

Sylvain Gugger
Christophe Chalons
Anatole Khelif
Vojislav Petrov
Gérard Rozsavolgyi

PARCOURS PRÉPAS

MATHS

MPSI-MP2I

EDISCIENCE



Pour aller plus loin et mettre toutes les chances de votre côté, des ressources complémentaires sont disponibles sur le site www.dunod.com.

Connectez-vous à la page de l'ouvrage (grâce aux menus déroulants, ou en saisissant le titre, l'auteur ou l'ISBN dans le champ de recherche de la page d'accueil). Sur la page de l'ouvrage, sous la couverture, cliquez sur le lien « LES + EN LIGNE ».

Note : l'errata présent dans les + en ligne ne concerne que le premier tirage de l'ouvrage papier, les erreurs ont été corrigées sur cette édition numérique.

Création de couverture : Studio Dunod

© Dunod, 2021

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-083139-5

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Pour bien commencer.....	5
--------------------------	---

Partie 1 Techniques de calcul (semestre 1)

1 Nombres complexes et trigonométrie.....	11
2 Calculs algébriques	45
3 Fonctions d'une variable réelle	77
4 Calculs de primitives	119
5 Équations différentielles	145

Partie 2 Algèbre générale (semestre 1)

6 Raisonnement et vocabulaire ensembliste	183
7 Structures algébriques usuelles	213
8 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$	235
9 Polynômes et fractions rationnelles	259
10 Calcul matriciel et systèmes linéaires	301

Partie 3 Analyse réelle (semestre 1)

11 Ensembles de nombres et inégalités.....	345
12 Suites réelles.....	363
13 Limites et continuité	397
14 Dérivation	421
15 Convexité.....	447

Partie 4 Algèbre linéaire (semestre 2)

16	Espaces vectoriels	461
17	Applications linéaires	487
18	Espaces de dimension finie.....	507
19	Déterminants	529
20	Produit scalaire et espaces euclidiens.....	557

Partie 5 Analyse réelle (semestre 2)

21	Développements limités - Analyse asymptotique	587
22	Intégration	621
23	Séries numériques - Familles sommables.....	653
24	Fonctions de deux variables.....	693

Partie 6 Probabilités (semestre 2)

25	Dénombrement	721
26	Probabilités sur un univers fini.....	735
27	Variables aléatoires	755

Annexes.....	785
Index	791

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux élèves de première année de classe préparatoire MPSI-MP2I. Il s'agit d'un complément à leur cours de mathématiques, mettant l'accent sur les notions essentielles du cours à connaître et les méthodes à maîtriser, permettant de les mettre en œuvre par le biais d'exercices.

Le livre est divisé en six parties et vingt-sept chapitres. Les trois premières parties correspondent à l'enseignement du premier semestre, les trois suivantes à celui du second semestre. Il commence par une introduction, qui présente quelques règles utiles pour l'écriture de raisonnements mathématiques.

Chaque chapitre commence par une partie nommée *L'essentiel du cours*. On y présente tous les points les plus importants du cours (définitions, propositions, théorèmes, remarques) à la manière d'une fiche. Les preuves ne sont volontairement pas incluses pour se concentrer sur les résultats à connaître.

On trouve ensuite une partie nommée *Les méthodes à maîtriser*. Elle présente des méthodes en rapport avec le chapitre en cours qu'il faut savoir mettre en pratique.

Ces méthodes sont illustrées par un exemple corrigé, et comportent parfois un renvoi vers les exercices qui les utilisent. Il est très utile de refaire par soi-même les exemples présents dans les champs méthodes sans regarder les corrections lors des révisions du chapitre.



Si la méthode présentée est facilement programmable sur ordinateur, on trouvera un programme illustratif en langage Python.

Pour tester la connaissance du cours et des méthodes, chaque chapitre comporte ensuite une *Interro de cours*. Elle comporte généralement des questions de cours, des QCM et des exemples d'application directe des méthodes.

La suite du chapitre est consacrée aux *Exercices*. On les a séparés en deux parties : dans la rubrique *S'entraîner*, on trouve un ensemble d'exercices couvrant tous les points du chapitre. Ce sont les plus faciles, en général, mais certaines méthodes étant plus difficiles à mettre en œuvre que d'autres, ils ne sont pas nécessairement de difficulté égale.

La rubrique *Approfondir* contient d'autres exercices pour continuer de s'exercer, a priori un peu plus difficiles. Lorsque cela était possible, on a choisi des exercices proposés récemment à l'oral de concours d'entrée aux grandes écoles ou des « classiques ».

Enfin, la partie *Correction* comporte les corrigés détaillés de l'interrogation de cours et des exercices.

Attention, en fin de liste des exercices, nous avons dans quelques rares chapitres, proposé des exercices avec de simples indications de correction.

De façon générale, il est important de comprendre que la correction n'est pas une panacée et si on n'a pas suffisamment réfléchi à la question posée, elle constituera essentiellement un **soulagement**, et donc un anesthésiant faisant suite à la « galère » de la recherche.

C'est pourquoi, nous vous recommandons de ne jamais aller voir les corrections en première intention, même quand elles sont présentes. D'une part, la place oblige à passer certaines étapes¹, et d'autre part, si la phase de recherche a été suffisante et n'a pas abouti, le plaisir d'être soulagé(e), puis de dire *mais c'est bien sûr, on pouvait faire comme ci ou comme ça*, ne doit pas être confondu avec un apprentissage en profondeur.

En outre, une correction ne doit pas être prise comme un modèle absolu à mémoriser et à reproduire de manière automatique. L'intelligence mathématique ne se résume pas à la mémoire : elle fait aussi intervenir l'imaginaire, la visualisation, l'intuition et surtout l'envie de comprendre et découvrir des choses par soi-même.

Le sens de **l'effort** et la **conquête de l'autonomie** seront ainsi des qualités précieuses à acquérir ou consolider durant ces deux années.

Un peu paradoxalement, le côté ludique et passionnant des mathématiques devrait s'en trouver renforcé chez vous !

Un émerveillement certain pourrait même vous gagner au fil du temps, produit par la fréquentation des objets mathématiques, de leur beauté intrinsèque, et du sentiment d'unité et d'infailibilité qui s'en dégage.

Lors des concours, vous serez en compétition avec les autres, et les sujets d'épreuve ne vous proposeront pas de reproduire des corrections, ce qui serait une perte d'énergie dans l'objectif de comparer des qualités réelles et durables développées chez les candidats.

Tout au long de l'ouvrage, on a utilisé un certain nombre de pictogrammes :



pour attirer l'attention du lecteur sur un ou plusieurs points spécifiques.



pour signaler un piège ou une erreur à éviter.



pour mettre l'accent sur une bonne manière de rédiger.

1. en les mettant toutes, le livre ferait au moins *fibonacci*(1000) ou *tree*(3) pages !

Des vidéos pour vous aider à réussir en prépa

Pour réussir vos concours, vous devrez mettre en œuvre des compétences disciplinaires (*hard skills*), mais aussi des *soft skills*, ces compétences transversales qui vous permettront de tenir le bon rythme. La collection **Parcours Prépas** vous offre six vidéos pour vous préparer à réussir dès la première année et faire la différence le jour J par la maîtrise de votre énergie (physique, émotionnelle, mentale), par l'entretien de votre motivation et par vos méthodes de travail.

Tout d'abord deux vidéos méthodologiques d'Alexis Brès. Professeur agrégé de sciences physiques et agrégé-préparateur, il intervient dans le concours d'entrée à l'ENS et pour la banque e3a-Polytech. Il rédige également des sujets d'écrits pour d'autres écoles d'ingénieurs.



<http://dunod.link/jvy7mqd>

Vidéo 1 : Apprendre à apprendre Comment mobiliser efficacement son cours ?

Comment apprendre un cours ? Comment savoir si on l'a vraiment compris ? Comment le mobiliser dans les TD et dans les épreuves ? Comment développer des « compétences analogiques » pour se forger une intuition de la solution et gagner un temps précieux ?

Autant de questions-réponses abordées dans cette vidéo. Une méthodologie particulièrement adaptée à l'apprentissage des cours de physique, de mathématiques ou de sciences industrielles.



<http://dunod.link/z0psk69>

Vidéo 2 : Écrit, oral : aborder sereinement la résolution d'un problème

Si les exigences d'un sujet d'écrit et d'un oral peuvent sembler assez différentes, il existe des techniques communes pour aborder ces épreuves sans stress.

Cette vidéo fournit :

- des techniques pour apprivoiser la résolution d'un problème de physique : modalités de décryptage du sujet et de mobilisation du cours ;
- des recommandations sur le fond et la forme pour gagner la confiance des correcteurs ;
- des tactiques cohérentes pour gagner des points ;
- des points de vigilance concernant la préparation des khôlles et des oraux.

Ensuite quatre vidéos « soft skills » pour aborder la prépa comme le ferait un sportif de haut niveau. Ces vidéos ont été conçues par Stéphane Fassetta, fondateur de Syprium, coach professionnel, préparateur mental de sportifs de haut niveau, professeur d'aïkido.



<http://dunod.link/80x2gwu>

Vidéo 3 : Les cinq piliers de l'énergie, ou comment réussir le marathon de la prépa ?

