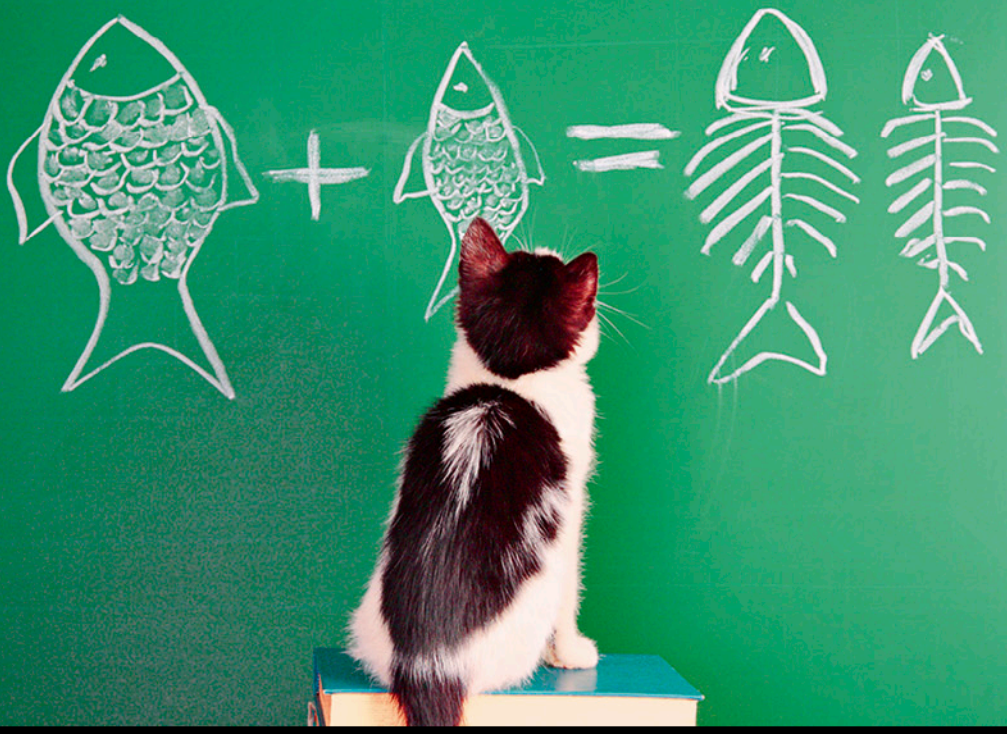
RETOUR AUX MATHS

Arithmétique

de 3 à 99 ans



Marie Debuisser

ellipses

RETOUR AUX MATHS

Arithmétique

de 3 à 99 ans

Marie Debuisser

ellipses

Conception graphique couverture : Nathalie FOULLOY

ISBN 9782340-111639

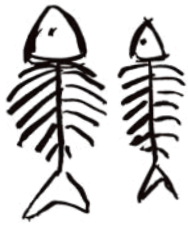
Dépôt légal : février 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr



Avant-propos

Chaque jour, je croise des personnes qui me disent : « Les maths ? Non, ce n'est vraiment pas pour moi ! » ou encore « De toute façon, même à l'école, je n'y comprenais rien », voire « Moi, je suis un littéraire, un vrai de vrai : pas de maths là-dedans... »

Ils ont peut-être un peu raison : vivre sans maths, ce n'est pas si grave ! Tout le monde ne fait pas des maths son métier, tout le monde n'en a pas besoin sans cesse. J'ai même un collègue qui arbore fièrement un T-shirt sur lequel est écrit « Encore une journée sans utiliser le théorème de Pythagore ». Et pourtant, il est prof de maths !

Mais peut-on vraiment vivre sans maths du tout ? « La culture, c'est ce qui reste quand on a tout oublié ». Donc on ne peut pas avoir tout oublié. Et quand bien même, on peut être resté longtemps loin des maths, mais vouloir y revenir un jour, par curiosité, par envie, ou par besoin. Parfois aussi, c'est pour pouvoir les expliquer à ses enfants ou ses élèves quand on devient parent ou professeur des écoles, car on n'a pas nécessairement un gros bagage mathématique avec soi.

Alors, dans tous les cas, ce livre est fait pour vous. N'hésitez pas à le parcourir par niveau, par thème, au hasard, vous trouverez toujours quelque chose pour vous accrocher.

