\vec{V} = -a \sin z\,\hat{\imath} + b \cos z\,\hat{\jmath} + a\,\hat{k}$, siendo a y b constantes. Determina las ecuaciones de las líneas de campo.

La ecuación de las líneas de campo es

$$\frac{dx}{-a\sin z} = \frac{dy}{b\cos z} = \frac{dz}{a}$$

Procedemos a integrar dicha ecuación

$$\frac{dx}{dz} = -\sin z \quad \Rightarrow \quad x = \cos z + C$$

además

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{a}{b}\right)\cos z \quad \Rightarrow \quad y = \frac{b}{a}\sin z$$

y

$$z = z$$

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

1.5.2. Flujo

Definimos el flujo elemental de un campo vectorial $\vec{M}$, a través de una superficie elemental $d\vec{S}$ como

$$d\phi = \vec{M} \cdot d\vec{S} \tag{1.18}$$

El flujo nos informa del número de líneas que atraviesa una determinada superficie, tal y como se dedujo de la ecuación 1.17. En la figura adjunta observamos como puede darse el caso de que el flujo saliente sea mayor o menor que el flujo entrante a través de cierta superficie, visualizado por las líneas de campo.

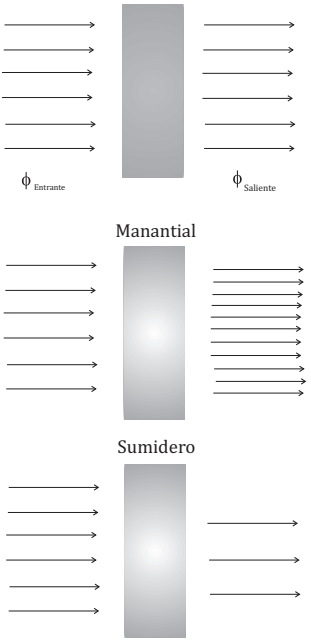


Figura 1.5: El flujo neto puede ser positivo, negativo o nulo.

En tal caso dicha superficie encierra lo que denominamos *fuentes del campo*. En el caso de ser mayor el flujo saliente que el entrante, la superficie encierra fuentes o *manantiales*. Si por el contrario, el flujo saliente es menor que el entrante, a las fuentes encerradas les llamamos *sumideros*. Cuando el flujo entrante en cierta superficie es igual al saliente, pensamos que dicha superficie encierra el mismo número de manantiales que sumideros o que carece de fuentes. Una superficie podemos dividirla en pequeñas superficies, de forma que el flujo a través de ella lo obtenemos sumando los flujos relativos a todas las superficies elementales. Si dividimos una superficie S, como la de la figura inferior, en pequeñas celdas de superficie elemental dS_i, el flujo neto a través de S será la suma de los flujos elementales a través de cada una de las celdas, es decir

$$\phi = \int_s \vec{M} \cdot \vec{ds} \tag{1.19}$$

El flujo no es una magnitud que caracterice localmente al campo ya que como dicha magnitud tiene un carácter aditivo, como comentábamos anteriormente, si dividimos la superficie en pequeñas celdas, y realizamos un proceso al límite, las superficies de cada elemento se reducen a un punto y el flujo a través de él será nulo y por tanto extrapolando a toda la superficie, el flujo neto debería ser nulo.

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

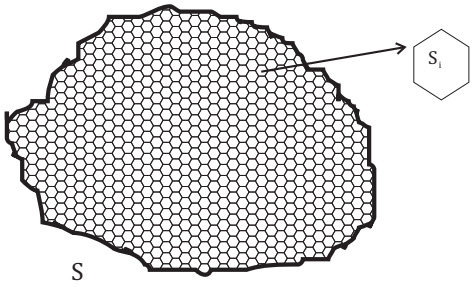


Figura 1.6: El flujo a través de una superficie lo obtenemos sumando los flujos relativos a todas las superficies elementales.

Esto supone una incongruencia, ya que existe flujo neto a través de la superficie. Por tanto el flujo no caracteriza localmente al campo.

Este problema lo solucionamos si introducimos una nueva magnitud que nos dé la misma información que el flujo, y que además caracterice localmente al campo. Esta nueva magnitud es la *Divergencia*.

Aplicaciones

➪ Considera el siguiente campo vectorial

$$\vec{E} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\hat{k}$$

Exprésalo en coordenadas cilíndricas y determina el flujo a través de un cilindro de radio a y altura unidad.