La prépa, c'est un peu comme le sport de haut niveau : plus le temps passe, plus le niveau ou les contraintes augmentent. Maîtriser son énergie, c'est donc faire un usage optimum

de ses ressources pour tenir le rythme des deux années, s'adapter à la diversité des situations et réussir ses épreuves. Cette vidéo présente les dimensions de notre énergie et les cinq piliers pour l'entretenir. La capacité à se ressourcer sur ces cinq piliers est une compétence à développer dès votre arrivée en prépa.



<http://dunod.link/sicy8u3>

Vidéo 4 : Gérer efficacement son temps en prépa

En prépa, on manque toujours de temps. L'enjeu est donc de gérer efficacement cette ressource pour atteindre les objectifs de vos différentes échéances.

Cette vidéo fournit des repères pour :

- trouver sa propre organisation personnelle : techniques de planification, objectifs SMART, suivi de la progression dans les tâches ;
- développer sa capacité d'attention, essentielle à la compréhension, à la mémorisation, à la gestion de la charge mentale et à votre avancement ;
- connaître ses propres biorhythmes pour un apprentissage efficient, en capitalisant sur les acquis de la chronobiologie.



<http://dunod.link/p5maym6>

Vidéo 5 : Gérer son stress et développer la confiance en soi pour les concours

Comme dans le sport de haut niveau, la préparation d'un concours soumet votre énergie à rude épreuve. Si une certaine pression est stimulante pour doper ses performances, l'installation dans un stress chronique compromet à la fois votre santé et vos chances de réussite.

Cette vidéo permet :

- d'identifier les sources externes et internes de son propre stress ;
- de comprendre le rôle du stress comme mécanisme naturel d'adaptation de l'organisme face à une situation déstabilisante et/ou à fort enjeu ;
- d'apprendre à reconnaître certains symptômes physiques, émotionnels ou cognitifs du stress chronique pour prévenir l'épuisement ;
- de connaître les possibilités de régulation physique et mentale du stress pour agir ;
- d'entretenir passionnément sa motivation pour préserver durablement la confiance en soi, quelles que soient les contre-performances à l'entraînement.



<http://dunod.link/vncd3c5>

Vidéo 6 : Techniques respiratoires et de préparation mentale pour préparer les concours

La capacité à se relaxer ou à récupérer quand il le faut est essentielle pour tenir le rythme de préparation d'un concours.

Grâce à cette vidéo :

- vous saurez mettre en œuvre différentes techniques respiratoires adaptées à la récupération et à la dynamisation physique ;
- vous disposerez de deux techniques de préparation mentale pour conserver un état d'esprit positif, limiter votre niveau de stress et améliorer vos capacités d'attention.

Pour bien commencer

Le but de cette introduction est de donner un certain nombre de conseils de rédaction pour bien commencer l'année de classe préparatoire.

Méthode 0.1 :

Se rappeler la définition du mot *mathématique*.

Les mathématiques sont la recherche de certitudes formelles absolues. On accède à ces certitudes uniquement à l'aide de preuves formelles. Seule la **forme** valide la preuve, indépendamment du sens des mots (hors mots logiques) qui s'y trouvent.

Un texte que vous auriez besoin de défendre en invoquant le sens des mots qui s'y trouvent est automatiquement en dehors des preuves mathématiques.

Les parties implicites ou explicites, absolument **toutes**, admises dans une preuve sont automatiquement des hypothèses que la preuve fait. Parfois ce sont des axiomes (c'est-à-dire des hypothèses pérennes admises pour toujours), d'autres fois des hypothèses provenant du contexte, d'autres fois encore des égalités provenant de définitions antérieures.

Les définitions sont des **abréviations** avant tout, en termes de statut. Elles peuvent prendre des paramètres. Par exemple, vous pouvez écrire *j'appelle $f(q)$ le nombre $10q^9$, et ce pour tout nombre rationnel q* . L'égalité $f(q) = 10q^9$ est alors utilisée comme un nouvel axiome. On peut parfois gagner du temps en écrivant $a := b$ à la place de *je désigne par a l'objet b* et les mathématiciens se permettent même souvent d'écrire $a = b$ dans un abus certain de notation ! L'intérêt des définitions est de raccourcir les textes, mais elles peuvent être éliminées par un processus de remplacement itéré. Par exemple, $2 + 2 = 4$ ne fait qu'exprimer que

$$((1 + 1) + 1) + 1 = (1 + 1) + (1 + 1)$$

du fait des définitions suivantes : $2 := 1 + 1$; $3 := 2 + 1$; $4 := 3 + 1$

Méthode 0.2 : Prendre garde aux hypothèses d'un théorème

On ne peut appliquer la conclusion d'un théorème que lorsque toutes ses hypothèses sont vérifiées, avant d'utiliser sa conclusion.

Par exemple, les théorèmes faisant le lien entre monotonie d'une fonction et signe de sa dérivée ne sont applicables que sur un intervalle !

Exemple d'application

Les énoncés suivants sont-ils toujours vrais, toujours faux ou dépendent-ils des paramètres (on justifiera) ?

- (a) Une fonction de dérivée strictement négative sur I est strictement décroissante sur I .
- (b) Une fonction dont la dérivée est nulle sur I est constante sur I .

Correction :

(a) **est parfois faux** : Comme on l'a expliqué dans la méthode, il faut que I soit un intervalle pour que le théorème soit applicable. La fonction inverse a une dérivée strictement négative sur

$I = \mathbb{R}^*$, mais n'est pas strictement décroissante sur I : on a $-1 < 1$, et $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$. f est en revanche strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

(b) est parfois faux : Là encore, il faut que I soit un intervalle pour que le théorème soit applicable. Si I n'est pas un intervalle, f est constante sur chacun des intervalles composant I , mais pas constante globalement. Par exemple, $f : [-1, 1] \cup [3, 5] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 5 & \text{si } x \in [3, 5] \end{cases}$ est dérivable, de dérivée nulle sur $[-1, 1] \cup [3, 5]$, mais non constante.

Méthode 0.3 : Statuer ses variables

Lorsqu'on doit montrer un énoncé dépendant d'une (ou plusieurs) variable(s), il est préférable d'introduire cette variable. Sans cela, une personne qui lit votre raisonnement peut ne pas l'accepter. Le mot « *soit* $x \in A$ » est une abréviation pour dire que vous nommez x un objet dans A qui a été choisi par un démon qui a fait tout son possible pour rendre la chose que vous voulez prouver fausse. Pour cette raison, la convention est que si vous parvenez quand même à prouver la chose, on considère que vous l'avez prouvée pour n'importe quelle valeur de x .

Vous aurez l'occasion, comme tout mathématicien, de gamberger sur des expressions non définies comme il peut arriver parfois :

$$\forall \in \mathbb{R} : \frac{a}{b} = c \iff [b \neq 0 \text{ et } a = bc]$$

qui ne sont pas toujours faciles à déclarer fausses. On vous laisse le plaisir de la méditation, importante, sur ces petites aventures consécutives à l'utilisation de l'argot mathématique.

Méthode 0.4 : Prendre garde au type des objets manipulés

En mathématiques, on manipule divers types d'objets : des ensembles, des nombres (entiers, réels, complexes ...), des fonctions, des vecteurs etc. Il ne faut pas les confondre.

On peut par exemple, additionner deux nombres, mais on ne peut pas additionner deux ensembles, on peut seulement en prendre la réunion. On peut comparer deux nombres réels (avec $\leq$), pas deux nombres complexes. Une fonction peut être continue, croissante, dérivable, pas un nombre réel.

Attention aussi : x n'est pas forcément un nombre réel, n un nombre entier ou f une fonction (même si ce sont des noms très courants pour chacun de ces objets).

Exemple d'application

Proposer des statuts pour les variables utilisées dans les formules ou les phrases suivantes

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \ln'(h) = \frac{1}{h}. & \text{(b)} x \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}. \\ \text{(c)} \frac{1}{f} = \frac{\overline{f}}{|f|^2}. & \text{(d)} n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1. \end{array}$$

Correction :

(a) On regarde la dérivée de $\ln$ en h , ce n'est acceptable qu'avec h un réel strictement positif.

(b) On parle du terme dérivable pour x , ce n'est acceptable qu'avec x une fonction. Pour pouvoir être dérivable sur $\mathbb{R}$, elle doit être définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(c) On parle du conjugué de f (notation $\bar{f}$) et de son module $|f|$, si f est un nombre complexe, non nul pour qu'on puisse en prendre l'inverse. C'est acceptable.

(d) On parle d'une limite pour n , ce qui est possible quand n est une fonction. Pour regarder sa limite en $+\infty$, elle sera supposée définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ (avec $a \in \mathbb{R}$), à valeurs dans $\mathbb{R}$.



Dans le dernier point, il est inutile de définir x (on dit que x est une variable muette).

En effet, on précise que x est un réel qui tend vers $+\infty$ dans la notation $x \rightarrow +\infty$.

Exemple d'application

Les énoncés suivants sont-ils grammaticalement corrects ?

(a) La fonction x^2 est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(b) $\exp$, $\cos$ et $\sin$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

(c) Pour $z \in \mathbb{C}$, $z^2 \geq 0$.

