

Introduction à la méthode des éléments finis

Jean-Christophe Cuillère

3^e édition

DUNOD

Illustration de couverture :
Cette Image est le résultat d'un calcul par éléments finis à partir du logiciel
SolidWORKS. Source : J.-C. Cuillère.

© Dunod, 2011, 2016, 2023 pour la nouvelle présentation.
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

EAN 9782100864539

À mes enfants, Nicolas, Yannick, Caroline, Laurent, Xavier, Axel et Élisabeth
À Nadia

Merci pour l'amour et les encouragements

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1 • Introduction	1
1.1 La méthode des éléments finis	1
1.2 La pratique de la MEF	3
1.3 Les dangers et difficultés de la pratique de la MEF	3
1.4 L'enseignement de la pratique de la MEF	4
1.5 Organisation de l'ouvrage	5
Chapitre 2 • Rappels	7
2.1 Notations utilisées	7
2.2 Rappels en élasticité linéaire	8
2.2.1 Tenseurs fondamentaux	8
2.2.2 Relations entre déplacements et déformations	9
2.2.3 Relations entre déformations et contraintes	10
2.2.4 Cas de l'élasticité plane	10
2.2.5 Formalisation d'un problème d'élasticité tridimensionnel	12
2.2.6 Énergie de déformation élastique	16
2.2.7 Théorème des travaux virtuels (déplacements virtuels)	16
2.2.8 Contraintes principales	17
2.2.9 Contrainte de Von-Mises	17
2.2.10 Rupture	18
2.3 Les transformations entre espaces de coordonnées	19
2.3.1 Principe	19
2.3.2 Matrice Jacobienne	19
2.3.3 Utilisation de la matrice Jacobienne	20
Chapitre 3 • Approche directe-élément de barre	29
3.1 Introduction	29
3.2 Élément de barre	30
3.3 Modélisation matricielle	30
3.4 Applications	31
3.4.1 Première application	31
3.4.2 Deuxième application	34
3.5 Conclusion	35
Chapitre 4 • Notions générales et interpolation nodale	37
4.1 Notions générales	37
4.1.1 Introduction	37
4.1.2 Formulation intégrale	38

Table des matières

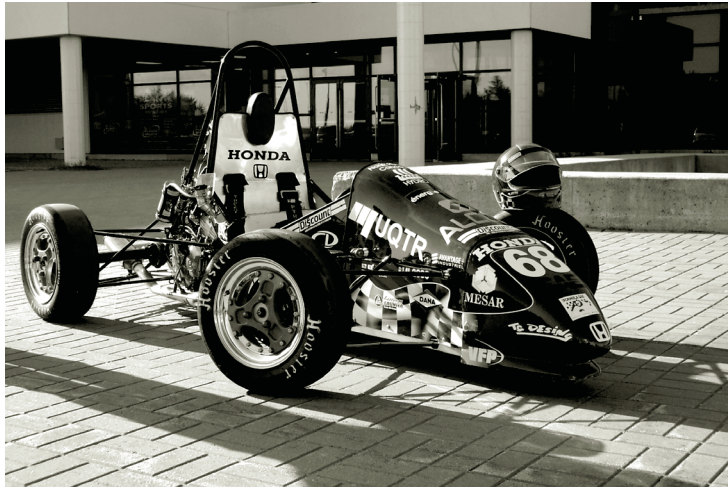
4.1.3 Maillage	38
4.1.4 Utilité du maillage	39
4.1.5 Transformation en un système linéaire	39
4.1.6 Résolution du système linéaire	40
4.2 Types d'éléments finis	40
4.2.1 Introduction	40
4.2.2 Éléments à une dimension	42
4.2.3 Éléments à deux dimensions	42
4.2.4 Éléments à trois dimensions	43
4.3 Règles de maillage et raffinement de maillages	44
4.3.1 Règles générales	44
4.3.2 Raffinement de maillages	47
4.3.3 Raffinement adaptatif de maillages	47
4.4 Interpolation nodale sur l'élément réel	49
4.4.1 Introduction	49
4.4.2 Interpolation nodale	50
4.4.3 Extension de l'interpolation nodale à deux et trois variables	51
4.5 Interpolation nodale sur l'élément de référence	52
4.5.1 Principe des éléments de référence	52
4.5.2 Éléments de référence	53
4.5.3 Fonctions de forme	54
4.5.4 Interpolation sur l'élément de référence	58
4.5.5 Exemple d'un élément à une dimension linéaire	59
4.5.6 Éléments isoparamétriques	60
4.6 Interpolation nodale en base complète	61
4.6.1 Convergence de la solution de calcul par EF	61
4.6.2 Illustration par un exemple	62
4.6.3 Continuité de la solution	63
4.6.4 Continuité et convergence de la solution en EF	63
4.6.5 Continuité et convergence en élasticité	65
4.7 Forme particulière de la matrice Jacobienne	67
Chapitre 5 • Intégration numérique	77
5.1 Introduction	77
5.2 Intégration à une dimension	78
5.2.1 Introduction	78
5.2.2 Méthode de Gauss (Gauss-Legendre)	78
5.3 Intégration à deux dimensions	80
5.3.1 Introduction	80
5.3.2 Méthode produit	81
5.3.3 Méthode directe	82
5.4 Intégration à trois dimensions	84
5.4.1 Introduction	84
5.4.2 Méthode produit	84
5.4.3 Méthode directe	85
5.4.4 Intégration sur le pentaèdre de référence	86