Tal como vimos en la aplicación anterior, un punto P estaba localizado mediante el vector

$$\vec{r} = r\cos\theta\,\hat{\imath} + r\sin\theta\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$$

Los vectores unitarios de este sistema curvilíneo los determinamos utilizando la expresión 1.6. Es decir

- Vector unitario en la dirección radial

$$\hat{r} = \frac{1}{|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}|}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right) = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}$$

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

- Vector unitario tangente

$$\hat{\theta} = \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}|}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right) = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}$$

- Vector unitario en la dirección z

$$\hat{z} = \hat{k}$$

Ahora debemos expresar los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ en función de los unitarios $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{z}$. Para ello multiplicamos la expresión del vector $\hat{r}$ por el factor $\sin\theta$, y la expresión de $\hat{\theta}$ por $\cos\theta$

$$\sin\theta\,\hat{r} = \sin\theta\,\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin^2\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\cos\theta\,\hat{\theta} = -\sin\theta\,\cos\theta\,\hat{\imath} + \cos^2\theta\,\hat{\jmath}$$

Si sumamos ambas expresiones

$$\hat{\jmath} = \sin\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta} \tag{1.20}$$

Si ahora multiplicamos por $(-\sin\theta)$ la expresión del unitario $\hat{\theta}$ y por $(\cos\theta)$, la expresión del unitario $\hat{r}$

$$\cos\theta\,\hat{r} = \cos^2\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\sin\theta\,\hat{\jmath}$$

$$-\sin\theta\,\hat{r} = \sin^2\theta\,\cos\theta\,\hat{\imath} - \sin\theta\,\cos\theta\,\hat{\jmath}$$

Sumamos

$$\hat{\imath} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta} \tag{1.21}$$

Con toda esta información, la expresión del campo queda de la forma

$$\vec{E} = (r\,\cos\theta)\,(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}) + (r\,\sin\theta)\,(\sin\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta}) + \\ + \frac{r^2\,\cos^2\theta}{\sqrt{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}}\,\hat{z} \tag{1.22}$$

Operamos

$$\vec{E} = r\,\hat{r} + r\,\cos^2\theta\,\hat{z}$$

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Determinamos ahora el flujo neto a través de la superficie del cilindro. Dicho flujo será la suma de los flujos a través de sus bases y de la superficie lateral

$$\phi_T = \phi_{B_1} + \phi_{B_2} + \phi_{S_L}$$

donde ϕ_T representa el flujo neto, ϕ_{B_1} y ϕ_{B_2} los flujos de las bases y ϕ_{S_L} el correspondiente a la superficie lateral. **Flujo a través de las bases B_1 y B_2.** Tomamos un elemento de superficie $\vec{ds}$ que llevará dirección según el eje Z, por tanto su valor será

$$\vec{ds} = r\, dr\, d\theta\, \hat{z}$$

$$\phi_{B_1} = \int_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

y el valor del flujo donde S_1 es el área de la base B_1. Si introducimos los valores del campo y del elemento de superficie, obtenemos

$$\begin{aligned} \phi_{B_1} &= \int_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{ds} = \int_{S_1} (r\,\hat{r} + r\,\cos^2\theta\,\hat{z}) \cdot (r\, dr\, d\theta\, \hat{z}) \\ &= \int_0^a \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2\theta dr\, d\theta = \frac{a^3}{3}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{a^3\,\pi}{3} \end{aligned} \quad (1.23)$$

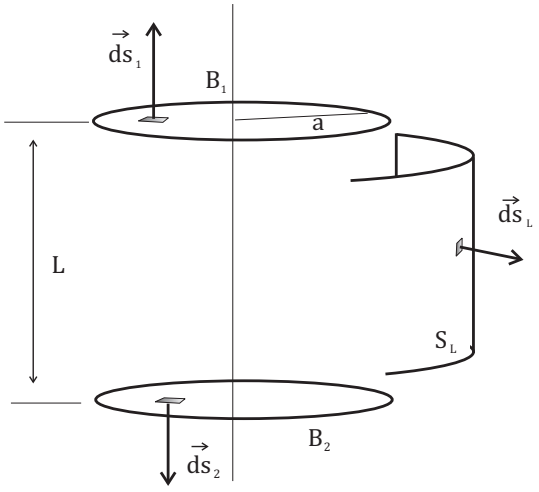


Figura 1.7: Flujo a través de las superficies.