(d) si $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, on a, pour $x \in]-1, 1[$,

$$f'(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} \times \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{-2}{(1+x)(1-x)}.$$

Correction :

(a) n'a pas de sens car x^2 n'est pas a priori une fonction (encore qu'on ne le sache pas de manière sûre puisque la variable x n'a pas été proprement introduite). Un énoncé correct est : la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(b) est correct.

(c) Il n'y a pas de relation d'ordre usuellement implicite dans $\mathbb{C}$. On ne peut donc pas affirmer qu'un nombre complexe est positif, sauf à exiger qu'il soit réel.

(d) est incorrect grammaticalement : l'écriture $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'$ prétend dériver le nombre réel $\frac{1-x}{1+x}$ et non une fonction. Cette écriture est en revanche tolérée dans la plupart des calculs, car elle permet d'éviter de faire des erreurs, mais cette tolérance n'est pas de droit opposable.

Méthode 0.5 : Rajouter de la lisibilité en raisonnant en français

Lorsqu'on écrit une première formule, cela peut être par exemple une hypothèse ou la conclusion désirée. Dans le premier cas, on l'introduit par « On a », dans le second, par « On veut montrer que ».

Lorsqu'on passe d'une formule à une autre, il peut y avoir un rapport d'équivalence (que l'on traduira par une expression comme *c'est-à-dire*, *i.e.*, *si, et seulement si*, ...) ou d'implication (que l'on traduira par une expression comme *donc*, *alors*, *ainsi*, *par suite* ...).

Sans ces indications, le raisonnement effectué peut être rejeté par le lecteur ou le correcteur !

Exemple d'application

Un élève a produit le raisonnement suivant pour montrer que si x et $y \in]-1, 1[$,

$\frac{x+y}{1+xy} \in]-1, 1[$. Complétez-le avec les phrases manquantes en français.

$$\frac{x+y}{1+xy} < 1 \quad x+y < 1+xy \quad 1+xy - x - y > 0 \quad (1-x)(1-y) > 0 \quad \text{OK}$$

$$\frac{x+y}{1+xy} > -1 \quad x+y > -1-xy \quad 1+xy+x+y > 0 \quad (1+x)(1+y) > 0 \quad \text{OK}$$

Correction :

On souhaite montrer que $\frac{x+y}{1+xy} \in]-1, 1[$, il y a deux inégalités à montrer. La première inégalité souhaitée est $\frac{x+y}{1+xy} < 1$. Comme $1+xy > 0$, elle est équivalente à :

$$x+y < 1+xy \quad \text{i.e.} \quad 1+xy-x-y > 0 \quad \text{i.e.} \quad (1-x)(1-y) > 0.$$

Cette dernière inégalité est vraie puisque x et y sont dans $] -1, 1[$, donc $1-x > 0$ et $1-y > 0$.

En remontant les équivalences, l'inégalité de départ $\frac{x+y}{1+xy} < 1$ est donc vraie.

La seconde inégalité souhaitée est $\frac{x+y}{1+xy} > -1$. Comme $1+xy > 0$, elle est équivalente à :

$$x+y > -1-xy \quad \text{i.e.} \quad 1+xy+x+y > 0 \quad \text{i.e.} \quad (1+x)(1+y) > 0.$$

Cette dernière inégalité est vraie puisque x et y sont dans $] -1, 1[$, donc $1+x > 0$ et $1+y > 0$.

En remontant les équivalences, l'inégalité de départ $\frac{x+y}{1+xy} > -1$ est donc vraie.

En conclusion, on a bien $\frac{x+y}{1+xy} \in]-1, 1[$.



- Le terme *i.e.* est l'abréviation de la locution latine *id est* (« ce qui est », littéralement). On l'utilise souvent en mathématiques.
- Le symbole $\Leftrightarrow$ n'est pas correct lorsqu'on écrit un raisonnement. C'est un connecteur logique, non un connecteur d'inférence. Le mot "*donc*" lui est préférable.

Méthode 0.6 : Attention en rédigeant une récurrence

Pour montrer par récurrence $\forall n \in \mathbb{N} : \mathcal{P}(n)$ (qu'il convient de définir proprement), on commence par montrer $\mathcal{P}(0)$ (phase d'initialisation).

Ensuite, **le démon** (et non pas vous !) choisit un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et **vous** devez montrer $\mathcal{P}(n+1)$ (phase d'hérédité).

Exemple d'application

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = 1 + 2 + \dots + n$ (avec $u_0 = 0$). Montrer que $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction :

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n) : \ll u_n = \frac{n(n+1)}{2} \gg$

On a $u_0 = 0 = \frac{0 \times 1}{2}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

« Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que » (pour abréger "j'appelle n un entier que le démon m'impose maintenant tel que")

$\mathcal{P}(n)$. Alors $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$ par hypothèse de récurrence. Par suite,

$$u_{n+1} = u_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est bien vérifiée, ce qui conclut la récurrence.

Partie 1

Techniques de calcul (semestre 1)

Nombres complexes et trigonométrie

L'essentiel du cours

■ 1 Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition

- On introduit un nombre dit imaginaire i qui vérifie $i^2 = -1$.
- Un **nombre complexe** est un nombre de la forme $z = a + ib$, avec a et $b \in \mathbb{R}$.
- a est appelé la **partie réelle** de z et est noté $\operatorname{Re}(z)$, b est appelé la **partie imaginaire** de z et est noté $\operatorname{Im}(z)$.



Cette définition a historiquement été posée pour donner des solutions à toutes les équations du second degré. En effet l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions complexes lorsque $\Delta < 0$: $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Définition

- Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$, on pose :

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \quad \text{et} \quad z_1 \times z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1).$$
- z^n est défini par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ en posant $z^0 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $z^{n+1} = z^n \times z$.
- Si $z = a + ib \neq 0$, on a $\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$.



- La définition de la multiplication se retrouve simplement en développant le produit et en utilisant la relation $i^2 = -1$.
- La définition de l'inverse se retrouve en multipliant le numérateur et le dénominateur de la fraction par $a - ib$, appelée quantité conjuguée de z .
- Tout nombre réel a peut être vu sous la forme d'un nombre complexe avec $a = a + i0$.
- Les nombres de la forme ia , $a \in \mathbb{R}$, sont appelés **imaginaires purs**. L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.
- Si $z \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{Re}(az) = a \operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(az) = a \operatorname{Im}(z)$.



Les formules $\operatorname{Re}(zz') = \operatorname{Re}(z) \operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(zz') = \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(z')$ sont fausses !

Définition

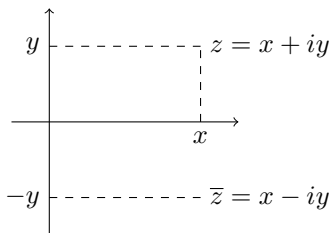
On considère le plan $\mathcal{P}$ usuel, muni d'un repère orthonormé direct. Si M est un point (resp. $\vec{u}$ un vecteur) du plan de coordonnées (x, y) , on appelle **affixe** de M (resp. de $\vec{u}$) le nombre complexe $x + iy$. On la note z_M (resp. $z_{\vec{u}}$). On appelle image du nombre complexe $z = x + iy$ le point $M(x, y)$ du plan.



Ceci permet d'identifier l'ensemble des nombres complexes au plan usuel.

Définition

Le **conjugué** de z , noté $\bar{z}$ est le nombre $a - ib$.



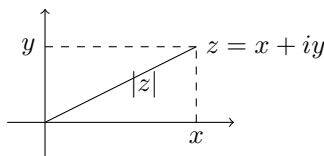
Propriétés de la conjugaison

- Si $z \in \mathbb{C}$, on a $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
- Si $z \in \mathbb{C}$, on a $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$.
- Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

• $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$	• $\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$	• $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ (si $z_2 \neq 0$)	• $\overline{z_1^n} = (\bar{z}_1)^n$
--	--	--	--------------------------------------

Définition

On appelle **module** du nombre complexe $z = a + ib$, et on note $|z|$ le réel $\sqrt{a^2 + b^2}$.



Propriétés du module

Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\bullet z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2 \quad \bullet |z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| \quad \bullet \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ (si } z_2 \neq 0) \quad \bullet |z_1^n| = |z_1|^n$$



Si $z \in \mathbb{C}^*$, on calcule la forme algébrique de $\frac{1}{z}$ en multipliant en haut et en bas par $\bar{z}$, et en utilisant $z\bar{z} = |z|^2$.