Chapitre 6 • Formulations intégrales	95
6.1 Introduction	95
6.2 Schéma général de la MEF	96
6.3 Méthode des résidus pondérés - forme intégrale forte	97
6.3.1 Résidu	97
6.3.2 Forme intégrale forte	98
6.3.3 Forme intégrale forte en élasticité	98
6.4 Forme intégrale faible	99
6.4.1 Intégration par parties (une dimension)	99
6.4.2 Formules de Green à deux dimensions	99
6.4.3 Formules de Green à trois dimensions	100
6.4.4 Forme intégrale faible	101
6.5 Hypothèse de Galerkin	104
6.5.1 Introduction	104
6.5.2 Hypothèse de Galerkin	104
6.5.3 Propriétés de l'opérateur variation	104
6.5.4 Forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin	105
6.5.5 Prise en compte des forces ponctuelles	106
6.6 Application à l'élément de barre	108
6.6.1 Introduction	108
6.6.2 Equation d'équilibre	109
6.6.3 Conditions aux limites	110
6.6.4 Forme intégrale forte	110
6.6.5 Forme intégrale faible	111
6.6.6 Forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin	111
6.6.7 Forces ponctuelles : utilisation directe du théorème des travaux virtuels	112
Chapitre 7 • Matrices de rigidité locales et vecteurs force locaux	119
7.1 Découpage de la forme intégrale faible	119
7.2 Discrétisation de la forme intégrale faible (cas général)	120
7.2.1 Introduction de l'interpolation nodale	120
7.2.2 Matrice [B]	122
7.2.3 Matrice de rigidité locale et vecteur force local (cas général)	122
7.3 Discrétisation de la forme intégrale faible (élément de barre)	124
7.3.1 Découpage de la forme intégrale faible	124
7.3.2 Passage sur l'élément de référence	125
7.3.3 Introduction de l'interpolation nodale	126
7.3.4 Matrice de rigidité et vecteur force	127
7.3.5 Forme des matrices et vecteurs locaux sans passer par l'élément de référence	127
7.3.6 Forme particulière de l'équation (7-30)	129
Chapitre 8 • Expansion assemblage résolution	131
8.1 Représentation du maillage	131
8.1.1 Introduction	131
8.1.2 Table des nœuds	132