El flujo para la otra base es

$$\phi_{B_2} = \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

donde S_2 es el área de la base B_2. En la figura observamos que el elemento de superficie tiene un área

$$\vec{ds} = -\,r\, dr\, d\theta\, \hat{z}$$

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Por tanto

$$\phi_{B_2} = \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{ds} = -\int_{S_2} (r\,\hat{r} + r\,\cos^2\theta\,\hat{z}) \cdot (r\,dr\,d\theta\,\hat{z}) = \\ = -\int_0^a \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2\theta dr\,d\theta$$

$$\phi_{B_2} = -\frac{a^3\,\pi}{3}$$

Determinamos finalmente el flujo a través de la pared lateral. El área del elemento de superficie $\vec{ds_l}$ es

$$\vec{d_{S_l}} = h_2\,h_3\,dq_2\,dq_3\,\hat{q_1} = a\,d\theta\,dz\,\hat{r}$$

donde el radio es $r = a$. El flujo es

$$\phi_{S_l} = \int_{S_L} \vec{E} \cdot \vec{ds_l} = \int_{S_l} (a\,\hat{r} + a\,\cos^2\theta\,\hat{z}) \cdot (a\,d\theta\,dz\,\hat{r}) = \int_0^L \int_0^{2\pi} a^2\,d\theta\,dz$$

$$\phi_{S_l} = a^2\,2\pi\,L$$

El flujo total es por tanto

$$\phi_T = \frac{a^3\,\pi}{3} - \frac{a^3\,\pi}{3} + a^2\,2\pi\,L = a^2\,2\pi\,L$$

➪ Considera el siguiente campo vectorial

$$\vec{A} = \frac{10\,r^3}{4}\,\hat{r}$$

Expresado en coordenadas cilíndricas. Determina el flujo a través de un tubo cilíndrico de radios a y b y altura L, tal y como se aprecia en la figura adjunta.

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

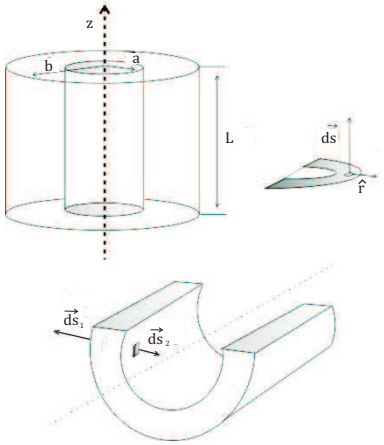


Figura 1.8: Flujo del campo $\vec{A}$ a través de un tubo cilíndrico.

El campo lleva dirección radial y es por tanto perpendicular a la dirección del elemento de superficie de las bases del tubo cilíndrico. El flujo a través de dichas superficies es nulo. Sólo tendremos flujo a través de las superficies laterales de radios a y b. En concreto, para la superficie lateral de radio $r = a$, el elemento de superficie, en la figura etiquetado con ds_2, es

$$\vec{ds}_2 = -a\, d\theta\, dz\, \hat{r}$$

y el flujo del campo $\vec{A}$ a través de ella es

$$\phi_{S_{L_2}} = \int_{S_2} \vec{A} \cdot \vec{ds}$$

$$\phi_{S_{L_2}} = \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{10\, a^3}{4}\, \hat{r} \cdot (-a\, d\theta\, dz\, \hat{r})$$

$$\phi_{S_{L_2}} = -\frac{10\, a^4}{4}\, 2\pi\, L$$

Para la superficie de radio $r = b$, el elemento de superficie es

$$\vec{ds}_1 = b\, d\theta\, dz\, \hat{r}$$

y el flujo a través de dicha superficie es

$$\phi_{S_{L_1}} = \int_{S_1} \vec{A} \cdot \vec{ds} = \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{10\, b^3}{4}\, \hat{r} \cdot (b\, d\theta\, dz\, \hat{r}) = \frac{10\, b^4}{4}\, 2\pi\, L$$

El flujo neto es por tanto

$$\phi_T = \phi_{S_{L_2}} + \phi_{S_{L_1}} = 5\, \pi\, L\, (b^4 - a^4)$$

1.5.3. Divergencia

Tal y como hemos presentado dicha magnitud, su definición es

$$div\vec{M} = \lim_{\delta v \to 0} \frac{\phi_i}{\delta v} \tag{1.24}$$

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

El numerador es el flujo saliente a través de una superficie S, siendo ésta la que envuelve al volumen v. Cuando nos aproximamos a un punto, dicho volumen se va reduciendo. En la situación límite, cuando $\delta v \to 0$, el cociente expresado en 1.24 está definido, ya que tendremos una indeterminación. Por tanto esta nueva magnitud caracteriza localmente al campo, y además nos informa de cómo el campo 'diverge' en el punto en cuestión, tal y como se aprecia en la figura.