Inégalité triangulaire

- Si $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ avec égalité si et seulement si $z_1 = 0$ ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_2 = \lambda z_1$.
- On a également $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

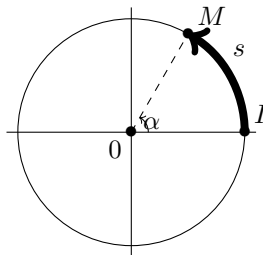


On ne peut pas comparer $|z_1 - z_2|$ et $||z_1| - |z_2||$! La seule chose qu'on puisse dire est que $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |-z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

■ 2 Trigonométrie

Définition

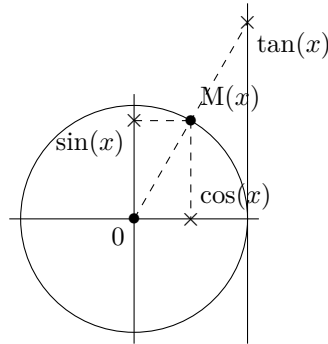
- On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1. On munit ce cercle d'une orientation définissant le sens direct (par convention ce sens est inverse de celui des aiguilles d'une montre).
- Soit M un point du cercle trigonométrique. On note I le point de coordonnées $(1, 0)$, qui appartient au cercle trigonométrique. On considère un parcours entre I et M sur le cercle trigonométrique. La longueur de ce parcours est appelée une abscisse curviligne de M .
- Il existe une infinité de parcours allant de I à M , et donc une infinité d'abscisses curvilignes de M . Tous les parcours diffèrent d'un nombre de tours entier du cercle trigonométrique, et un tour a pour longueur 2π .
Soit s_1 et s_2 deux abscisses curvilignes de M . On a : $\exists k \in \mathbb{Z}, s_2 = s_1 + 2k\pi$. On dit que s_1 et s_2 sont congrus modulo 2π et on note $s_1 \equiv s_2 [2\pi]$.
- Il est d'usage de choisir une représentation dite principale de M dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.



Définition

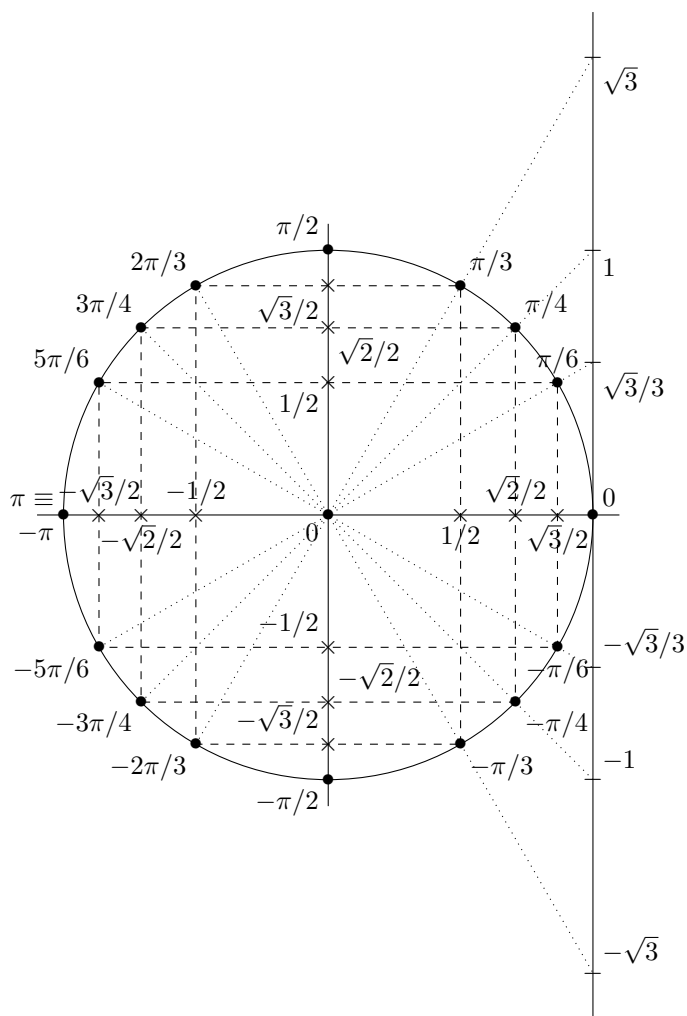
Soit $M(x)$ un point du cercle trigonométrique :

- le cosinus de x : $\cos x$ est l'abscisse de M ;
- le sinus de x : $\sin x$ est l'ordonnée de M ;
- la tangente de x : $\tan x$, lorsque cette définition a du sens (lorsque x n'est pas congru à $\pi/2$ modulo π), est le rapport du sinus sur le cosinus. La tangente peut se lire comme l'ordonnée de l'intersection de la droite (OM) avec la droite d'équation $x = 1$.



Le tableau et la figure qui suivent récapitulent les valeurs des angles usuels de $\cos$, $\sin$ et $\tan$:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ND	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



Formules liées au théorème de Pythagore

Soit $x \in \mathbb{R}$. Le théorème de Pythagore permet d'affirmer que :

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $|\sin x| \leq |x|$.

Formules liées aux symétries dans le cercle trigonométrique

Transformée	cos	sin	tan
Symétrie d'axe (Ox)	$\cos(-x) = \cos(x)$	$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\tan(-x) = -\tan(x)$
Symétrie d'axe (Oy)	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$	$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$
Symétrie centrale	$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$	$\tan(\pi + x) = \tan(x)$
Symétrie d'axe $y = x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$

Formules d'addition et soustraction de cos, sin et tan

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
- Lorsque $a + b$ n'est pas congru à $\pi/2$ modulo π , $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.
- Lorsque $a - b$ n'est pas congru à $\pi/2$ modulo π , $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

Formules de duplication

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$.
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.
- Si $2x$ n'est pas congru à $\pi/2$ modulo π , $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2(x)}$.
- $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$.
- $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$.

Expression de $\cos a$, $\sin a$ et $\tan a$ en fonction de $\tan(a/2)$

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$ est défini. On a alors :

- $\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$.
- $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
- $\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$.

■ 3 Forme exponentielle d'un nombre complexe**Définition**

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note e^{it} le nombre complexe $\cos t + i \sin t$.

Formules d'Euler

$$\forall t \in \mathbb{R}, \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \text{et} \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

Formule de Moivre

Pour $(t, u) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a

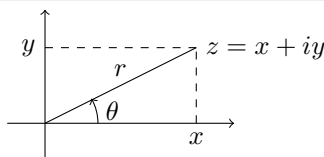
$$\bullet \overline{e^{it}} = e^{-it} \quad \bullet e^{i(t+u)} = e^{it} e^{iu} \quad \bullet e^{i(t-u)} = \frac{e^{it}}{e^{iu}} \quad \bullet (e^{it})^n = e^{int}$$

Proposition

- L'ensemble des e^{it} , $t \in \mathbb{R}$ est l'ensemble noté $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.
- Si $z \in \mathbb{C}^*$, on peut écrire z sous la forme $r e^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Définition

- L'écriture de $z \in \mathbb{C}^*$ sous la forme $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, est appelée **forme trigonométrique** de z .
- L'écriture de $z \in \mathbb{C}^*$ sous la forme $z = r e^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, est appelée **forme exponentielle** de z .
- θ est appelé un **argument** de z .



Argument d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$.

- Si $a = 0$, un argument de z est $\frac{\pi}{2}$ si $z \in i\mathbb{R}_+^*$ ($b > 0$), $-\frac{\pi}{2}$ si $z \in i\mathbb{R}_-^*$ ($b < 0$).
- Sinon, un argument¹ de z est $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ si $a > 0$, $\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$ si $a < 0$.



Un argument de z n'est pas unique : si θ est un argument de z , les arguments de z sont tous les $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, en d'autres termes tous les nombres congrus à θ modulo 2π . La forme exponentielle en revanche est unique, au sens où si l'on change θ en un autre argument de z , $e^{i\theta}$ est inchangé.

Opérations sur les arguments

Si θ_1 est un argument de $z_1 \in \mathbb{C}^*$, θ_2 un argument de $z_2 \in \mathbb{C}^*$, alors :

- un argument de $\overline{z_1}$ est $-\theta_1$,
- un argument de $z_1 \times z_2$ est $\theta_1 + \theta_2$,
- un argument de $\frac{z_1}{z_2}$ est $\theta_1 - \theta_2$,
- pour $n \in \mathbb{Z}$, un argument de z_1^n est $n\theta_1$.



La forme exponentielle d'un nombre complexe est donc très pratique pour le calcul d'inverse ou de puissances.

Proposition

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, et si $Ae^{i\varphi}$ est la forme trigonométrique de $a + ib$, alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, a \cos t + b \sin t = A \cos(t - \varphi).$$



En physique, si $a \cos t + b \sin t$ représente un signal sinusoïdal, A est appelé son **amplitude** et φ sa **phase**.

Définition

Si $z \in \mathbb{C}$, on note e^z (ou $\exp(z)$) le nombre complexe

$$e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z} = e^{\operatorname{Re} z} (\cos(\operatorname{Im} z) + i \sin(\operatorname{Im} z)).$$



Le nombre complexe e^z est donné sous forme exponentielle : son module est $e^{\operatorname{Re} z}$ et $\operatorname{Im} z$ en est un argument.

1. La fonction arctan sera définie au chapitre 3.

Propriétés de l'exponentielle complexe

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$:

- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \times e^{z_2}$.
- $e^{z_1} = e^{z_2}$ si et seulement si $z_1 - z_2 \in 2i\pi\mathbb{Z} = \{2ik\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Proposition

- Si $a \in \mathbb{C}^*$, l'équation $e^z = a$ a pour solutions les $\ln |a| + i(\theta + 2k\pi)$, où θ est un argument de a et $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $a = 0$, l'équation $e^z = a$ n'a pas de solution.