Mais pour commencer, **c'est quoi « Les maths » ?**

Les maths, c'est comme un jeu de construction, où chaque élément posé va permettre d'en poser d'autres au-dessus :

- En partant d'un tout petit nombre de postulats, on prouve que certaines phrases sont obligatoirement vraies. On s'en sert alors comme des règles du jeu, décrivant les choses qu'on a le droit de faire. Ces phrases, appelées **propriétés** ou **théorèmes**, peuvent alors elles-mêmes servir de base pour continuer à construire de nouvelles propriétés.
- Chaque propriété doit être prouvée par un raisonnement **logique** avant de pouvoir être utilisée. Cela s'appelle une **démonstration**. Comme

l'objectif de ce livre est un retour aux maths pour offrir une meilleure compréhension des notions, nous ne nous attarderons pas ici sur les démonstrations. Néanmoins, il faut garder en tête qu'elles sont essentielles car toute la construction des maths repose en réalité sur elles.

- Quant aux **définitions**, c'est simplement donner un nom à des objets mathématiques pour en parler plus facilement.

Et voilà, c'est tout ! Les maths, ce n'est qu'un agglomérat de définitions et de propriétés démontrées. Mais elles servent à la fois à comprendre le monde du quotidien, modéliser des situations plus ou moins simples, et découvrir de nouvelles propriétés encore inconnues.

Voici donc, regroupées par thème, des définitions et des propriétés, qui sont l'essentiel des outils arithmétiques à connaître en fin de collège. Bonne lecture !

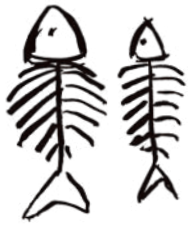
MÉMO

DÉFINITION (Maths) :
Les maths sont un ensemble logique de définitions et de propriétés pour décrire et créer un monde virtuel amusant et exaltant.

PROPRIÉTÉ (Maths) :
Les maths, c'est fun, faites des maths !

EXERCICE 0.1 : Vos attentes

- Quelles sont vos motivations pour parcourir ce livre et qu'espérez-vous y trouver ?



SOMMAIRE

Chapitre 1 • Comprendre et utiliser les nombres entiers 9
La numération de position 9
Faire et défaire des paquets : multiples et diviseurs 12
Les critères de divisibilité 16
Boss des maths : Leonardo Fibonacci 18
Correction des exercices 19

Chapitre 2 • Poser et effectuer des opérations avec des entiers 23
L'addition 23
La soustraction 24
La multiplication 25
Enchaînement de calculs et priorités opératoires 29
Boss des maths : Luca Pacioli 33
Correction des exercices 34

Chapitre 3 • La division euclidienne et le PGCD 37
La division euclidienne 37
Technique de la division euclidienne 39
Plus grand diviseur commun (PGCD) 42
Algorithme de recherche du PGCD (Algorithme d'Euclide) 43
Boss des maths : Euclide 46
Correction des exercices 47

Chapitre 4 • Les nombres premiers 49
De petites briques de construction 49
Décomposition unique ? 50
Ensemble des nombres premiers 52
Pour aller plus loin : retour au PGCD 55
Boss des maths : Ératosthène 56
Correction des exercices 57

Chapitre 5 • Les fractions 59
Représentation imagée et vocabulaire 59
Vers une définition plus « mathématique » 63
Fractions égales 64
Les maths voyagent : Londres et la voie 9¾ 67
Correction des exercices 68

Chapitre 6 • Effectuer des calculs avec des fractions 71
Motivation 71
Addition et soustraction 71
Multiplication 74
Division 77
Les maths voyagent : Les fractions égyptiennes 79
Correction des exercices 80

Chapitre 7 • Les nombres relatifs 85
Repérage sur une droite 85
Repérage dans un plan 87
Boss des maths : René Descartes 90
Correction des exercices 91

Chapitre 8 • Effectuer des calculs avec des relatifs 93
Addition 93
Soustraction 96
Multiplication et division 97
Boss des maths : Brahmagupta 100
Correction des exercices 101

Chapitre 9 • Les nombres décimaux 103
Des fractions décimales aux nombres décimaux 103
Poser et effectuer des opérations avec les décimaux 106
Généralisation de la division 108
Boss des maths : Simon Stevin 111
Correction des exercices 112

Chapitre 10 • Les familles de nombres 115
Récapitulatif des types de nombres 115
Boss des maths : Pythagore 119
Correction des exercices 121