Observamos como en el punto P existe divergencia, mientras que en el punto Q la divergencia es nula. Cuando encontramos puntos para los que la divergencia no es nula, decimos entonces que el campo presenta una singularidad (fuente) en dicho punto y que el campo es *laminar*. Si la divergencia es nula, diremos que no existe singularidad o fuente escalar en dicho punto.

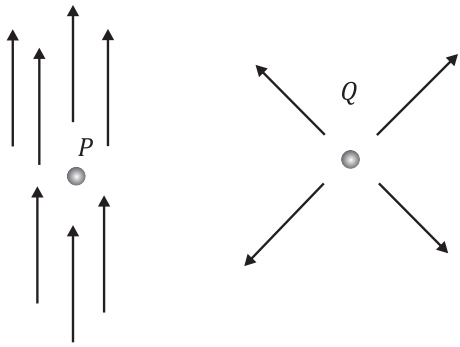


Figura 1.9: La divergencia de un campo nos permite determinar las fuentes escalares del mismo.

En coordenadas cartesianas

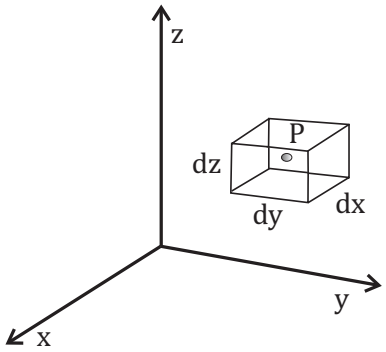


Figura 1.10: Divergencia del campo en un punto.

Tomamos un punto P en la región donde existe una campo $\vec{V}$ y queremos calcular el valor de la divergencia del campo $\vec{V}$ en dicho punto. Tomamos un entorno del punto, tal y como observamos en la figura 1.10, de volumen $dv = dx\,dy\,dz$, y determinamos el flujo neto del campo a través de la superficie que encierra dicho volumen. Dicho flujo es el flujo a través de las caras del volumen tomado, es decir

$$d\phi = d\phi_x + d\phi_y + d\phi_z$$

donde $d\phi_x$ es la variación de flujo a través de las caras de superficie $dz\,dy$. La variación

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

de flujo $d\phi_y$ es determinada a través de las superficies $dz\,dx$ y la variación $d\phi_z$ es la correspondiente a las superficies $dx\,dy$.

El flujo del campo (V_x, V_y, V_z), a través de la superficie $dy\,dz$, es $V_x\,dy\,dz$. La variación de dicho flujo puede ser considerada como variación de una magnitud escalar y en virtud de la ecuación 1.11, la expresamos en términos del gradiente.

$$d\phi_x = \overrightarrow{grad}\,(V_x d_y d_z) \cdot dx\,\hat{\imath}$$

Introducimos la expresión del gradiente

$$\begin{aligned} d\phi_x &= \left[\frac{\partial\,(V_x\,d_y\,d_z)}{\partial x}\,\hat{\imath} + \frac{\partial\,(V_x\,d_y\,d_z)}{\partial y}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial\,(V_x\,d_y\,d_z)}{\partial z}\,\hat{k}\right] \cdot dx\,\hat{\imath} = \\ &= \frac{\partial V_x\,dydz}{\partial x}\,dx = \frac{\partial V_x}{\partial x}\,dydzdx = \frac{\partial V_x}{\partial x}\,dv \end{aligned}$$

De igual forma procedemos con las variaciones de los flujos para las otras caras

$$\begin{aligned} d\phi_y &= \frac{\partial V_y}{\partial y}\,dv \\ d\phi_z &= \frac{\partial V_z}{\partial z}\,dv \end{aligned}$$

Sumando estas variaciones, el flujo neto resulta

$$d\phi = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) dv$$

Finalmente, comparamos con la definición de la magnitud divergencia y su expresión en coordenadas cartesianas es por tanto

$$div\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \tag{1.25}$$

Divergencia en coordenadas curvilíneas

Realizamos un estudio análogo al efectuado para coordenadas cartesianas. Consideramos un punto en el espacio curvilíneo y un volumen como entorno de dicho punto. El flujo a través de la superficie que encierra dicho volumen será calculado considerando las superficies que limitan dicho volumen.