■ 4 Équations algébriques**Racines carrées**

Si $z \in \mathbb{C}^*$, z admet deux racines carrées dans $\mathbb{C}$, qui sont $\pm\sqrt{|z|}e^{i\frac{\theta}{2}}$, où θ est un argument de z .



La notation $\sqrt{x}$ est réservée à un réel x positif!

Définition

Si $az^2 + bz + c = 0$ est une équation du second degré à coefficients $a, b, c \in \mathbb{C}$ (et $a \neq 0$), on appelle **discriminant** de l'équation le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Résolution de l'équation du second degré

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$, on considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ de discriminant Δ .

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution $z = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux solutions qui sont $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$, avec δ une racine carrée de Δ .

Relations coefficients/racines

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$. r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation (avec la convention $r_1 = r_2$ si le discriminant est nul) si et seulement si

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad r_1 r_2 = \frac{c}{a}.$$

Définition

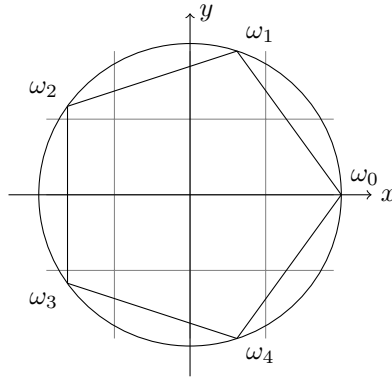
Si $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **racine n -ième de l'unité** un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

Énumération de $\mathbb{U}_n$

Il existe précisément n racines n -ièmes de l'unité qui sont les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.



- En particulier, les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ sont deux à deux distincts, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.
- On peut prendre $\llbracket 1, n \rrbracket$ ou tout autre ensemble de n entiers consécutifs à la place de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$.
- La somme des racines n -ièmes de l'unité vaut 0 pour $n \geq 2$.
- Les affixes des racines n -ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés.



Représentation graphique des racines 5-ièmes de l'unité : $\omega_i = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

Équation $z_1^n = z_2^n$

Si $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, on a $z_1^n = z_2^n$ si et seulement si $z_1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}} z_2$, $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.



Ceci est la généralisation de $z_1^2 = z_2^2$ si et seulement si $z_1 = \pm z_2$.

Racine n -ième d'un nombre complexe

Si $z = r e^{i\theta}$ est un nombre complexe (avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$), une racine n -ième de z est $z_1 = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}}$. Les racines n -ièmes de z sont alors les $z_1 e^{2ik\pi/n}$, $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

■ 5 Nombres complexes et géométrie

Propriété géométrique	Interprétation en complexes
Distance AB	$ z_B - z_A $
Cercle de centre O et de rayon r	Ensemble des nombres complexes z tels que $ z - z_O = r$
Disque de centre O et de rayon r	Ensemble des nombres complexes z tels que $ z - z_O \leq r$
Angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$	Argument de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$
A, B et C alignés	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
ABC rectangle en A	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$
Translation de vecteur $\vec{u}$	$z \mapsto z + z_{\vec{u}}$
Homothétie de centre A et de rapport k	$z \mapsto z_A + k(z - z_A)$
Rotation de centre A et d'angle θ	$z \mapsto z_A + e^{i\theta}(z - z_A)$
Symétrie par rapport à l'axe des abscisses	$z \mapsto \bar{z}$

Définition

On appelle **similitude directe plane** une application du plan qui à un point d'affixe z associe le point d'affixe $az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. a est appelé le **rapport** de la similitude.

Propriétés

- Les translations, homothéties et rotations sont des exemples de similitude directe plane.
- Une similitude directe plane conserve les angles (donc l'alignement, l'orthogonalité, le parallélisme) et multiplie les distances par $|a|$.

Décomposition d'une similitude directe plane

Soit s la similitude directe plane associée à $z \mapsto az + b$.

- Si $a = 1$, s est la translation de vecteur d'affixe b .
- Sinon s admet un unique point fixe A , et en notant $a = \rho e^{i\theta}$ la forme trigonométrique de a , r la rotation de centre A et d'angle θ , h l'homothétie de centre A et de rapport ρ , $s = r \circ h = h \circ r$.

Les méthodes à maîtriser

Méthode 1.1 : Savoir mettre un nombre complexe sous forme trigonométrique

- Dans les cas simples, on divise $z = a + ib$ par son module, en espérant reconnaître des valeurs usuelles de cos et sin.
- Sinon on utilise les formules $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ (si $a > 0$) ou $\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$ (si $a < 0$).

Exemple d'application

Mettre sous forme trigonométrique $1 - i$ et $3 + 4i$.

(1) On note $z = 1 - i$. On calcule $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ donc

$$z = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

(2) On note $z = 3 + 4i$. On calcule $|z| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$. En divisant par le module, on trouve $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$, qui ne sont pas des valeurs usuelles de cos et sin. On applique donc la formule générale, et un argument de z est $\arctan\left(\frac{4}{3}\right)$.

 Voir exercices 1.1 et 1.3.

Méthode 1.2 : Transformer une expression du type $A \cos t + B \sin t$ en $\rho \cos(t - \varphi)$

On cherche à factoriser l'expression $a \cos \theta + b \sin \theta$ avec (a, b, θ) trois réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.

Le principe consiste à factoriser l'expression par $\sqrt{a^2 + b^2}$. On a alors :

$$a \cos \theta + b \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(\theta) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(\theta)$$

On pose $c = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $s = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. On a alors $c^2 + s^2 = 1$ donc $c \in [-1, 1]$ et $s \in [-1, 1]$.

En reconnaissant c comme un angle remarquable (ou en posant $c = \arccos(\varphi)$ au chapitre 3), on a $\sin^2(\varphi) = 1 - \cos^2(\varphi) = 1 - c^2 = s^2$, donc $\sin(\varphi)$ vaut s ou $-s$.

L'expression peut donc s'écrire sous la forme $\cos(\varphi) \cos(\theta) + \sin(\varphi) \sin(\theta)$ ou $\cos(\varphi) \cos(\theta) - \sin(\varphi) \sin(\theta)$ et, grâce aux formules de somme de cosinus, peut se mettre sous la forme $\cos(\theta - \varphi)$ ou $\cos(\theta + \varphi)$.

Exemple d'application

Mettre sous forme $\rho \cos(t - \varphi)$ l'expression $2 \cos x + 2 \sin x$.

On factorise l'expression par $\rho = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. On a alors (x étant un réel quelconque) :

$$2 \cos x + 2 \sin x = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \cos x + \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \sin x \right) = 2\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right).$$

Méthode 1.3 : Savoir calculer les puissances d'un nombre complexe

Pour calculer les puissances élevées d'un nombre complexe, on utilise sa forme exponentielle. La formule de Moivre permet alors de simplifier le calcul.

Exemple d'application

Calculer le nombre $(1 - i)^{2023}$.

On a vu dans l'exemple précédent que $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, ainsi

$$\begin{aligned} (1 - i)^{2023} &= (\sqrt{2})^{2023} e^{-i\frac{2023\pi}{4}} = 2^{1011} \sqrt{2} e^{-505i\pi - \frac{3i\pi}{4}} = -2^{1011} \sqrt{2} e^{-\frac{3i\pi}{4}} \\ &= -2^{1011} \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 2^{1011} (1 + i) \end{aligned}$$

Pour simplifier le résultat, on a effectué la division euclidienne de 2023 par 4 : $2023 = 4 \times 505 + 3$.



Voir exercice 1.5.

Méthode 1.4 : Savoir factoriser une expression du type $e^{ip} \pm e^{iq}$

Lorsqu'on a une expression du type $e^{ip} \pm e^{iq}$, on met en facteur $e^{\frac{i(p+q)}{2}}$ pour faire apparaître une formule d'Euler. Le cas le plus souvent rencontré est lorsque $p = 0$ (expressions $1 + e^{ix}$ ou $1 - e^{ix}$). Cela permet de factoriser des expressions du type $\cos p + \cos q$ ou $\sin p + \sin q$, en prenant la partie réelle ou la partie imaginaire.

Exemple d'application

Factoriser $1 + e^{ix}$ et $\sin p + \sin q$.

(1) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $1 + e^{ix} = e^{\frac{ix}{2}} (e^{-\frac{ix}{2}} + e^{\frac{ix}{2}}) = 2 \cos \left(\frac{x}{2} \right) e^{\frac{ix}{2}}$.

(2) Pour p et $q \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \sin p + \sin q &= \operatorname{Im}(e^{ip} + e^{iq}) = \operatorname{Im} \left(e^{\frac{i(p+q)}{2}} (e^{\frac{i(p-q)}{2}} + e^{\frac{i(q-p)}{2}}) \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(e^{\frac{i(p+q)}{2}} 2 \cos \left(\frac{p-q}{2} \right) \right) = 2 \cos \left(\frac{p-q}{2} \right) \sin \left(\frac{p+q}{2} \right). \end{aligned}$$



Voir exercices 1.5, 1.7 et 1.14.

Méthode 1.5 : Savoir calculer les racines carrées d'un nombre complexe

- Dans les cas où l'on connaît la formule trigonométrique de z (par exemple si z est réel ou imaginaire pur), on part de cette forme, on prend la racine carrée du module et on divise un argument par 2.