Table des matières

8.1.3 Table de connectivité	132
8.2 Matrices de rigidité et vecteurs force locaux expansés	133
8.2.1 Principe	133
8.2.2 Vecteurs de localisation	135
8.2.3 Utilisation des vecteurs de localisation	136
8.2.4 Utilisation des matrices et vecteurs expansés	136
8.3 Matrice de rigidité globale et vecteur force global	137
8.3.1 Principe	137
8.3.2 Caractéristiques de la matrice globale	138
8.3.3 Minimisation de la largeur de bande	139
8.3.4 Exemple d'illustration (expansion et assemblage)	139
8.4 Résolution du système final – calcul des réactions	142
8.4.1 Système final	142
8.4.2 Particularités du système final	143
8.4.3 Méthode directe	144
8.4.4 Méthode du terme diagonal pénalisé	144
8.4.5 Méthode du terme diagonal unité	145
8.4.6 Cas particulier : déplacements imposés nuls	146
8.5 Expansion-assemblage-résolution (éléments de barre)	147
8.5.1 Introduction	147
8.5.2 Application à un cas pratique	147
Chapitre 9 • Application à l'élasticité linéaire	165
9.1 Application de la forme générale à un élément de barre	165
9.1.1 Introduction	165
9.1.2 Calcul de la matrice [H]	166
9.1.3 Calcul de la matrice [B]	166
9.1.4 Calcul de la matrice [N]	167
9.1.5 Calcul des matrices de rigidité locales et vecteurs force locaux	167
9.2 Éléments de poutre	168
9.2.1 Éléments de poutre en flexion uniquement	168
9.2.2 Éléments de poutre en tension et flexion combinées	187
9.3 Extension des formulations en 2D et en 3D	190
9.3.1 Introduction	190
9.3.2 Passage en 2D	191
9.3.3 Passage en 3D	193
9.3.4 Exemple d'application	194
9.4 Éléments triangulaires linéaires en contraintes planes	198
9.4.1 Introduction	198
9.4.2 Calcul de la matrice [H]	199
9.4.3 Calcul de la matrice [B]	200
9.4.4 Calcul de la matrice [N]	202
9.4.5 Calcul de la matrice de rigidité locale	202
9.5 Élasticité tridimensionnelle	204
9.5.1 Introduction	204
9.5.2 Maillage et discrétisation de la forme intégrale	205
9.5.3 Introduction de l'élément de référence	205
9.5.4 Matrice [B]	206

9.5.5 Matrice de rigidité locale et vecteur force local	208
9.5.6 Application à l'élément tétraédrique linéaire	209
9.6 Calcul d'extrapolation des efforts répartis aux nœuds	211
9.6.1 Introduction	211
9.6.2 Force volumique sur un élément 1D	211
9.6.3 Pression sur un triangle linéaire en 2D	213
9.6.4 Pression sur plusieurs triangles linéaires en 2D	215
9.6.5 Extrapolation d'une pression pour des éléments de degré plus élevé	217
Chapitre 10 • Utilisation pratique de la méthode des éléments finis	239
10.1 La pratique de la MEF	239
10.1.1 Introduction	239
10.1.2 Les dangers et difficultés de la pratique de la MEF	240
10.1.3 Les sources d'erreur dans l'utilisation pratique de la MEF	240
10.2 Le processus d'utilisation pratique de la MEF	241
10.2.1 Les étapes d'un calcul pratique par EF	241
10.2.2 L'analyse préliminaire	242
10.2.3 L'adaptation du modèle CAO de produit	243
10.2.4 La détermination d'un modèle EF	251
10.2.5 Calcul	256
10.2.6 Analyse des résultats	256
10.2.7 Raffinement et modification du modèle EF	259
10.2.8 Utilitaires divers	261
Annexe 1	263
Annexe 2	277
Annexe 3	283
Index	285



Formule SAE® conçue et fabriquée par l'équipe 2002-2003 d'un projet étudiant de l'École d'Ingénierie de l'Université du Québec à Trois-Rivières, dirigée par les chefs d'équipe Marc-André Lebel et Pierre-Luc Milot, sous la supervision du Professeur Jean-Christophe Cuillière. Le châssis et de nombreux composants du véhicule ont été optimisés à l'aide de la méthode des éléments finis afin de rechercher le meilleur compromis entre légèreté et robustesse.

INTRODUCTION

1

PLAN

- 1.1 La méthode des éléments finis (MEF)
- 1.2 La pratique de la MEF
- 1.3 Les dangers et difficultés de la pratique de la MEF
- 1.4 L'enseignement de la pratique de la MEF
- 1.5 Organisation de l'ouvrage

OBJECTIFS

- Découvrir la méthode des éléments finis.
- Situer la méthode dans le cadre de l'apprentissage en ingénierie.
- Situer la méthode dans le cadre de la pratique du métier d'ingénieur.

1.1 LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

L'enseignement en génie mécanique de la méthode des éléments finis (MEF) représente l'aboutissement d'une suite de cours traitant des théories, méthodes et outils utilisés pour calculer la résistance de pièces, d'assemblages et de structures. Par conséquent, aborder un cours d'éléments finis (EF) en mécanique demande de très bonnes connaissances en résistance des matériaux et plus généralement en élasticité. Ainsi, la base de l'application de la MEF en mécanique est la théorie des poutres ainsi que la théorie plus générale de l'élasticité.

Nous nous limiterons dans le cadre de cet ouvrage à des problèmes d'élasticité linéaire même si la méthode a de nombreuses applications pratiques dans le domaine de la mécanique non-linéaire (contacts, grands déplacements, grandes déformations...). D'ailleurs, de manière plus générale, la MEF tire une grande partie de sa popularité de son potentiel d'application à un très grand nombre de problèmes pratiques rencontrés par les ingénieurs. En effet, cette méthode s'applique à tout problème physique qui peut être modélisé mathématiquement par un ensemble d'équations différentielles assorti d'un ensemble de conditions de frontières (ou conditions aux limites) et d'un ensemble de conditions initiales pour les problèmes non-stationnaires. Ainsi, la MEF s'applique aussi bien pour des problèmes d'élasticité, que pour des problèmes de transfert de chaleur, d'électromagnétisme et d'écoulement de fluides (cette liste est loin d'être exhaustive).

Un problème physique modélisé mathématiquement de cette manière peut être résolu en utilisant des approches analytiques (méthodes de calcul manuelles par opposition aux méthodes de calcul numériques qui elles sont destinées à être implantées sur ordinateur) ou numériques. Les méthodes analytiques sont basées, la plupart du temps, sur des hypothèses simplificatrices qui ne permettent pas de simuler le comportement d'un système réel de manière précise. Dans ce type d'approche, on simplifie le problème pour pouvoir résoudre manuellement les équations. Par exemple, la théorie des poutres, qui est fondamentalement une simplification de la théorie de l'élasticité, permet de résoudre analytiquement des problèmes de résistance mécanique mais elle ne s'applique que dans le cadre d'hypothèses très restrictives. En effet, cette théorie (et toutes les formules de résistance des matériaux qui en découlent) ne peut donner des résultats précis que dans le cadre de l'application à des poutres, c'est-à-dire à des objets dont la section est petite par rapport à leur longueur. De manière générale, les approches de résolution analytiques se basent sur des hypothèses simplificatrices sur la géométrie des objets et domaines étudiés ainsi que sur le type de comportement considéré.

Les méthodes numériques (dont la MEF est un exemple) ont connu un développement très important ces dernières années, en grande partie grâce au développement des technologies informatiques. Ces méthodes restent des méthodes approchées de résolution des problèmes physiques rencontrés par l'ingénieur mais elles permettent de simuler et solutionner beaucoup plus précisément ces problèmes. Elles impliquent des calculs très lourds, impossibles à réaliser manuellement et le développement de l'outil informatique permet maintenant de retrouver ce type de technologie même sur plate-forme PC. La MEF fait partie de cet ensemble des méthodes numériques dont, par exemple, la méthode des volumes finis, des différences finies, des éléments de frontières ainsi que les méthodes sans maillage.

Contrairement aux méthodes analytiques mentionnées ci-dessus la MEF (et les méthodes numériques en général) est une méthode qui permet de résoudre les problèmes pouvant se formuler par des systèmes d'équations aux dérivées partielles assortis de conditions aux limites, dans un cadre général (c'est-à-dire sans recourir à des hypothèses simplificatrices au niveau de la forme des ouvrages calculés ou du comportement des matériaux impliqués).

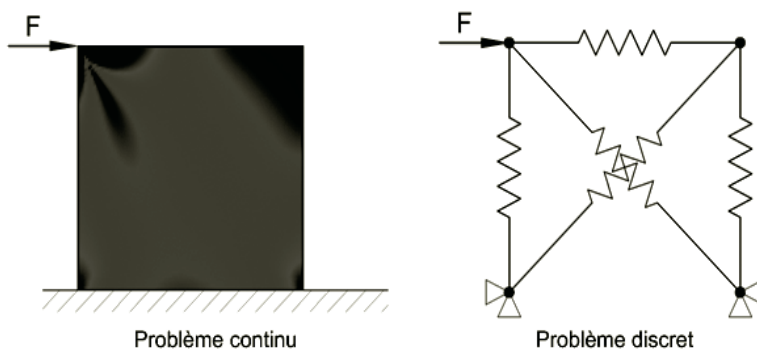


Figure 1.1 - Problème continu - problème discret.



Le principe fondamental de la MEF (voir Figure 1.1) est de transformer un problème continu (modélisé mathématiquement par un système d'équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites) en un problème discret qui est modélisé mathématiquement par un système d'équations linéaires. La solution d'un problème continu est un champ continu d'une grandeur physique (par exemple les déplacements en mécanique), alors que la solution d'un problème discret est un ensemble de valeurs prises par une grandeur physique (les déplacements aux extrémités des ressorts pour l'exemple choisi) en des points particuliers, appelés nœuds dans le cadre de la MEF.

En mécanique, la MEF permet (lorsqu'elle est utilisée de manière éclairée) de dimensionner ou de calculer la résistance mécanique des pièces, assemblages et structures de manière très précise.

1.2 LA PRATIQUE DE LA MEF

La MEF repose sur des bases théoriques complexes et utilise une mathématique de niveau assez élevé. En parallèle, au niveau pratique, la MEF est aujourd'hui bien implantée dans de nombreux logiciels commerciaux de CAO (Conception Assistée par Ordinateur) et les processus d'ingénierie modernes l'utilisent de manière intensive pour le calcul de toutes sortes d'ouvrages. L'intégration de la MEF au sein des processus d'ingénierie touche toutes les phases du cycle de développement de produits (ingénierie préliminaire, recherche de solutions, ingénierie détaillée, préparation à la fabrication, etc.). Cette intégration a notamment un impact très important sur le contexte d'utilisation du prototypage physique. D'autre part, les efforts importants de recherche dans le domaine de la CAO au cours des années 1990-2000 ont permis de mettre en œuvre des interfaces qui rendent, à première vue, l'utilisation de ce genre de technologie de plus en plus facile, y compris pour de non spécialistes. Sur ce sujet, on peut citer en particulier les progrès extrêmement importants réalisés, ces dernières années, dans le domaine du maillage automatique (découpage automatique de la géométrie CAO en éléments finis) et dans le domaine des estimateurs d'erreur (procédures qui permettent d'estimer l'ordre de grandeur de l'erreur d'un calcul par EF par rapport à la solution exacte). Grâce à ces progrès, on peut maintenant mener certains calculs par EF à partir d'un modèle 3D CAO en quelques minutes alors que la même opération aurait pris plusieurs jours il y a quelques années.

1.3 LES DANGERS ET DIFFICULTÉS DE LA PRATIQUE DE LA MEF

Ces apparences sont néanmoins trompeuses car la méthode repose, tel que mentionné ci-dessus, sur des bases théoriques complexes qu'il faut bien maîtriser afin de mener des calculs de manière éclairée et ainsi obtenir des résultats de calcul réalistes. D'ailleurs, l'utilisation de plus en plus fréquente de ce genre de technologies par des personnels non spécialistes ou inadéquatement formés commence à être

une source d'inquiétude très sérieuse, compte tenu des enjeux de sécurité sous-jacents. De manière générale, utiliser un logiciel quelconque pour résoudre un problème d'ingénierie sans en comprendre le fonctionnement est très dangereux et le présent ouvrage vise principalement l'acquisition de connaissances de base, permettant une utilisation éclairée de logiciels de calcul par EF pour résoudre des problèmes pratiques de dimensionnement et de calcul de résistance mécanique de pièces, assemblages et structures.

D'autre part, l'évolution très rapide de la technologie fait en sorte que les analystes et ingénieurs eux-mêmes se trouvent face à un grand nombre d'outils de calcul dont ils doivent apprendre à se servir de manière efficace, afin de faire les bons choix en fonction des types de problèmes qu'ils ont à résoudre de manière pratique.

1.4 L'ENSEIGNEMENT DE LA PRATIQUE DE LA MEF

Historiquement, la MEF a longtemps été enseignée exclusivement aux études de cycles supérieurs, compte tenu du fait qu'elle repose sur des bases mathématiques assez complexes, mais également compte tenu du fait qu'elle était considérée comme une technologie de pointe, associée à des industries de pointe. Au fil du temps, les progrès des systèmes informatiques et les progrès de la recherche ont entraîné un phénomène de démocratisation des technologies de CAO/FAO en général et de l'utilisation pratique de la MEF en particulier. Ce phénomène a des effets très importants sur l'évolution de la pratique professionnelle en génie mécanique. Aujourd'hui, compte tenu de l'utilisation de plus en plus répandue de ce type de technologie dans de nombreux domaines industriels, il est nécessaire de former des ingénieurs qui soient capables d'utiliser efficacement les outils commerciaux de calcul par EF. Les défis pédagogiques rencontrés dans l'enseignement de ce cours au premier cycle en génie mécanique sont nombreux et certains programmes d'études en ingénierie n'introduisent ce cours qu'au niveau des cycles supérieurs ou comme cours optionnel au premier cycle, ce qui est une faiblesse compte tenu de l'évolution de la pratique professionnelle.

Ainsi, dans le contexte historique mentionné précédemment, la littérature sur la MEF est très abondante mais s'adresse généralement à un public de chercheurs ou d'étudiants de cycles supérieurs intéressés à développer des connaissances pointues dans ce domaine. Par conséquent, la littérature existante est très axée sur le volet théorique de la méthode et n'a pas spécifiquement comme objectif l'utilisation pratique d'outils logiciels dans le contexte du travail d'un ingénieur. Le présent ouvrage est un ouvrage d'introduction qui est spécifiquement destiné à une clientèle d'ingénieurs et d'étudiants en génie mécanique au niveau du premier cycle. Les bases théoriques de la méthode sont abordées dans le but précis de l'utilisation efficace des logiciels et de l'exploitation éclairée des résultats.

En effet, pour mener de bons calculs par EF en résistance mécanique, il est d'abord nécessaire d'avoir une bonne compréhension des phénomènes en jeu dans le fonctionnement en service d'une pièce, ce qui demande de solides connaissances en mécanique théorique (statique, dynamique, élasticité, etc.). Il faut ensuite une connaissance de base de la MEF, afin de l'utiliser adéquatement pour obtenir des résultats précis et réalistes par rapport au fonctionnement réel des pièces et assem-