La expresión de la superficie elemental ds_1 en coordenadas curvilíneas es

$$h_2\,h_3\,dq_3\,dq_2$$

y por tanto el flujo a través de dicha superficie es

$$V_1\,h_2\,h_3\,dq_3\,dq_2$$

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Como la variación de flujo es una variación de una magnitud escalar, la expresamos en términos del gradiente.

$$\begin{aligned} d\phi_1 &= \overrightarrow{grad}\,(V_1\, h_2 h_3\, dq_3 dq_2)\,\cdot\,(h_1\, dq_1\, \hat{u}_1) = \\ &= \frac{1}{h_1}\,\frac{\partial\,(V_1\, h_2 h_3\, dq_2 dq_3)}{\partial q_1}\; h_1\, dq_1 \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\,\frac{\partial V_1 h_2 h_3}{\partial q_1}\, dv \end{aligned}$$

De igual modo procedemos con las otras superficies

$$\begin{aligned} d\phi_2 &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\,\frac{\partial V_2 h_1 h_3}{\partial q_2}\, dv \\ d\phi_3 &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\,\frac{\partial V_3 h_1 h_2}{\partial q_3}\, dv \end{aligned}$$

Sumamos e identificamos con la expresión de la divergencia

$$d\phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial V_2 h_1 h_3}{\partial q_2} + \frac{\partial V_1 h_2 h_3}{\partial q_1} + \frac{\partial V_3 h_1 h_2}{\partial q_3}\right) dv$$

$$div\vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial V_2 h_1 h_3}{\partial q_2} + \frac{\partial V_1 h_2 h_3}{\partial q_1} + \frac{\partial V_3 h_1 h_2}{\partial q_3}\right) \tag{1.26}$$

Divergencia de un campo vectorial en coordenadas esféricas y cilíndricas

Para las coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), los factores de escala son $h_1 = 1$, $h_2 = r$ y $h_3 = r\,\sin\theta$. Utilizamos la expresión 1.26 para establecer la divergencia de un campo $\vec{V}$ en coordenadas esféricas como

$$div\vec{V} = \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}(V_\theta\,\sin\theta) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}(V_r\, r^2) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi} \tag{1.27}$$

Si utilizamos coordenadas cilíndricas, las coordenadas son r, θ y z y los factores de escala $h_1 = 1$, $h_2 = r$ y $h_3 = 1$. Por tanto la expresión de la divergencia en estas coordenadas es

$$div\vec{V} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(V_r r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + r\,\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)$$

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Aplicaciones

➪ Considera el siguiente campo vectorial expresado en coordenadas cilíndricas

$$\vec{A} = r\,\sin\phi\,\hat{r} + r^2\,\cos\phi\,\hat{\phi} + 2\,r\,e^{-5z}\,\hat{z}$$

Determina su divergencia en el punto $(1/2, \pi/2, 0)$.

La divergencia del campo en coordenadas cilíndricas es

$$div\vec{A} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(A_r r)}{\partial r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + r\,\frac{\partial A_z}{\partial z}\right) = 2\,\sin\phi - r\,\sin\phi - 10re^{-5z}$$

y para el punto en cuestión

$$\left[div\vec{A}\right]_{(1/2,\pi/2,0)} = -\frac{7}{2}$$

➪ Considera el siguiente campo vectorial expresado en coordenadas esféricas

$$\vec{A} = 5\,\sin\theta\,\hat{\theta} + 5\,\sin\phi\,\hat{\phi}$$

Determina la divergencia en el punto $(1/2, \pi/4, \pi/4)$.