- Dans tous les autres cas, on cherche une racine carrée de $z = a + ib$ sous la forme $\delta = x + iy$.

1. On développe $\delta^2 = z$ et on identifie parties réelle et imaginaire.
2. On ajoute l'équation $x^2 + y^2 = |\delta|^2 = |z|$ et on trouve les valeurs de x^2 et y^2 .
3. On obtient alors quatre solutions. On en élimine deux en gardant celles dont les signes respectent l'équation $2xy = b$.

Exemple d'application

Calculer les racines carrées de $-7i$ et $2 + i$.

- $z = -7i$ est un imaginaire pur, sa forme trigonométrique est $z = 7e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Ses racines carrées sont donc

$$\pm\sqrt{7}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \pm\left(\frac{\sqrt{14}}{2} - \frac{\sqrt{14}}{2}i\right).$$

- D'après la méthode, on cherche les racines carrées de $z = 2 + i$ sous la forme $\delta = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. On veut $\delta^2 = z$ i.e.

$$2 + i = (x + iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

2. On ajoute l'équation $x^2 + y^2 = |\delta|^2 = |z| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{5} \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x^2 = \frac{2 + \sqrt{5}}{2} \\ y^2 = \frac{\sqrt{5} - 2}{2} \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{2 + \sqrt{5}}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 2}{2}} \end{cases}$$

3. Enfin, l'équation $2xy = 1 > 0$ nous dit que x et y doivent être de même signe. Il vient donc

$$\delta = \pm\left(\sqrt{\frac{2 + \sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 2}{2}}i\right).$$



Voir exercices 1.6 et 1.12.

Méthode 1.6 : Savoir résoudre une équation du second degré

Pour résoudre une équation du second degré à coefficients complexes, on calcule le discriminant de l'équation, puis, s'il est non nul, une racine carrée de ce discriminant (en suivant la méthode précédente). On utilise ensuite les formules du cours.

Exemple d'application

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (1 - i)z - \frac{2 + 3i}{4} = 0$.

Le discriminant Δ de cette équation vaut

$$\Delta = (1 - i)^2 - 4\left(-\frac{2 + 3i}{4}\right) = -2i + 2 + 3i = 2 + i.$$

On a calculé dans l'exemple précédent les racines carrées de $2 + i$. Les solutions de l'équation sont donc

$$\frac{-1+i}{2} \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} i \right).$$



Voir exercices 1.6, 1.8 et 1.12.

Méthode 1.7 : Savoir exploiter les relations coefficients/racines

Si l'on cherche deux nombres x et y dont on connaît le produit p et la somme s , il faut résoudre l'équation $z^2 - sz + p = 0$. Si ses solutions sont r_1 et r_2 , alors $(x, y) = (r_1, r_2)$ ou $(x, y) = (r_2, r_1)$.

Exemple d'application

Résoudre le système $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$.

D'après les relations coefficients-racines, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ce système équivaut à x et y solutions de $z^2 - 3z + 2 = 0$. Cette équation a pour discriminant $9 - 8 = 1$ et pour solutions $\frac{3+1}{2} = 2$ et $\frac{3-1}{2} = 1$. Ainsi le système a pour solutions $(2, 1)$ et $(1, 2)$.



Voir exercices 1.8 et 1.13.

Méthode 1.8 : Savoir extraire les racines n -ièmes d'un nombre complexe

Pour extraire les racines n -ièmes ($n \geq 3$) d'un nombre complexe z , il faut impérativement passer par la forme trigonométrique de $z : z = r e^{i\theta}$.

1. Une racine n -ième de z est $z_1 = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}}$.
2. Les racines n -ièmes de z s'obtiennent ensuite en multipliant z_1 par les racines n -ièmes de l'unité.

Exemple d'application

Calculer les racines cubiques de $8i$.

On a $8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc une racine cubique de $8i$ est $2e^{i\frac{\pi}{6}}$. Les racines cubiques de $8i$ sont donc

$$2e^{i\frac{\pi}{6}} = 1 + i\sqrt{3}, \quad 2e^{i\frac{\pi}{6}} \times e^{2i\pi/3} = 2e^{5i\frac{\pi}{6}} = -1 + i\sqrt{3}$$

et $2e^{i\frac{\pi}{6}} \times e^{4i\pi/3} = 2e^{9i\frac{\pi}{6}} = 2e^{3i\frac{\pi}{2}} = -2i.$



Voir exercice 1.6.

Méthode 1.9 : Savoir résoudre une équation simple de degré n

Pour résoudre une équation de degré n , sans indication particulière, on essaie de se ramener à une équation du type $z_1^n = z_2^n$, que l'on résout en $z_1 = z_2 e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Exemple d'application**Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z + 1)^n - (z - 1)^n = 0$.**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Cette équation équivaut à $(z + 1)^n = (z - 1)^n$, i.e. $z + 1 = (z - 1)e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$. Cette dernière équation équivaut ensuite à $z(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = -1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Si $k = 0$, on obtient $0 = -2$, ce qui est impossible. Si $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, $e^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq 1$ et on obtient

$$z = -\frac{1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}} = \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}(e^{-\frac{ik\pi}{n}} + e^{-\frac{ik\pi}{n}})}{e^{\frac{ik\pi}{n}}(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}})} = \frac{2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}.$$

On obtient ainsi $n - 1$ solutions, les $\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ pour $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$.



Voir exercice 1.7.

Méthode 1.10 : Savoir montrer un fait géométrique avec les nombres complexes

Les nombres complexes sont un outil très puissant pour la géométrie. En utilisant le tableau de la section 5 du cours, on interprète les hypothèses et le résultat à montrer en termes d'affixes, et on tente d'arriver à une preuve par un calcul.

Pour simplifier les calculs, choisir un repère orthonormé adapté au problème considéré !

Exemple d'application**Montrer le théorème de Pythagore : le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$.**

On se place dans un repère orthonormé centré en A . L'affixe de A dans ce repère est donc 0, on note b celle de B et c celle de C . L'hypothèse ABC rectangle en A se traduit par $\frac{c}{b}$ imaginaire pur. L'hypothèse $BC^2 = AB^2 + AC^2$ se traduit par $|c - b|^2 = |c|^2 + |b|^2$. On calcule :

$$|c - b|^2 = (c - b)(\overline{c - b}) = c\bar{c} - b\bar{c} - c\bar{b} + b\bar{b} = |c|^2 + |b|^2 - 2\operatorname{Re}(c\bar{b})$$

puisque $b\bar{c}$ est le conjugué de $c\bar{b}$. Ainsi $BC^2 = AB^2 + AC^2$ si et seulement si $\operatorname{Re}(c\bar{b}) = 0$, si et seulement si $c\bar{b}$ est imaginaire pur. Or $\frac{c}{b} = \frac{1}{|b|^2}c\bar{b}$, donc $c\bar{b}$ est imaginaire pur si et seulement si $\frac{c}{b}$ l'est.

Ainsi, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ si et seulement si $\frac{c}{b}$ est imaginaire pur, si et seulement si ABC est rectangle en A .



Voir exercices 1.4, 1.9, 1.14 et 1.15.

Interro de cours

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Déterminer (et justifier) si les inégalités suivantes sont vraies ou fausses :
 - (a) $|x| + |y| \leq |x + y|$
 - (b) $|x + y| \leq |x| + |y|$
 - (c) $|x| - |y| \leq |x - y|$
 - (d) $|x - y| \leq |x| - |y|$
2. À quelle condition a-t-on $|x + y| = |x| + |y|$?
3. Déterminer (et justifier) si les énoncés suivants sont vrais ou faux :
 - (a) $\cos p - \cos q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$
 - (b) $\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$
 - (c) $\sin p + \sin q = 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$
 - (d) $\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$
4. Transformer $3 \cos(2x) - \sqrt{3} \sin(2x)$ sous la forme $A \cos(t + \varphi)$.
5. Calculer les racines carrées de $3 - i$.
6. Résoudre l'équation $z^2 - (1 + i)z + i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
7. Si x et y sont les solutions de l'équation $2r^2 + 3r - 2 = 0$, que valent $x + y$ et xy ?
8. Donner les racines 6-ièmes de -1 .
9. Déterminer (et justifier) si les énoncés suivants sont vrais ou faux :
 - (a) $\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}; k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ est une énumération de l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.
 - (b) $\{e^{\frac{ik\pi}{n}}; k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ est une énumération de l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.
 - (c) $\{-e^{\frac{2ik\pi}{n}}; k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$ est une énumération de l'ensemble des racines n -ièmes de -1 .
 - (d) $\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}; k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ est une énumération de l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.
10. Comment tester si trois points A , B et C sont alignés avec les nombres complexes ?
11. Déterminer (et justifier) si les énoncés suivants sont vrais ou faux :
 - (a) $z \mapsto 2z + 1$ est une homothétie de centre d'affixe 1 et de rapport 2.
 - (b) $z \mapsto iz + 1$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 - (c) $z \mapsto 2z + 1$ est une homothétie de centre d'affixe -1 et de rapport 2.
 - (d) $z \mapsto iz + 1$ est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
12. Donner la définition et la décomposition d'une similitude directe plane.