Chapitre 11 • La proportionnalité 123
Définir la proportionnalité 123
Les méthodes de calcul liées à la définition 125
Représentation graphique de la proportionnalité 128
L'égalité des produits en croix 130
Boss des maths : Thalès de Milet 131
Correction des exercices 133

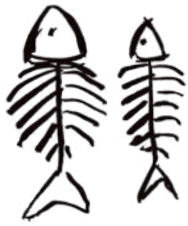
Pause gourmande pour se redonner du courage 139

Chapitre 12 • Les expressions littérales 141
Des chiffres et des lettres 141
Faire et défaire des paquets : factoriser et développer... et retrouver des multiples 144
Les puissances 146
La distributivité double 148
Les identités remarquables 150
Boss des maths : Vous, cher lecteur ! 151
Correction des exercices 152

Chapitre 13 • Les équations 155
Résolution par les schémas en barre 155
Résolution par le calcul littéral 156
Les équations « produit nul » 160
Boss des maths : Muhammad Al Khwarismi 163
Correction des exercices 164

Chapitre 14 • Les fonctions, les fonctions affines 169
Fonctions 169
Représentation graphique d'une fonction 171
Fonctions linéaires, fonctions affines 173
Boss des maths : Leonhard Euler 177
Correction des exercices 178

Annexes 181
Annexe 1 - Table de multiplications 181
Annexe 2 - Chronologie de nos Boss des maths 182
Annexe 3 - Décomposition en produit de premiers jusqu'à 100 183
Annexe 4 - Liste magique du Chapitre 12 184



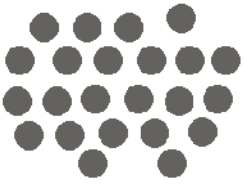
CHAPITRE 1
COMPRENDRE ET UTILISER LES NOMBRES ENTIERS

La numération de position

Pour faire des mots, il nous faut des lettres, et avec ces mots, on fait des phrases, qu'on peut lire, écrire, ou dire à l'oral. En maths, c'est pareil : pour faire des nombres, il faut des chiffres, et avec ces nombres, on pourra compter et calculer.

Dans n'importe quel mot, l'ordre des lettres est important. Les mots « romain » et « manoir » n'ont pas la même signification, et pourtant ils sont composés des mêmes lettres. C'est donc l'ordre des lettres qui donne le sens du mot. Pour les nombres, c'est pareil : chaque chiffre a une place bien particulière qui lui donne plus ou moins d'importance.

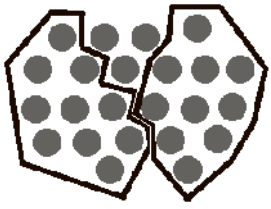
Pour comprendre cela, voici un exemple simple : supposons que je dispose devant moi un certain nombre de noisettes.



Si je les compte une par une, je vais obtenir un total (ici, c'est 23) qui s'appelle les **unités**.

Le nombre 23 correspond donc à **23 unités**.

Bien sûr, comme on a dix doigts et que, depuis la nuit des temps, l'Homme utilise ses doigts pour compter, on peut vouloir faire des paquets de 10 noisettes.

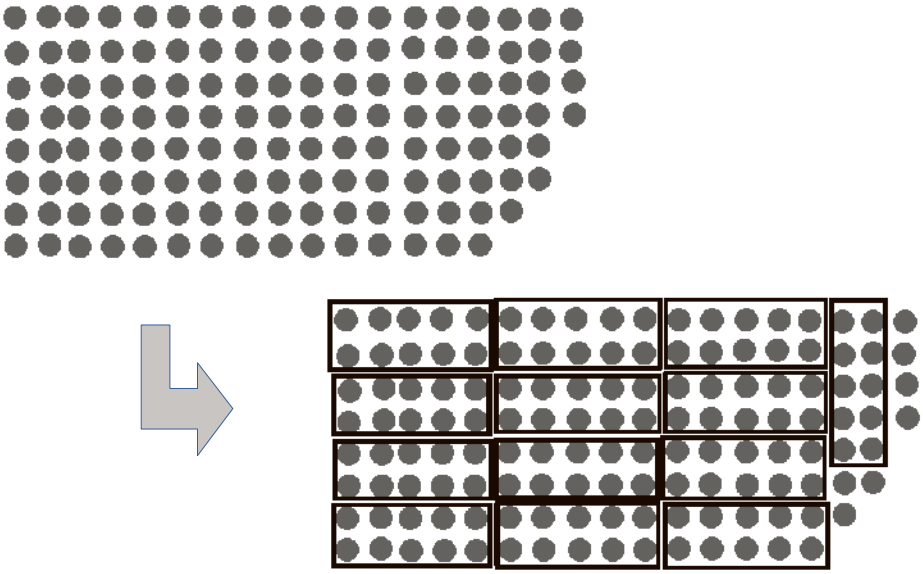


Il y aura alors 2 paquets de 10 et il en restera 3 que je ne pourrai pas mettre en paquets.

Chaque paquet de 10 s'appelle une **dizaine**, et les noisettes qu'on ne peut pas mettre en paquets de 10 n'ont pas changé : ce sont toujours des unités.

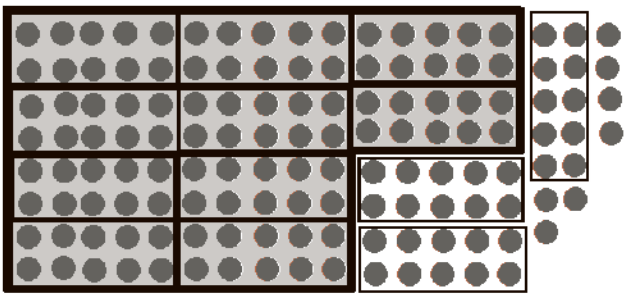
Le nombre 23 correspond donc à **2 dizaines et 3 unités.**

Le problème devient plus ardu si j'ai un grand nombre de noisettes. Je peux les compter une par une, mais ce serait laborieux. Par contre, toujours dans l'idée de faire des paquets de 10, on peut former des dizaines :



On constate alors qu'on a fabriqué 13 dizaines et qu'il reste 7 unités.

Avec les 13 dizaines, on peut alors faire un « gros » paquet de 10 dizaines, qu'on appelle une **centaine**. On obtient 1 centaine, 3 dizaines et 7 unités, c'est-à-dire 137 unités, comme on peut le constater dans l'image suivante :



Bien sûr, si on a davantage de noisettes, c'est plus difficile à dessiner, mais l'idée est la même : avec dix centaines, on fait un millier, et ainsi de suite. Bon, en réalité, quand on a beaucoup de noisettes, on aime plutôt les manger, en faire des gâteaux ou de la pâte à tartiner. Gardons cette idée pour un autre chapitre, et continuons.

Ce qu'on vient de constater, c'est que chaque chiffre qui compose le nombre a une importance particulière, qui dépend de sa place dans le nombre. **C'est la numération de position**.

MÉMO 1.1

DÉFINITION (Unité) :
Une **unité** est un objet avec lequel on peut compter.

DÉFINITION (Dizaine) :
Une **dizaine** est un groupe de dix unités.

DÉFINITION (Centaine) :
Une **centaine** est un groupe de dix dizaines.

DÉFINITION (Millier) :
Un **millier** est un groupe de dix centaines.

PROPRIÉTÉ (Numération de position) :
L'importance d'un chiffre dépend de sa position (son rang) dans le nombre.

EXERCICE 1.1 : Décomposition d'un entier par rang

- 358 unités = … centaine(s) + … dizaine(s) + … unité(s)
  = … dizaine(s) + … unité(s)
- 12 dizaines + 5 unités = … centaine(s) + … dizaine(s) + … unité(s)
  = …… unités
- 49 centaines + 28 unités
  = … millier(s) + … centaine(s) + … dizaine(s) + … unité(s)
  = …… unités

Attention toutefois à ne pas confondre « chiffre des » et « nombre de ».

Par exemple, dans le nombre 137, le ***chiffre des*** dizaines est 3 alors que le ***nombre de*** dizaines est 13 (on peut fabriquer 13 dizaines complètes avec les 137 unités).

EXERCICE 1.2 : « Chiffre des ... » / « Nombre de ... »

- Dans le nombre 348, le chiffre des dizaines est … mais le nombre de dizaines est …
- Dans le nombre 6297, le chiffre des centaines est … mais le nombre de centaines est …
- Dans le nombre 6297, le chiffre des unités est … mais le nombre d'unités est …

Faire et défaire les paquets : multiples et diviseurs

Ces nombres que nous venons d'utiliser, ce sont des nombres **entiers naturels** : ils servent à compter tout naturellement les objets. Et avec ces premiers nombres, viennent les premières opérations.

Il y a quatre opérations fondamentales : l'addition, la soustraction, la multiplication et la division, et il faut être prêt à pouvoir les effectuer d'ici quelques chapitres. Avec les entiers naturels, l'addition, c'est facile (il suffit de regrouper les objets), et la soustraction n'est pas beaucoup plus compliquée (il suffit d'en enlever). Par contre, pour la multiplication, il faudra déjà connaître ses tables… Oui, oui, je vous vois lever les yeux au ciel ! Alors regardons où vous en êtes et ce qui vous en reste.

EXERCICE 1.3 : Tables de multiplications

- À la page suivante, voici une table de multiplications vide. En 3 minutes chrono (et sans tricher), essayer de la remplir le plus possible.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

=> Stop ! C'est l'heure du bilan !

Vous trouverez les tables de multiplications complétées dans l'annexe 1 à la fin de ce livre. Lesquelles avez-vous réussi à remplir ?

- Généralement, tout le monde réussit à remplir les tables de 1 et de 2.
- La table de 5 et la table de 10 ne posent également pas trop de problème. Sans doute parce qu'on a cinq doigts à chaque main et dix doigts au total, sur lesquels il est naturel de compter. D'ailleurs, on s'en est bien servi en début de chapitre !

Et puis ensuite, il reste les autres, et quelques astuces pourraient bien être utiles…

- Tout d'abord, aviez-vous pensé que la table de multiplications est comme « en miroir » par rapport à la diagonale ? On obtient le même résultat pour 3×4 que pour 4×3. Pour les curieux, cela s'appelle la « commutativité de la multiplication ». On n'en a donc que la moitié à connaître, cela simplifie grandement le travail !
- Ensuite, aviez-vous remarqué que dans la table de 3, on avance de 3 en 3 par exemple ? Et c'est la même chose pour la table de 4, et pour toutes les tables, d'ailleurs… Mais il est vrai que c'est moins facile à utiliser pour les tables de 6, de 7, de 8 et de 9.
- Enfin, pour la table de 9, aviez-vous remarqué que les dizaines augmentent de 1 en 1 alors que les unités, elles, diminuent de 1 en 1 ? Et que l'addition des deux chiffres donne toujours 9 ? Voici qui devrait vous aider à les mémoriser.

Pour les cases restantes, évidemment, ce sont les plus difficiles. Il n'y a pas de secret : les apprendre et les réviser souvent, jusqu'à ce que cela devienne naturel. Mais plus on les utilisera, et plus il sera facile de s'en souvenir, alors pour vous aider, je vous propose de les utiliser souvent, tout au long de ce livre ! De façon générale, je vous conseille de les avoir sous les yeux à chaque fois qu'un exercice le nécessite, jusqu'à les mémoriser. Utilisez-les comme un dictionnaire, en allant rechercher le résultat toutes les fois où vous en aurez besoin.

Encore une remarque : sur la diagonale grise, on trouve les résultats de la multiplication d'un nombre entier par lui-même. On appelle cela des **carrés parfaits**, et il sera utile de les connaître parfaitement aussi, pour travailler sur le théorème de Pythagore en géométrie ainsi que sur les identités remarquables en algèbre. Mais nous n'en sommes pas encore là, ça vous laisse un peu de temps pour les mémoriser !

Mais à quoi ça sert de connaître ses tables de multiplications ? Aujourd'hui, il y a des calculatrices perfectionnées disponibles partout, même sur les smartphones ! Cela pourrait laisser penser qu'il ne sert plus à rien de les apprendre. Détrompez-vous : connaître les tables de multiplications est essentiel, en particulier pour les divisions et les décompositions. En effet, si la calculatrice est capable de donner le résultat de 7×3, elle n'est pas capable de donner toutes les multiplications dont le résultat est 24 par exemple.

Maintenant, si j'ai 24 billes et que je souhaite faire des paquets égaux et sans reste, combien puis-je faire de paquets ? Pour répondre à cette question, il me faut savoir déterminer toutes les tables de multiplications qui contiennent le nombre 24. On les appelle les **diviseurs de** 24, et on dit que 24 est un **multiple de** ces nombres.

Regardons tout d'abord la plus simple de toutes les possibilités : quel que soit le nombre de billes, je peux toujours faire un seul gros paquet avec l'ensemble de toutes les billes. Autrement dit, tous les nombres sont dans la table de 1. Ici, on a $24 = 1 \times 24$.

C'est l'occasion de remarquer que 24, comme tous les nombres également, est aussi dans sa propre table de multiplications : on peut faire 24 paquets de 1 bille chacun.

Ensuite, 24 est dans la table de 2, car $24 = 2 \times 12$.

Les nombres qui sont dans la table de 2 sont appelés les **nombres pairs**. Comme dans la vie courante, les paires, ce sont les choses qui vont par deux : paire de chaussures, paire de chaussettes, paire de gants…

Avec la même multiplication, on vient également de trouver que 24 est dans la table de 12. Il semble donc qu'à chaque fois qu'on trouve un diviseur de 24, on en trouve un second en même temps, c'est pratique !

Regardons maintenant la table de 3. On y trouve 24 comme résultat de 3×8 donc 3 et 8 sont également des diviseurs de 24. On trouve aussi 24 dans la table de 4 sous la forme 4×6 (ce qui nous donne deux nouveaux diviseurs qui sont 4 et 6), mais pas dans la table de 5. Ensuite, il y a la table de 6, mais on l'avait déjà trouvé lors de la décomposition de 24 dans la table de 4.

Pour le moment, on a donc trouvé que les diviseurs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24. Mais les a-t-on tous trouvés ? Il y en a peut-être d'autres, par exemple entre 12 et 24, non ?

Et bien non, car si un nombre entre 12 et 24 (par exemple 13) avait été un diviseur de 24, alors on aurait dû avoir $24 = 13 \times$ *(un nombre entier)* et ce *nombre entier* aurait dû se situer entre 1 et 2 puisque $24 = 1 \times 24$ et $24 = 2 \times 12$. Mais comme il n'y a aucun entier entre 1 et 2, c'est qu'il n'y a aucun diviseur de 24 entre 12 et 24 : on les a bien tous trouvés !

Pour trouver les diviseurs, il suffit donc de vérifier les tables une par une en partant de la table de 1, et quand on trouve une table qu'on avait déjà rencontrée dans une décomposition précédente, c'est qu'on les a tous trouvés.

MÉMO 1.2

DÉFINITION (Entier naturel) :

Un **entier naturel** est un nombre avec lequel on peut compter des objets. C'est donc un ensemble d'unités.

DÉFINITIONS (Multiple, Diviseur) :

Soient a et b deux nombres entiers naturels différents de zéro. On dit que a est un **multiple** de b lorsque a est dans la table de multiplications de b .

Cela revient à dire qu'il existe un entier naturel q tel que $a = b \times q$.

On dit aussi que b est un **diviseur** de a (ou que b divise a , ou encore que a est divisible par b).

Remarque : Tout nombre entier naturel non nul (c'est-à-dire différent de zéro) est divisible au moins par 1 et par lui-même.

EXERCICE 1.4 : Recherche de diviseurs

- Trouver tous les diviseurs de 25, puis tous les diviseurs de 60

Les critères de divisibilité

Il reste encore un problème à résoudre : comment faire si le nombre dont on cherche les diviseurs est trop grand pour les tables de multiplications ? Il faudrait vérifier chaque table une par une, alors qu'on ne les a apprises que jusqu'à 10. Peut-être que le nombre qu'on cherche à décomposer y figure, mais beaucoup plus loin, et on risque de ne pas le reconnaître !

Heureusement, il y a quelques propriétés qui peuvent nous aider : les **critères de divisibilité**.

- Un nombre est multiple de 2 s'il est pair, c'est à dire si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.

- Un nombre est multiple de 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
- Un nombre est multiple de 4 si le nombre formé par le chiffre des dizaines et le chiffre des unités est un multiple de 4.
- Un nombre est multiple de 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- Un nombre est multiple de 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Pour les autres tables, il n'y a pas de critère simple, il faut vérifier « à la main ».

MÉMO 1.3

PROPRIÉTÉ (Critères de divisibilité) :

Un nombre entier est ...	lorsque ...
Divisible par 2	Son chiffre des unités est pair : 0, 2, 4, 6 ou 8.
Divisible par 3	La somme de ses chiffres est divisible par 3.
Divisible par 4	Le nombre formé par les chiffres des dizaines et des unités est divisible par 4.
Divisible par 5	Son chiffre des unités est 0 ou 5.
Divisible par 9	La somme de ses chiffres est divisible par 9.

EXERCICE 1.5 : Critères de divisibilité

- 837 est-il divisible par 2 ? Par 3 ? Par 4 ? Par 5 ? Par 9 ?

EXERCICE 1.6 : Recherche des diviseurs d'un plus grand nombre

- Trouver tous les diviseurs de 105.