Determinamos la divergencia del campo $\vec{A}$, para ello aplicamos la expresión 1.27

$$div\vec{A} = \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}(5\,\sin^2\theta) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\phi}(5\,\sin\phi)$$

y para el punto pedido

$$div\vec{A}|_{(0,5,\pi/4,\pi/4)} = \left(\frac{1}{r}\,10\,\cos\theta + \frac{1}{r\,\sin\phi}\,5\,\cos\theta\right)_{(0,5,\pi/4,\pi/4)} = 24{,}14$$

1.5.4. Circulación

Dado un campo vectorial $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$, definimos la *circulación elemental* de este campo a lo largo de una curva γ, a la proyección del campo sobre el desplazamiento elemental a lo largo de dicha curva, tal y como se muestra en la figura adjunta

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

$$dc = \vec{V} \cdot \vec{dr} \tag{1.28}$$

donde dc es la circulación elemental. Extendida ésta a un tramo finito, la circulación es

$$C_{ab} = \int_a^b \vec{V} \cdot \vec{dr} \tag{1.29}$$

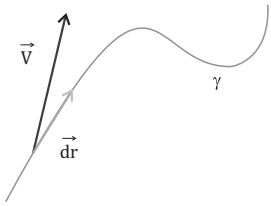


Figura 1.11: Circulación de un campo a lo largo de una curva.

Introducimos en la expresión de la circulación las componentes del campo V_x, V_y, V_z y las del desplazamiento dx, dy, dz.

$$C_{ab} = \int_a^b (V_x, V_y, V_z) \cdot (dx, dy, dz)$$

$$C_{ab} = \int_a^b V_x\, dx + V_y\, dy + V_z\, dz$$

Utilizamos las ecuaciones de la curva γ de forma que todas las variables queden expresadas en términos de un solo parámetro, sea éste t. Entonces la circulación adopta la forma

$$C_{ab} = \int_{t_0}^{t_1} \left(V_x \frac{dx}{dt} + V_y \frac{dy}{dt} + V_z \frac{dz}{dt} \right) dt$$

donde t_0 y t_1 son los valores del parámetro t correspondientes a los puntos a y b.

La circulación de un campo es una magnitud importante, ya que ésta puede ser independiente del camino, es decir que para cualquier camino que establezcamos entre dos puntos, la circulación va a tener siempre el mismo valor.

Diremos pues, que el campo es *conservativo*. Evidentemente, si tomamos un camino cerrado y el campo es conservativo, la circulación será nula. Se deduce por tanto que $C_a^b = -C_b^a$.

Al igual que nos ocurrió con el flujo, la circulación no caracteriza localmente al campo.

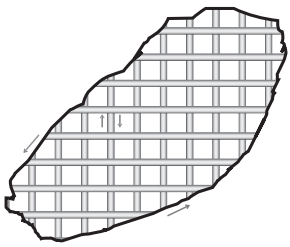


Figura 1.12: La circulación en el contorno de dicha superficie puede ser construida mediante las circulaciones en las distintas celdas, donde la circulación en los tramos comunes se cancela y sólo hay contribución en la pared externa.

Cualquier recorrido puede ser dividido en circuitos más pequeños, de forma que la circulación a través de todos ellos será la circulación neta sobre el circuito. Cierto es que conforme el área de

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

los circuitos disminuya, el circuito quedará reducido a un punto. En esta situación la circulación será nula y por tanto la del recorrido, contrario al hecho de disponer de una circulación neta no nula. Es por tal motivo que es necesario el concurso de otra magnitud para solucionar este problema. Dicha magnitud es el *rotacional*.

Aplicaciones

➪ Dado el campo vectorial $\vec{A} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ y la curva γ de ecuaciones

$$x = \cos t \qquad y = \sin t \qquad z = 3t$$

Determina la circulación del campo al desplazarse a lo largo de la curva adjunta desde el punto $P(1,0,0)$ al $Q(0,1,3\pi/2)$.

La circulación entre dichos puntos a lo largo de la curva γ es

$$C_{PQ} = \int_P^Q \vec{A}\cdot\vec{dl} = \int_P^Q (x,y,z)\cdot(dx,dy,dz) = \int_P^Q x dx + y dy + z dz$$

Expresamos la circulación en términos del parámetro t

$$x = \cos t \;\Rightarrow\; dx = -\sin t\, dt$$

$$y = \sin t \;\Rightarrow\; dy = \cos t\, dt$$

$$z = 3t \;\Rightarrow\; dz = 3\, dt$$

Los puntos P y Q corresponden al valor $t = 0$ y $t = \pi/2$ del parámetro. Por tanto

$$C_{PQ} = \int_0^{\pi/2} -\cos t \sin t\, dt + \cos t \sin t\, dt + 9t dt = \int_0^{\pi/2} 9t dt = \frac{9\,\pi^2}{8}$$

➪ Determina la circulación del campo $\vec{V} = y\,\hat{\imath} - x\,\hat{\jmath}$ a lo largo de la semicircunferencia de radio unidad de la figura adjunta entre los puntos a y b.