Exercices

■ S'entraîner

Exercice 1.1

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

1. $\frac{(5-i)(2-3i)}{(1+i)(1-2i)}$
2. $(\sqrt{3}-i)^{2015}$
3. $(e^{\frac{2i\pi}{3}} - 1)^{15}$

Exercice 1.2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1}^2 = \frac{x_n + 1}{2}$.
2. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{32}\right)$.

Exercice 1.3

Soient $a = 1 + i$ et $b = \sqrt{3} - i$.

1. Déterminer la forme exponentielle de a , b et ab .
2. Écrire la forme algébrique de ab .
3. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 1.4

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Montrer que $\left| \frac{1+zi}{1-zi} \right| = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.5

Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1. $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$
2. $1 + i \tan \theta$
3. $(1+i)^n$
4. $\frac{1 + \cos \theta + i \sin \theta}{1 - \cos \theta - i \sin \theta}$

où $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est tel que la quantité étudiée soit définie.

Exercice 1.6

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1. $(2+i)z^2 + (5-i)z + 2 - 2i = 0$.
2. $z^4 + 4z^2 + 5 = 0$.
3. $z^6 - 2z^3 \cos \theta + 1 = 0$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.7

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est tel que $\frac{n\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$:

1. $z^n = -1$.
2. $(z - i)^n - (z + i)^n = 0$.
3. $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = e^{in\theta}$.
4. $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 2 \cos(n\theta)$.

Exercice 1.8

1. Que vaut $1 + e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}}$? En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.
2. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.
3. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 1.9

On considère un triangle ABC non aplati, et on note O le centre du cercle circonscrit à ABC (le point d'intersection des trois médiatrices).

On se place dans un repère orthonormé de centre O , dans lequel on note a , b et c les affixes respectives de A , B et C .

1. Montrer que le point G d'affixe $\frac{1}{3}(a + b + c)$ est le point d'intersection des trois médianes de ABC .
2. Montrer que le point H d'affixe $a + b + c$ est le point d'intersection des trois hauteurs de ABC .
3. En déduire que O , G et H sont alignés.

■ Approfondir**Exercice 1.10**

On note $P = \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im} z > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$. On considère la fonction

$$f : z \mapsto \frac{z - i}{z + i}.$$

1. Montrer que f est définie sur P et que, pour $z \in P$, $f(z) \in D$.
2. Montrer que $f : P \rightarrow D$ est bijective (c'est-à-dire que tout élément de D admet un unique antécédent par f dans P).

Exercice 1.11

1. Montrer que

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1| + |z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|.$$

On cherchera à exprimer z_1 et z_2 en fonction de $(z_1 + z_2)$ et $(z_1 - z_2)$.

2. Interpréter géométriquement cette inégalité.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait égalité.

Exercice 1.12

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'équation $(E) : z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = 0$.

1. Déterminer les racines carrées de $5 - 12i$.

2. Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure α que l'on déterminera.

3. Montrer qu'on a $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = (z - \alpha)(az^2 + bz + c).$$

4. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

5. Quelle particularité a le triangle dont les sommets ont pour affixe les solutions de l'équation précédente ?

Exercice 1.13

Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. Calculer les nombres

$$A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \quad \text{et} \quad B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6.$$

On pourra commencer par calculer $A + B$ et AB .

Exercice 1.14

Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon r , A et B deux points distincts de $\mathcal{C}$. Le but de cet exercice est de montrer le théorème de l'angle au centre : M , un point du plan distinct de A et B ,

est sur le cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si $2(\widehat{MA}, \widehat{MB}) \equiv (\widehat{OA}, \widehat{OB}) \pmod{2\pi}$.

On se place dans un repère orthonormé de centre O , et on note a, b et m les affixes de A, B, M , α, β et t des arguments de a, b et m .

On pose $z = \frac{m - b}{m - a}$.

1. Si $M \in \mathcal{C}$, donner les formes trigonométriques de a, b et m . En déduire que

$$z = e^{i(\beta - \alpha)/2} \frac{\sin\left(\frac{\beta - t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha - t}{2}\right)}.$$

2. Montrer le sens direct du théorème de l'angle au centre.

3. Réciproquement, on suppose que $2(\widehat{MA}, \widehat{MB}) \equiv (\widehat{OA}, \widehat{OB}) \pmod{2\pi}$. Écrire z sous la forme $\rho e^{i\theta}$ avec $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$. En déduire une expression de t puis que $M \in \mathcal{C}$.

Exercice 1.15

Dans cet exercice, on note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On considère un triangle ABC et on note a , b et c les affixes des points A , B et C dans un repère orthonormé.

1. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct (i.e. on va de $\overrightarrow{AB}$ à $\overrightarrow{AC}$ dans le sens direct) si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$.
2. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

Corrections

Interro de cours

- (a) est faux : Si $x = 2$ et $y = -2$ on obtiendrait $4 \leq 0$!

(b) est vrai : Il s'agit de l'inégalité triangulaire.

(c) est vrai : On a $|x| - |y| \leq ||x| - |y||$ (tout nombre est inférieur à sa valeur absolue) et la deuxième inégalité triangulaire donne $|x| - |y| \leq |x - y|$.

(d) est faux : Si $x = 1$ et $y = -1$ on obtiendrait $2 \leq 0$!
- Il s'agit du cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : $|x + y| = |x| + |y|$ si et seulement si x ou y est nul, ou si on a $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = \lambda x$.
- On a

$$\begin{aligned}\cos p - \cos q &= \operatorname{Re}(e^{ip} - e^{iq}) = \operatorname{Re}\left(e^{\frac{i(p+q)}{2}} \left(e^{\frac{i(p-q)}{2}} - e^{\frac{i(q-p)}{2}}\right)\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(2i \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{\frac{i(p+q)}{2}}\right) = -2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\end{aligned}$$

(a) est faux et (b) est vrai.

De même

$$\begin{aligned}\sin p + \sin q &= \operatorname{Im}(e^{ip} + e^{iq}) = \operatorname{Im}\left(e^{\frac{i(p+q)}{2}} \left(e^{\frac{i(p-q)}{2}} + e^{\frac{i(q-p)}{2}}\right)\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{\frac{i(p+q)}{2}}\right) = 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\end{aligned}$$

(c) est vrai et (d) est faux.

- On factorise tout d'abord $3 \cos(2x) - \sqrt{3} \sin(2x)$ par $\sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$:
 $3 \cos(2x) - \sqrt{3} \sin 2x = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(2x) - \frac{1}{2} \sin(2x) \right) = 2\sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(2x) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(2x) \right) = 2\sqrt{3} \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$

- On cherche les racines carrées de $z = 3 - i$ sous la forme $\delta = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On veut $\delta^2 = z$ i.e.

$$3 - i = (x + iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -1 \end{cases}$$

On ajoute l'équation $x^2 + y^2 = |\delta|^2 = |z| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{10} \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x^2 = \frac{3 + \sqrt{10}}{2} \\ y^2 = \frac{\sqrt{10} - 3}{2} \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{3 + \sqrt{10}}{2}} \\ y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{10} - 3}{2}} \end{cases}$$

Enfin, l'équation $2xy = -1 < 0$ nous dit que x et y doivent être de signes opposés. Il vient donc

$$\delta = \pm \left(\sqrt{\frac{3 + \sqrt{10}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{10} - 3}{2}} i \right).$$

6. Le discriminant de l'équation est $\Delta = (1+i)^2 - 4i = 2i - 4i = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Une racine de Δ est donc

$$\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i.$$

Par suite, les solutions de l'équation sont

$$\frac{1+i+(1-i)}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1+i-(1-i)}{2} = i.$$

7. Par les relations coefficients/racines, on a $x+y = -\frac{3}{2}$ et $xy = \frac{-2}{2} = -1$.

8. La forme trigonométrique de -1 est $e^{i\pi}$. Une racine 6-ième de -1 est donc $e^{i\pi/6}$, et les racines 6-ièmes de -1 sont donc $e^{i\pi/6}e^{2ik\pi/6}$, $k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$. Ce sont donc

$$\begin{aligned} e^{i\pi/6} &= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, & e^{3i\pi/6} &= e^{i\pi/2} = i, & e^{5i\pi/6} &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ e^{7i\pi/6} &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, & e^{9i\pi/6} &= e^{3i\pi/2} = -i \quad \text{et} \quad e^{11i\pi/6} &= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

9. (a) est vrai : k varie dans un ensemble d'entiers consécutifs de cardinal n .

(b) est faux : Pour $k = 1$, $(e^{i\frac{\pi}{n}})^n = e^{i\pi} = -1 \neq 1$.

(c) est faux : Si n est pair, $(-e^{i\frac{2ik\pi}{n}})^n = (-1)^n = 1 \neq -1$.

(d) est faux : Pour $k = 0$ et $k = n$, $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ vaut 1. 1 est donc présent deux fois dans l'ensemble donné, ce n'est donc pas une énumération.

10. Notons a , b et c les affixes de A , B et C . Ces trois points sont alignés si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.

11. La fonction dans les énoncés (a) et (c) est une homothétie de rapport 2. On trouve son centre en résolvant l'équation $2z + 1 = z$, qui donne $z = -1$. Son centre est donc le point d'affixe -1 . Ainsi (a) est faux et (c) est vrai.

La fonction dans les énoncés (b) et (d) est une rotation d'angle un argument de i , donc $\frac{\pi}{2}$. Ainsi (b) est vrai et (d) est faux.

12. Si f est une similitude directe plane, s'exprimant en termes d'affixes par $z \mapsto az + b$, alors f est une translation de vecteur d'affixe b si $a = 1$. Si $a \neq 1$, f admet un unique point fixe A et est la composée commutative de la rotation de centre A et d'angle un argument de a avec l'homothétie de centre A et de rapport $|a|$.

Exercice 1.1

1. On calcule

$$\begin{aligned} \frac{(5-i)(2-3i)}{(1+i)(1-2i)} &= \frac{10-15i-2i-3}{1-2i+i+2} = \frac{7-17i}{3-i} = \frac{(7-17i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} \\ &= \frac{21+7i-51i+17}{9+1} = \frac{38-44i}{10} = \frac{19}{5} - \frac{22}{5}i \end{aligned}$$



Pour simplifier un quotient, on multiplie toujours en haut et en bas par l'expression conjuguée.

2. Pour le calcul de puissances, on utilise la forme trigonométrique (cf méthode 1.3). Le nombre complexe $z = \sqrt{3} - i$ a pour module $\sqrt{3+1} = 2$, et on a $z = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2e^{-\frac{i\pi}{6}}$. Il vient donc, par la formule de Moivre :

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} - i)^{2015} &= 2^{2015} e^{-\frac{2015i\pi}{6}} = 2^{2015} e^{-335i\pi - \frac{5i\pi}{6}} = -2^{2015} e^{-\frac{5i\pi}{6}} \\ &= -2^{2015} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2^{2014} \sqrt{3} + 2^{2014}i \end{aligned}$$

Pour simplifier l'exponentielle, on a effectué la division euclidienne de 2015 par 6 : $2015 = 335 \times 6 + 5$.

3. Là encore, on utilise la forme trigonométrique du nombre $z = e^{\frac{2i\pi}{3}} - 1$. Pour la calculer, le plus simple est d'utiliser la méthode 1.4.

$$e^{\frac{2i\pi}{3}} - 1 = e^{\frac{i\pi}{3}} (e^{\frac{i\pi}{3}} - e^{-\frac{i\pi}{3}}) = 2i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) e^{\frac{i\pi}{3}} = \sqrt{3} e^{\frac{i\pi}{2}} e^{\frac{i\pi}{3}} = \sqrt{3} e^{\frac{5i\pi}{6}}.$$

On calcule ensuite

$$(e^{\frac{2i\pi}{3}} - 1)^{15} = (\sqrt{3})^{15} e^{\frac{75i\pi}{6}} = 3^7 \sqrt{3} e^{12i\pi + \frac{3i\pi}{6}} = 3^7 \sqrt{3} e^{\frac{i\pi}{2}} = 3^7 \sqrt{3}i.$$

Exercice 1.2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $x = x_{n+1} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ et on applique la formule $\cos^2 x = \frac{\cos x + 1}{2}$. Le résultat vient immédiatement.

2. On cherche les valeurs de x_3 , x_4 et x_5 . On sait que $x_2 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On en déduit que

$$x_3 = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \text{ vérifie l'équation } x_3^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) = \frac{\sqrt{2} + 2}{4}.$$

Cette équation, du second degré, admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une est positive et l'autre négative. Comme $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ et donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}{2}$.

Par un raisonnement analogue, on trouve que $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{\sqrt{2} + 2}}}{2}$ et que $\cos\left(\frac{\pi}{32}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\sqrt{2} + 2}}}}{2}$.

Exercice 1.3

Soient $a = 1 + i$ et $b = \sqrt{3} - i$.

1. La forme exponentielle de a s'obtient en factorisant sa forme algébrique par son module qui est $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

On a ainsi $a = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}}$.

De même : $b = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\cos \left(\frac{-\pi}{6} \right) + \sin \left(\frac{-\pi}{6} \right) \right) = 2e^{-\frac{i\pi}{6}}$.

Enfin, le produit ab se calcule aisément à partir des formes exponentielles de a et de b :

$$ab = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} \times 2e^{-\frac{i\pi}{6}} = 2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4} - \frac{i\pi}{6}} = 2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{12}}.$$

2. Un simple développement donne $ab = (1+i)(\sqrt{3}-i) = (1+\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}-1)$.

3. On a $ab = |ab|(\cos(ab) + i \sin(ab))$. Une identification nous mène à :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

Exercice 1.4

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a alors $\left| \frac{1+zi}{1-zi} \right| = 1 \Leftrightarrow |1+zi| = |1-zi|$.

En divisant les deux membres par i cette égalité s'écrit aussi : $\left| z + \frac{1}{i} \right| = \left| \frac{1}{i} - z \right|$

ou encore $|z-i| = |-i-z|$ ce qui est aussi équivalent à $|z-i| = |z+i|$.

Dans le plan orthonormé $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on introduit I le point d'affixe z , M le point d'affixe i et N le point d'affixe $-i$. L'égalité précédente est équivalente à $IM = IN$. Ceci est encore équivalent à dire que I est équidistant à M et N , ou alternativement sur la médiatrice de $[MN]$. La médiatrice de ces deux points étant la droite réelle, on conclut quant à l'équivalence proposée.

Exercice 1.5

1. On a

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)}{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)} = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}{2e^{-\frac{i\pi}{6}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{i\pi}{4} + \frac{i\pi}{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{5i\pi}{12}}.$$

Le module de z est donc $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{5\pi}{12}$ en est un argument.



Lorsqu'on calcule le module et un argument d'un produit, d'une puissance ou d'un quotient, il est souvent plus pratique de calculer le module et un argument de chacun des termes, puis d'utiliser les formules du cours.

2. Pour que $\tan \theta$ soit défini, on doit avoir $\theta \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$. On calcule alors

$$|1+i \tan \theta| = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sqrt{\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} = \frac{1}{|\cos \theta|}.$$

Si $\cos \theta > 0$, on a alors

$$1 + i \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta} (\cos \theta + i \sin \theta) = \frac{1}{\cos \theta} e^{i\theta}$$

et un argument de $z = 1 + i \tan \theta$ est θ .

Sinon, on a

$$1 + i \tan \theta = -\frac{1}{\cos \theta}(-\cos \theta - i \sin \theta) = \frac{1}{|\cos \theta|}(-e^{i\theta}) = \frac{1}{|\cos \theta|}(e^{i\pi} e^{i\theta}) = \frac{1}{|\cos \theta|}e^{i(\pi+\theta)}$$

et un argument de z est $\theta + \pi$.

3. Comme vu dans la remarque plus haut, on commence par calculer le module et un argument de $1 + i$ puis on passe à la puissance

$$(1 + i)^n = \left(\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)^n = \left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^n = 2^{\frac{n}{2}} e^{i\frac{n\pi}{4}}.$$

Le module de $(1 + i)^n$ est donc $2^{\frac{n}{2}}$ et un argument en est $\frac{n\pi}{4}$.

4. L'expression est définie si et seulement si $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta} \neq 1$, i.e. $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$. Comme vu dans la remarque plus haut, on commence par calculer le module et un argument du numérateur et du dénominateur, et on utilise pour cela la méthode 1.4.

$$z = \frac{1 + \cos \theta + i \sin \theta}{1 - \cos \theta - i \sin \theta} = \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{\frac{i\theta}{2}} \left(e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}} \right)}{e^{\frac{i\theta}{2}} \left(e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}} \right)} = \frac{2 \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)}{-2i \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)} = i \frac{1}{\tan \left(\frac{\theta}{2} \right)}.$$

Le module de z est donc $\frac{1}{|\tan \left(\frac{\theta}{2} \right)|}$. Un argument en est $\frac{\pi}{2}$ si $\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) > 0$, $-\frac{\pi}{2}$ sinon.

Exercice 1.6

1. Cette équation a pour discriminant

$$\Delta = (5 - i)^2 - 4(2 + i)(2 - 2i) = 25 - 10i - 1 - 4(4 - 4i + 2i + 2) = 24 - 10i - 4(6 - 2i) = -2i.$$

Comme $\Delta = 2e^{-\frac{i\pi}{2}}$, une racine carrée de Δ est $\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 1 - i$. Ainsi, les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{-(5 - i) + 1 - i}{2(2 + i)} = \frac{-4}{4 + 2i} = \frac{-4(4 - 2i)}{16 + 4} = \frac{-4 + 2i}{5}$$

et

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{-(5 - i) - (1 - i)}{2(2 + i)} = \frac{-6 + 2i}{4 + 2i} = \frac{(-6 + 2i)(4 - 2i)}{16 + 4} = \frac{(-24 + 12i + 8i + 4)}{20} \\ &= \frac{-20 + 20i}{20} = -1 + i. \end{aligned}$$

2. Cette équation est a priori de degré 4, mais, en posant $y = z^2$, on se ramène à une équation du second degré.



Bien se souvenir de cette technique qui servira dès qu'on a une équation de la forme $az^{2n} + bz^n + c = 0$.

y est solution de $y^2 + 4y + 5 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 16 - 20 = -4$, donc pour solutions $y_1 = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i$ et $y_2 = \frac{-4 - 2i}{2} = -2 - i$.