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Expresamos el campo $\vec{V}$ en coordenadas cilíndricas. Para ello utilizamos las relaciones entre vectores unitarios 1.21 y 1.20.

$$\vec{V} = r\,\sin\theta\,(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}) -$$

$$- r\,\cos\theta\,(\sin\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta})$$

Agrupamos y simplificamos

$$\vec{V} = -r\,\hat{\theta}$$

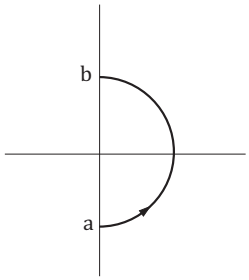


Figura 1.13: Circulación a lo largo de una semicircunferencia.

El desplazamiento elemental a lo largo de la circunferencia es

$$\vec{dl} = r\,d\theta$$

y la circulación

$$C_{ab} = \int_a^b \vec{V}\cdot\vec{dl} = \int_{3\pi/2}^{\pi/2} -r^2\,d\theta = \pi\,r^2 = \pi$$

1.5.5. Rotacional

Introducimos esta magnitud para que nos dé la misma información que la circulación, y que además caracterice localmente al campo. Dicha magnitud es conocida como *Rotacional* del campo, y está definida como

$$|\overrightarrow{Rot\vec{V}}| = \lim_{s\to 0}\frac{\int_\gamma \vec{V}\cdot\vec{dl}}{s} \tag{1.30}$$

Debido a que la superficie es un vector y ésta figura en el denominador de la expresión del rotacional, es por lo que hemos tenido que definirlo sólo en módulo. El carácter vectorial lo introducimos de forma que el flujo elemental del rotacional a través del elemento de superficie sea igual a la circulación elemental del campo a lo largo de la curva que encierra a dicha superficie. En la figura 1.5.5, el flujo elemental del rotacional a través de la superficie elemental $\vec{ds}$ es la circulación del campo alrededor del contorno de dicha superficie, es decir

$$\overrightarrow{Rot\vec{V}}\cdot\vec{ds} = \oint \vec{V}\cdot\vec{dr} \tag{1.31}$$

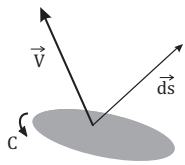


Figura 1.14: El flujo del rotacional a través de la superficie $\vec{ds}$ es la circulación del campo alrededor del contorno de dicha superficie.

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Expresión del Rotacional en coordenadas cartesianas

Tomamos un punto en el plano YZ y establecemos la circulación del campo $\vec{V}$ en el recorrido cerrado $1-2-3-4-1$ especificado en la figura adjunta. La circulación

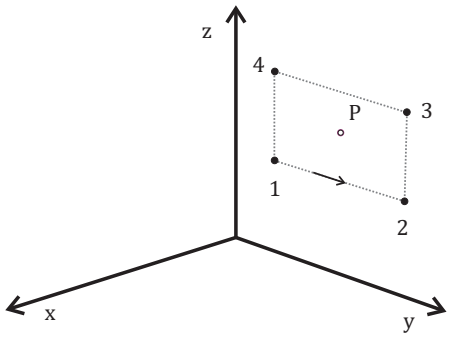


Figura 1.15: Determinación de la circulación del campo $\vec{V}$ alrededor del punto P situado en el plano YZ.

del campo $\vec{V}$ para esta orientación es

$$\begin{aligned}\int \vec{V}\cdot\vec{dr} &= c_{12}+c_{23}+c_{34}+c_{41}\\ &= (c_{23}-c_{14})+(c_{12}-c_{43})\end{aligned}$$

Para los tramos $2-3$ y $1-4$, la proyección de $\vec{V}$ sobre la dirección $\vec{dr}$ es

$$\vec{V}\cdot\vec{dr} = (V_x,V_y,V_z)\cdot(0,0,dz) = V_z d_z$$

Por tanto

$$c_{23}-c_{14} = d\,(V_z d_z)$$

de igual forma procedemos con la circulación en los tramos $1-2$ y $3-4$, donde ahora $\vec{V}\cdot\vec{dr} = V_y d_y$, por tanto

$$c_{12}-c_{43} = d\,(V_y d_y)$$

tanto $(V_z d_z)$ como $(V_y d_y)$ son funciones escalares, y podemos medir su variación a lo largo de las direcciones y y z respectivamente utilizando el gradiente, es decir

$$c_{23}-c_{14} = d\,(V_z d_z) = \overrightarrow{grad}\,(V_z d_z)\cdot(dy\,\hat{j}) = \frac{\partial(V_z dz)}{\partial y}\,dy$$

$$c_{12}-c_{43} = d\,(V_y d_y) = \overrightarrow{grad}\,(V_y d_y)\cdot\left(-dz\,\hat{k}\right) = -\frac{\partial(V_y dy)}{\partial z}\,dz$$

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Obtenemos por tanto

$$\int \vec{V} \cdot \vec{dr} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) dy\, dz$$

De la definición de rotacional 1.31, y para la superficie encerrada por este trayecto, deducimos

$$\left((\overrightarrow{Rot}\vec{V})_x, (\overrightarrow{Rot}\vec{V})_y, (\overrightarrow{Rot}\vec{V})_z \right) \cdot (dydz, 0, 0) = (\overrightarrow{Rot}\vec{V})_x\, dydz$$

$$\left(\overrightarrow{Rot}\vec{V} \right)_x dydz = \int \vec{V} \cdot \vec{dr} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) dydz$$

Por tanto la componente x del rotacional tiene la expresión

$$\left(\overrightarrow{Rot}\vec{V} \right)_x = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right)$$

Este proceso lo repetimos para puntos situados en los planos XY y XZ, de esta forma determinamos las componentes y y z del rotacional. Su expresión en coordenadas cartesianas resulta

$$\overrightarrow{Rot}\vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \hat{\imath} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \hat{\jmath} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

Observamos que la expresión del rotacional del campo resulta del desarrollo del determinante

$$\overrightarrow{Rot}\vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{K} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_x \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \hat{\imath} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \hat{\jmath} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

De forma práctica calcularemos así el rotacional.

Consideramos un campo de velocidades como el de la figura 1.16 (puede considerarse como un fluido en rotación). En algunas ocasiones las partículas del fluido experimentan un movimiento ascendente y esto es debido a la existencia de otro campo de vectores asociado al campo de velocidades, el campo de rotores o rotacional, siendo éste el que explica el nuevo movimiento de traslación. Cuando un campo vectorial lleva asociado un campo de rotores, diremos que dicho campo vectorial es no conservativo.

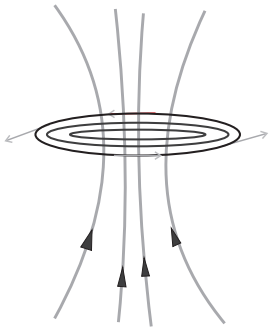


Figura 1.16: Campo de rotores asociado a un campo de velocidades.

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Operadores diferenciales

Un operador es un ente físico o matemático capaz de realizar una transformación entre magnitudes. Así $d/dx, \int, ...$ Por tanto todo operador actuará sobre una magnitud y la transformará en otra.

Sea A una magnitud física, entonces cuando actúe un operador como $\overrightarrow{\nabla}$ sobre dicha magnitud, obtendremos una magnitud distinta, B, es decir

$$\overrightarrow{\nabla} A = B$$

mientras que $A\overrightarrow{\nabla}$ sigue siendo un operador a la espera de actuar sobre cualquier otra magnitud.

Introducimos el operador *'nabla'* - $\overrightarrow{\nabla}$ - como

$$\overrightarrow{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Si este operador lo aplicamos a un campo escalar Ψ, obtenemos el gradiente de dicho campo

$$\overrightarrow{\nabla}\Psi = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) = \overrightarrow{grad}\Psi$$

Dado un campo vectorial $\vec{V}$, si calculamos $\overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{V}$, obtenemos la divergencia del campo

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (V_x, V_y, V_z) = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) = div\vec{V}$$

Si calculamos el producto vectorial $\overrightarrow{\nabla} \times \vec{V}$, obtenemos el campo rotacional.

$$\overrightarrow{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{K} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_x \end{vmatrix} = \overrightarrow{Rot\vec{V}}$$

Con esta nueva nomenclatura vamos a determinar la expresión del rotacional en coordenadas curvilíneas.

Rotacional en coordenadas curvilíneas

Sea el campo vectorial $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$ cuya expresión en el sistema de coordenadas curvilíneas es

$$\vec{V} = q_1 \hat{u}_1 + q_2 \hat{u}_2 + q_3 \hat{u}_3$$

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial