MATHS APPLIQUÉES INFORMATIQUE

ECG-1

Christophe FISZKA
Adrien SIRIEYS

- Le cours détaillé
- Plus de 500 exercices avec indications et solutions
- Les méthodes et pièges à éviter
- Le cours et travaux pratiques en Python

ellipses

MATHS APPLIQUÉES INFORMATIQUE

ECG-1

Christophe FISZKA
Professeur agrégé en ECG, lycée Saint-Louis (Paris VI^{e})

Adrien SIRIEYS
Professeur agrégé en CPGE, lycée Lavoisier (Paris V^{e})

ellipses

Du même auteur, chez le même éditeur

Retrouvez les titres du même auteur et des extraits sur www.editions-ellipses.fr



Remerciements

Ce livre est issu d'un cours de mathématiques EC1 donné au lycée Jacques Decour entre 2016 et 2022. Je remercie mes étudiants pour leurs questions et leurs remarques qui m'ont permis d'améliorer la qualité de cet ouvrage. Je tiens à remercier aussi mes collègues et amis qui, à travers nos discussions, leurs conseils, leurs idées, ont contribué à l'élaboration de ce livre (Florian Metzger, Hugues Zuber, Jean-François Husson, Samuel Baumard, Hélène et Virgile Robbe, Alexis Gryson, Xan Duhalde et bien d'autres). Je remercie également Camille Chanaud, Ilham El Hafidi, Alexandra Susbielle, Mathilde Durandeau pour leurs relectures précieuses de la précédente édition.
Merci à Adrien de m'avoir accompagné dans ce projet avec sa bonne humeur, à ma compagne Sarah d'être toujours présente à mes côtés et à notre petit Raphaël qui nous comble de bonheur.
Enfin, merci aux éditions Ellipses et à Corinne Baud pour leurs conseils et leur soutien.

Christophe Fiszka

Un grand merci à mes parents qui m'ont appris à être curieux, à mes élèves qui rendent chaque jour d'enseignement original et surtout à Christophe qui de Zhuhai à Paris m'a montré que les mathématiques pouvaient être amusantes.

Adrien Sirieys

ISBN 9782340-073173
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

L'ouvrage est spécialement conçu pour les étudiants de première année de classes préparatoires ECG, option mathématiques appliquées. Il permet d'aborder tout le programme de mathématiques et d'informatique et d'acquérir les bases nécessaires pour les concours.

Par la grande variété d'exercices et par le soin apporté aux illustrations, cet ouvrage convient à tous les étudiants quel que soit leur niveau.

Chaque chapitre se compose :

• D'un cours détaillé avec les définitions, théorèmes et preuves. Rappelons qu'il ne faut pas négliger la lecture des preuves. Faire des mathématiques consiste à produire des démonstrations. De plus, la bonne connaissance des démonstrations est source de méthode pour la résolution des exercices.
Le cours est complété par :

- des exercices d'application directe,
- des points méthodes,
- des rappels des pièges à éviter,
- des éléments de culture scientifique, littéraire ou économique.

• D'exercices d'approfondissement afin de mettre en pratique les différentes notions du chapitre et faire le lien avec les chapitres précédents.
Les niveaux de difficulté sont repérés par les symboles ✧, ✦, ✦✦, ✦✦✦.

• Certains chapitres sont complétés par des travaux pratiques en informatique.
Même s'il est conseillé de télécharger PYTHON, la majorité des exercices ne nécessite pas l'utilisation d'un ordinateur.
Dans le cas contraire, la question est repérée par le pictogramme .

• Le chapitre se conclut par les indications, les solutions des exercices d'application, des exercices d'approfondissement et des travaux pratiques en informatique.

Bonne lecture !

Sommaire

PREMIER SEMESTRE

Chapitres

1. Calculs 9
2. Logique et raisonnements 27
3. Ensembles et coefficients binomiaux 47
4. Applications 79
5. Sommes et produits 105
6. Fonctions usuelles et représentation 125
7. Compléments sur les polynômes 155
8. Systèmes linéaires 175
9. Matrices 189
10. Introduction à la théorie des graphes 217
11. Exemples de suites récurrentes 239
12. Étude des suites 259
13. Limites de fonctions 295
14. Étude des fonctions, continuité 313
15. Statistiques univariées 337
16. Probabilités sur un univers fini 353
17. Probabilités conditionnelles, indépendances 373

SECOND SEMESTRE

Chapitres

18. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ 393
19. Applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ 421
20. Dérivation 443
21. Dérivées successives et convexité 469
22. Introduction aux équations différentielles 485
23. Intégration sur un segment 501
24. Séries numériques 531
25. Généralités sur les espaces probabilisés 543
26. Variables aléatoires, le cas discret 561
27. Lois usuelles discrètes 587

Informatique

28. Introduction à Python 609

Partie 1

PREMIER SEMESTRE

CHAPITRE 1

Calculs

La mathématique est une science dangereuse : elle dévoile les supercheries et les erreurs de calculs.
GALILÉE (1564-1642)

Five out of four people have trouble with fractions.
STEVEN WRIGHT acteur américain

La maîtrise du calcul est une condition nécessaire à la bonne réussite en mathématiques. Ce chapitre propose une succession d'exercices autour du calcul algébrique (résolution d'équations, d'inéquations ...), du calcul avec les fonctions usuelles (racine carrée, logarithme, exponentielle) puis autour du calcul de dérivée. À ce titre, il peut être traité avant le début des cours de première année.

1 Calculs algébriques

1.1 Simplifier, factoriser et développer

Dans la suite, une expression algébrique est une expression de la forme :

$$x^2+2x, \qquad x^3+(2x+4)(x^2+x^4)+\frac{x+1}{x^2+5}, \qquad xy+y^3\ldots$$

où les quantités x, y sont des nombres réels. Pour étudier de telles expressions, on utilisera principalement les **identités remarquables** suivantes (valables pour tous réels a, b) :

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2. \qquad a^2-b^2 = (a-b)(a+b).$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2.$$

Rappelons aussi la somme géométrique. Pour un réel q différent de 1 et $n \in \mathbb{N}$,

$$1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Exercice 1. ✦ Sans calculatrice, simplifier :

$$a = \frac{64 \times 7}{2^3 \times 14}. \qquad b = \frac{2+\frac{2}{3}}{\frac{2}{9}}. \qquad c = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}}.$$

$$d = \frac{(10^3)^4}{10^{10}} \times 5^{-3} \times (5^5 - 5^3). \qquad e = \frac{\frac{1}{5} - \left(\frac{1}{8} \times \frac{6}{5}\right)}{\frac{1}{5} - \frac{2^5}{2^7 \times \left(\frac{9}{6} - \frac{1}{2}\right)}}. \qquad f = 101^2 - 99^2.$$

$$g = 10001^2 + 9999^2. \qquad h = \frac{-1}{(-1)^n} - \frac{(-1)^{3n+1} \times (-1)^n}{(-1)^{5n+3}}. \qquad i = \frac{\left(x^3 \cdot x^1\right)^5}{\left(x \cdot x^{-2}\right)^4} \quad (x \in \mathbb{R}^*).$$

Exercice 2. ✦ Soient x et y deux réels.

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$a(x) = \frac{3x}{3x-1} - \frac{2x}{2x+1}, \qquad b(x) = \frac{x - 1 + \frac{1}{x+1}}{x^2}, \qquad c(x) = \frac{\frac{x-4/x}{2}}{\frac{1-2/x}{2}}.$$

2. Développer et réduire :

$$d(x) = 2\left(\frac{x}{2} - \frac{5}{6}\right)\left(x - \frac{1}{15}\right), \qquad e(x) = (x+1)(x+2)(x-1)(x-2),$$

et $$f(x,y) = (x-3y)(x+3y)(x^2+9y^2)(x^4+81y^4).$$

Exercice 3. Soient x et y deux réels. Factoriser les expressions suivantes :

✧ $A(x) = x^2 - 81$, $B(x) = (2x+1)^2 - (4x+1)^2$,

$C(x) = (5+x)^2 - 36x^2$, $D(x) = 4x^2 - 9$,

✦ $E(x) = 9x^2 + 30x + 25$, $F(x) = (2x-3)(x+1) - (2x-3)(2x+3)$,

$G(x) = (x^2 - 16) + (x-4)(5x+7)$, $H(x) = (4x-3)(x+2) - 20x + 15$,

✦✦ $I(x) = (4x+8)(x-2) + (4-2x)x + (x+2)(6-3x)$, $J(x) = x^3 - x^2 - x + 1$,

$K(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 6x^2 + x - 3$, $L(x,y) = 9x^2y^4 - 3x^4y^2 - 6x^3y^2 + 18xy^4$.

Exercice 4. ✦✦✦ Sachant que $x + 1/x = 5$, calculer $x^2 + \frac{1}{x^2}$ et $x^3 + \frac{1}{x^3}$. ⋙ Aide

1.2 Équations, inéquations inégalités

Dans de nombreux cas, on est amené à résoudre des équations $f(x) = 0$ ou des inéquations $f(x) \geqslant 0$ avec $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction. C'est-à-dire à déterminer tous les réels $x \in I$ pour lesquels les énoncés $f(x) = 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ sont vrais.

Équations

Exercice 5. ✦ Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{E}_1 : \quad (2x+7)^2-(x-5)^2=0, \qquad \mathrm{E}_2 : \quad \frac{2x^2+1}{3+x}=2x, \qquad \mathrm{E}_3 : \quad \frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{5}{(x-1)(x+1)},$$

$$\mathrm{E}_4 : \quad x^4+4=4x^2, \qquad \text{✦✦} \quad \mathrm{E}_5 : \quad (x^4-x^3+4x-1)^2=(x^4+x^3-4x-1)^2.$$

Exercice 6. ✦✦ **Résolution d'une équation de degré 3**
Soient a, b, c, et d quatre réels tels que $ad=bc$ avec $a\neq 0$. On pose $\mathrm{P}(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

1. Vérifier que pour tout réel x, $\mathrm{P}(x)=a\big(x^2+\frac{c}{a}\big)\big(x+\frac{b}{a}\big)$.
2. Résoudre l'équation $x\in\mathbb{R}$, $2x^3+6x^2-8x-24=0$.

Inéquations

Exercice 7. ✧ Donner le tableau de signe de l'expression $f(x)=\frac{3x-1}{(x+2)(x+1)^2}$.
Résoudre ensuite $f(x)>0$ et $f(x)\leqslant 0$.

Exercice 8. ✦ Résoudre les inéquations d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:

$$\mathrm{I}_1 : \quad 5x+7\leqslant 5-x, \qquad \mathrm{I}_2 : \quad (x+8)(3-2x)\leqslant 0, \qquad \mathrm{I}_3 : \quad \frac{2x+1}{x-1}<0,$$

$$\mathrm{I}_4 : \quad \frac{3x}{x^2-6x+9}\geqslant 0, \qquad \mathrm{I}_5 : \quad 2x^2\leqslant 18, \qquad \mathrm{I}_6 : \quad (x-1)(x^2+9)<6(x-1)x,$$

$$\mathrm{I}_7 : \quad \frac{3x}{x^2+x+1}<1.$$

Exercice 9. ✦✦✦ **Inéquation avec un paramètre** ⋙ Aide
Résoudre en fonction du paramètre $\alpha\in\mathbb{R}$, l'inéquation I_α : $\big(\alpha^2-1\big)x<\alpha+1$.

Inégalités

Exercice 10. ✦ Prouver les énoncés suivants. ⋙ Aide

1. Pour tout réel $x>1$, $\frac{2x-3}{x-1}<2$.
2. Pour tout réel $x>0$, $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$.
3. Soient $x\in]1;+\infty[$ et $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{x^n-1}{x-1}\leqslant nx^{n-1}$.
4. Soient x, $y\in]-1;1[$, $-1<\frac{x+y}{1+xy}<1$.

Exercice 11. ✦✦✦ Soient x, y et z, trois réels positifs tels que $x^2+y^2\leqslant z^2$.

1. Montrer que pour tout entier $n\geqslant 2$, $x^n+y^n\leqslant z^n$.
2. Est-ce vrai ... ⋙ Aide
   (a) si $n=1$?
   (b) si x, y et z sont des réels éventuellement négatifs ?

2 Racine carrée, exponentielle et logarithme

2.1 Racine carrée

Exercice 12. ✦ Simplifier les expressions suivantes : ⋙ Aide

$$a=\sqrt{\frac{(-5)^2\cdot 49}{2^6}},\quad b=\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2-\sqrt{2}},\quad c=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1},$$

$$d=\frac{\sqrt{125}-\sqrt{20}-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1},\quad e=\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}\quad\text{et}\quad f=\sqrt{x^2+6x+9}\quad (x\in\mathbb{R}^+).$$

Exercice 13. ✦ Exprimer sous la forme x^y le nombre $\sqrt{2}\sqrt{4}\sqrt{8}\sqrt{16}\sqrt{32}\sqrt{64}\sqrt{128}$.

Exercice 14. ✦✦ Justifier que pour tous réels x, y, $\sqrt{x+y}\leqslant\sqrt{x}+\sqrt{y}$.
À quelle condition sur x et y, a-t-on égalité ?

Rappel. Soient $f, g : \mathrm{I}\to\mathbb{R}$ deux fonctions. Le réel $x\in\mathrm{I}$ est solution de l'inéquation $\sqrt{f(x)}\geqslant g(x)$ si et seulement si $f(x)\geqslant 0$ et $f(x)\geqslant g(x)^2$.

Exercice 15. ✦✦ **Inéquations avec des racines carrées**
Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x\in\mathbb{R}$,

$$\mathrm{I}_1:\quad \sqrt{x}\geqslant x\qquad \mathrm{I}_2:\quad \sqrt{2x-1}\geqslant 1\quad\text{et}\quad \mathrm{I}_3:\quad \sqrt{2x-1}\geqslant x.$$

Exercice 16. ✦✦ **Équations avec des racines carrées**
Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x\in\mathbb{R}$,

$$\mathrm{E}_1:\quad \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=2\qquad \mathrm{E}_2:\quad \sqrt{6x-9}=x\quad\text{et}\quad \mathrm{E}_3:\quad x=2\sqrt{x}+3.$$

Exercice 17. ✦✦✦ **Inégalité arithmético-géométrique**

1. Prouver que pour tous réels positifs a et b, $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$. ⋙ Aide
2. Soient a, b, c et d quatre réels positifs.
   En appliquant la relation précédente à $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{cd}$. Prouver que $\sqrt[4]{abcd}\leqslant\frac{a+b+c+d}{4}$.
   Remarque. Pour un réel x positif, on pose $\sqrt[4]{x}=\sqrt{\sqrt{x}}$.
3. *Applications*
   (a) Justifier que pour tous réels x, y et z strictement positifs $x+y+z+\dfrac{1}{xyz}\geqslant 4$. ⋙ Aide
   (b) i. On se donne un rectangle de périmètre p. Justifier que l'aire est inférieure à $p^2/16$.
   ii. Pour quel type de rectangle a-t-on égalité ?

2.2 Logarithme et exponentielle

PROPOSITION — **Règles de calculs**

Pour tous réels a et b strictement positifs, tout entier n,

$$\ln(1) = 0, \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b), \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad \textit{et} \quad \ln(a^n) = n\ln(a).$$

Exercice 18.

1. ✧ Exprimer avec $\ln(2)$ les nombres :

$$a = \ln(8), \quad b = \ln(52), \quad c = \ln(0,125), \quad d = \ln(72) - 2\ln(3).$$

2. ✦ Simplifier :

$$\mathrm{A} = \ln\left(\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\right), \quad \mathrm{B} = \ln\left(2+\sqrt{3}\right) + \ln\left(2-\sqrt{3}\right), \quad \mathrm{C} = \ln\left(\sqrt{10}-3\right) - \ln\left(1/(\sqrt{10}+3)\right),$$

$$\text{et} \quad \mathrm{D} = \ln\left(\sqrt{1+\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\sqrt{\sqrt{3}-1}\right).$$

PROPOSITION — **Règles de calculs**

Pour tous réels a et b, tout entier n, $\exp(0) = 1, \quad \exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)},$

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b), \quad \exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)} \quad \textit{et} \quad \exp(na) = \exp(a)^n.$$

De plus, pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_*^+$, $\ln\left(\exp(x)\right) = x \quad \textit{et} \quad \exp\left(\ln(y)\right) = y.$

Rappels.
- Si on note $\mathrm{e} = \exp(1)$, alors pour tout réel x, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.
- Les fonctions exponentielle et logarithme définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_*^+$ sont croissantes.

Exercice 19. ✦✦ Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right) - \ln\left(\mathrm{e}^{-x} + 1\right) = x \quad \text{et} \quad \ln\left(\mathrm{e}^x + 3x\right) - \ln\left(1 + 3x\mathrm{e}^{-x}\right) = x.$$

Exercice 20. ✦✦✦ Résoudre l'inéquation puis l'équation :

$$\mathrm{I}: \quad \ln(x^2 - 2x) < \ln(3) \quad \text{puis} \quad \mathrm{E}: \quad \ln(3-x) + \ln(3+x) = \ln(1+x^2).$$

3 Dérivation

3.1 Les dérivées usuelles

Fonction	Ensemble de définition	Ensemble de dérivation	Expression de la dérivée
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$x \mapsto 1/x$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-1/x^2$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_*^*$	$1/(2\sqrt{x})$
exp	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
ln	$\mathbb{R}_*^+$	$\mathbb{R}_*^+$	$1/x$

3.2 Règles de calculs

PROPOSITION **Linéarité, produit et quotient**

Soient $u, v : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivables sur I *et $\lambda \in \mathbb{R}$.*
- *Les fonctions λu et $u+v$ sont dérivables sur* I *avec $(\lambda u)' = \lambda u'$ et $(u+v)' = u' + v'$.*
- *La fonction produit $u \cdot v$ est dérivable sur* I *avec $\big(u \cdot v\big)' = u'v + uv'$.*
- *Si de plus v ne s'annule pas sur* I*, la fonction u/v est dérivable sur* I *avec $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.*

Exercice 21. ✦ Préciser l'ensemble de dérivation et calculer la fonction dérivée.

$$f_1 : x \mapsto (x^2+1)\ln(x), \quad f_2 : x \mapsto \frac{x^3+2x^2}{2\mathrm{e}^x}, \quad f_3 : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{4x^2+1}, \quad f_4 : x \mapsto \frac{x}{1-\ln(x)}.$$

Exercice 22. ✦ Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_*^+$, on pose $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.

1. Déterminer deux réels a, b tel que $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$. ⋙ Aide
2. En déduire la dérivabilité sur $\mathbb{R}_*^+$ et le calcul de f' et $f'' = (f')'$.

Anticipons sur le théorème de dérivation d'une fonction composée qui sera prouvé au second semestre.

THÉORÈME **Composition**

Soient $u : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ *et* $v : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ *où* I *et* J *sont deux intervalles de* $\mathbb{R}$.

Si | → u *est dérivable sur* I.
→ v *est dérivable sur* J.

Alors *la fonction* $f : x \in \mathrm{I} \mapsto v\big(u(x)\big)$ *est dérivable en* I *avec pour tout réel* $x \in \mathrm{I}$

$$f'(x) = u'(x) \times v'\big(u(x)\big).$$

Exemples. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, une fonction dérivable sur I. Pour deux réels a, b, on pose $\mathrm{I}_{a,b}$, l'ensemble des réels x pour lesquels $ax+b$ est dans I.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la composée $u^n : x \in \mathrm{I} \mapsto \big(u(x)\big)^n$ est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- La composée $\mathrm{e}^u : x \in \mathrm{I} \mapsto \exp\big(u(x)\big)$ est dérivable sur I et $(\mathrm{e}^u)' = u' \cdot \mathrm{e}^u$.
- La composée $u_{a,b} : x \in \mathrm{I}_{a,b} \mapsto u(ax+b)$ est dérivable sur $\mathrm{I}_{a,b}$ et $(u_{a,b})'(x) = au'(ax+b)$.
- Si de plus, u ne s'annule pas sur I, $1/u : x \in \mathrm{I} \mapsto 1/u(x)$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.
- Si de plus, u est strictement positive sur I, $\ln(u) : x \in \mathrm{I} \mapsto \ln\big(u(x)\big)$ est dérivable sur I, $\big(\ln(u)\big)' = \frac{u'}{u}$.
- Si de plus, u est strictement positive, $\sqrt{u} : x \in \mathrm{I} \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et $\big(\sqrt{u}\big)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Méthode

Comment rédiger la dérivation d'une composée ?

Exemple. Étudions la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$. On pose

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & 1+x^2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad v : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sqrt{t}. \end{array} \right.$$

de sorte que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = v\big(u(x)\big)$.

→ u est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[1;+\infty[$ en tant que fonction polynomiale. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.

→ v est dérivable sur $[1;+\infty[\subset \mathbb{R}_*^+$. Pour tout $x \geqslant 1$, $v'(x) = 1/(2\sqrt{x})$.

Par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = u'(x) \times v'\big(u(x)\big) = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Exercice 23. ✦✦ Préciser l'ensemble de dérivation et calculer la fonction dérivée.

$$f_1 : x \mapsto (2x+1)^4, \quad f_2 : x \mapsto (x^2+1)^3, \quad f_3 : x \mapsto \ln(x)^2,$$

$$f_4 : x \mapsto \mathrm{e}^{3x^3}, \quad f_5 : x \mapsto \ln\big(\ln(x)\big), \quad f_6 : x \mapsto \sqrt{\ln(x)}.$$

3.3 Applications

Lorsque la fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est dérivable (I est un *intervalle*), il existe un bon critère pour étudier les variations de la fonction : le signe de la dérivée.

PROPOSITION — **Dérivabilité et croissance**

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction avec I *un intervalle. Alors*

f *est croissante sur* I *si et seulement si* $f'(x) \geqslant 0$ *pour tout* $x \in \mathrm{I}$.

f *est décroissante sur* I *si et seulement si* $f'(x) \leqslant 0$ *pour tout* $x \in \mathrm{I}$.

De plus, f *est constante sur* I *si et seulement si* $f'(x) = 0$ *pour tout* $x \in \mathrm{I}$.

Exercice 24. ✦ Que pensez-vous de la rédaction suivante ?
La fonction $f(x) = 1/x$ est définie pour $x \neq 0$. De plus, on a $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \leqslant 0$.
La dérivée est négative, d'après le théorème précédent, la fonction $1/x$ est décroissante.

Exercice 25. ✧ Donner le tableau de variations des fonctions suivantes :

$$f : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto x\ln(x), \quad g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad h : x \in \mathbb{R} \mapsto x\mathrm{e}^{-x}.$$

Méthode

Établir une inégalité via une étude de fonctions

Justifions que pour tout réel x

$$\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x.$$

Cette inégalité est équivalente à $\mathrm{e}^x - (1 + x) \geqslant 0$. On introduit alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - (1 + x).$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec pour tout réel x

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

Or, $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 0$. f est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.
On a donc un minimum atteint en 0.
Pour tout réel x, $f(x) \geqslant f(0)$. Comme $f(0) = 0$, on en déduit que la fonction f est positive et l'inégalité est prouvée.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$



Indications et solutions



Indication de l'exercice 4 — p. 10

Calculer de deux manières différentes :

$$\left(x+\tfrac{1}{x}\right)^2 \quad \text{et} \quad \left(x^2+\tfrac{1}{x^2}\right)\left(x+\tfrac{1}{x}\right).$$

Indication de l'exercice 9 — p. 11

Distinguer 4 cas :

$$\alpha=-1,\ \alpha=1,\ \alpha\in\,]-1;1[,\ \alpha\notin\,]-1;1[.$$

Indication de l'exercice 10 — p. 11

3. Reconnaître une somme géométrique de raison x.

Indication de l'exercice 11 — p. 11

2. Justifier que les deux énoncés sont faux en donnant un contre-exemple.

Indication de l'exercice 12 — p. 12

Pour c, réduire au même dénominateur.
Pour d : $\sqrt{125}=\sqrt{25\cdot 5}$ et $\sqrt{20}=\sqrt{4\times 5}$. De plus

$$\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\cdots$$

Vérifier que $e^2=2$.
Reconnaître une identité remarquable pour f.

Indication de l'exercice 17 — p. 12

1. Partir de $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$.
3.(a) Appliquer l'inégalité avec $a=x$, $b=y$, $c=z$ et $d=1/(xyz)$.

Indication de l'exercice 22 — p. 14

1. Réduire au même dénominateur et identifier les numérateurs.

Exercice 1 — p. 10

On trouve

$$\boxed{a=4,\ b=12,\ c=\frac{13}{6},\ d=2400,\ e=-1.}$$

À l'aide d'une identité remarquable

$$\begin{aligned} f=101^2-99^2 &= (101-99)(101+99)\\ &= 2\cdot 200 = \boxed{400.}\end{aligned}$$

et posons $\alpha=10000=10^4$, $\beta=1$

$$\begin{aligned} & 10001^2+9999^2\\ =\ & (\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2\\ =\ & \left(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\right)+\left(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\right)\\ =\ & 2\alpha^2+2\beta^2 = 2\cdot 10^8+2\\ g\ =\ & \boxed{200000002.}\end{aligned}$$

Rappelons que, pour $N\in\mathbb{N}$,

$$(-1)^N=\begin{cases}1 & \text{si N est pair,}\\ -1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{(-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{(-1)^{2n}}=(-1)^n,\\ \frac{(-1)^{3n+1}\times(-1)^n}{(-1)^{5n+3}} &= (-1)^{(3n+1)+n-(5n+3)}\\ &= (-1)^{-n-2}=(-1)^n\end{aligned}$$

Finalement $\quad h=-(-1)^n+(-1)^n=\boxed{0.}$

On a $\quad i=\dfrac{(x^4)^5}{(x^{-1})^4}=\dfrac{x^{20}}{x^{-4}}=x^{20+4}=\boxed{x^{24}.}$.

Exercice 2 — p. 10

1. On trouve

$$\boxed{\begin{aligned} a(x) &= \frac{5x}{(3x-1)(2x+1)}.\\ b(x) &= \frac{1}{1+x}.\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} c(x) &= \frac{x-4/x}{1-2/x}=\frac{(x^2-4)/x}{(x-2)/x}\\ &= \frac{x^2-4}{x-2}=\boxed{x+2.}\end{aligned}$$

2. $\boxed{d(x) = x^2 - \frac{26}{15}x + \frac{1}{9}.}$

$$\begin{aligned} e(x) &= (x^2-1)(x^2-4) \\ &= \boxed{x^4 - 5x^2 + 4.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x^2-9y^2)(x^2+9y^2)(x^4+81y^4) \\ &= (x^4-81y^4)(x^4+81y^4) \\ &= \boxed{x^8 - 6561y^8.} \end{aligned}$$

Exercice 3 p. 10

$$\begin{aligned} A(x) &= (x-9)(x+9), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= \big((2x+1)-(4x+1)\big)\big((2x+1)+(4x+1)\big) \\ &= -2x(6x+2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x) &= (5+x)-(6x)^2 \\ &= \big((5+x)-6x\big)\big((5+x)+6x\big) \\ &= 5(1-x)(5+7x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(x) &= (2x)^2 - 3^2 \\ &= (2x-3)(2x+3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(x) &= (3x)^2 + 2\times 5\times(3x) + 5^2 \\ &= (3x+5)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= (2x-3)\big((x+1)-(2x+3)\big) \\ &= -(2x-3)(x+2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(x) &= (x-4)(x+4)-(x-4)(5x+7) \\ &= (x-4)\big((x+4)-(5x+7)\big) \\ &= -(x-4)(4x+3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(x) &= (4x-3)(x+2)-5(4x-3) \\ &= (4x-3)\big((x+2)-5\big) \\ &= (4x-3)(x-3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(x) &= (4x+8)(x-2)-2(x-2)x-3(x+2)(x-2) \\ &= (x-2)\Big((4x+8)-2x-3(x+2)\Big) \\ &= (x-2)(2-x) \\ &= -(x-2)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(x) &= x^2(x-1)-(x-1) \\ &= (x-1)(x^2-1) \\ &= (x-1)(x-1)(x+1) \\ &= (x-1)^2(x+1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(x) &= x^4(x-3)-2x^2(x-3)+(x-3) \\ &= (x^4-2x^2+1)(x-3) \\ &= (x^2-1)^2(x-3) \\ &= (x-1)^2(x+1)^2(x-3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(x,y) &= -3xy^2(-3xy^2+x^3+2x^2-6y^2) \\ &= -3xy^2\big(x^2(x+2)-3y^2(x+2)\big) \\ &= -3xy^2(x+2)(x^2-3y^2) \\ &= -3xy^2(x+2)(x-\sqrt{3}y)(x+\sqrt{3}y). \end{aligned}$$

Exercice 4 p. 10

• D'une part $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 5^2 = 25,$

d'autre part

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2.$$

Ainsi $\boxed{x^2 + \frac{1}{x^2} = 23.}$

• Puis $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right) = 23\times 5$

et

$$\begin{aligned} &\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= x^3 + x^2\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\cdot x + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x} \\ &= x^3 + \frac{1}{x^3} + x + \frac{1}{x} \\ &= x^3 + \frac{1}{x^3} + 5. \end{aligned}$$

En conclusion $\boxed{x^3 + \frac{1}{x^3} = 22\times 5 = 110.}$

Exercice 5 p. 11

E_1. Raisonnons par équivalences

$$\begin{aligned} &(2x+7)^2 - (x-5)^2 = 0 \\ \iff &\big((2x+7)-(x-5)\big)\big((2x+7)+(x-5)\big) = 0 \\ \iff &(x+12)(3x+2) = 0. \end{aligned}$$

Un produit est nul si l'un au moins de ses facteurs est nul, donc

$$x+12 = 0 \quad \text{ou} \quad 3x+2 = 0.$$

Il y a donc deux solutions

E_1 : $\boxed{x = -12, \quad x = -2/3.}$

E$_2$. Précisons que la valeur -3 est interdite. Raisonnons par équivalences

$$\begin{aligned} & \frac{2x^2+1}{3+x} = 2x \\ \iff \quad & 2x^2+1 = 2x(3+x) \quad \text{car } x \neq -3 \\ \iff \quad & 2x^2+1 = 6x+2x^2 \\ \iff \quad & 1 = 6x. \end{aligned}$$

Il y a une unique solution :

E$_2$: $\boxed{x = 1/6.}$

E$_3$. -1 et 1 sont les deux valeurs interdites. En réduisant au même dénominateur, on prouve

$$\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1} = \frac{5x-1}{(x-1)(x+1)}.$$

Ainsi $$\frac{5x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{(x-1)(x+1)}$$

$$\iff 5x-1 = 5 \quad \text{et} \quad x \neq \pm 1.$$

Il y a une unique solution :

E$_3$: $\boxed{x = 6/5.}$

E$_4$. On reconnaît une identité remarquable :

$$x^4+4 = 4x^2 \iff (x^2)^2 - 2\cdot(2x^2) + 2^2 = 0$$

$$\iff \left(x^2-2\right)^2 = 0 \iff x^2-2 = 0.$$

Finalement, il y a deux solutions :

E$_4$: $\boxed{\pm\sqrt{2}.}$

E$_5$. x est solution si et seulement si

$$(x^4+x^3-4x-1)^2 - (x^4-x^3+4x-1)^2 = 0 \iff$$

$$\begin{aligned} & \Big((x^4+x^3-4x-1)+(x^4-x^3+4x-1)\Big) \\ & \times\Big((x^4+x^3-4x-1)-(x^4-x^3+4x-1)\Big) = 0 \\ & \iff (2x^4-2)(2x^3-8x) = 0 \\ & \iff (x^4-1)(x^3-4x) = 0. \end{aligned}$$

Or

$$(x^4-1) = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x-1)(x+1)$$

et $$x^3-4x = x(x^2-4) = x(x-2)(x+2).$$

Sachant que pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 > 0$, on a cinq solutions :

E$_5$: $\boxed{0,\ 1,\ -1,\ 2 \text{ et } -2.}$

Exercice 6 p. 11

1. On développe

$$a\left(x^2+\frac{c}{a}\right)\left(x+\frac{b}{a}\right) = a\left(x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{c}{a}\cdot\frac{b}{a}\right)$$

$$= ax^3+bx^2+cx+\frac{cb}{a}.$$

Or, la condition $ad = bc$ donne $\frac{cb}{a} = d$ puis,

$$\boxed{a\left(x^2+\frac{c}{a}\right)\left(x+\frac{b}{a}\right) = \mathrm{P}(x).}$$

2. On est dans les conditions de la question 1 car $2\times 24 = 6\times 8$, donc

$$\begin{aligned} 2x^3+6x^2-8x-24 &= 2\left(x^2+\frac{-8}{2}\right)\left(x+\frac{6}{2}\right) \\ &= 2\left(x^2-4\right)(x+3) \\ &= 2(x-2)(x+2)(x+3). \end{aligned}$$

Il y a donc 3 solutions : $\boxed{-2,\ 2,\ 3.}$

Exercice 7 p. 11

x	$-\infty$	-2	-1	$1/3$	$+\infty$
$3x-1$		$-$		0	$+$
$x+2$	$-$	0		$+$	
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-\ 0\ +$

- On lit

$$f(x) > 0 \iff x \in]-\infty;-2[\cup]1/3;+\infty[.$$

$$f(x) \leqslant 0 \iff x \in]-2;-1[\cup]-1;1/3].$$

Exercice 8 p. 11

I$_1$. On a

$$5x+7 \leqslant 5-x \iff x \leqslant -\frac{1}{3}.$$

L'ensemble des solutions est :

I$_1$: $\boxed{\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right]}$

I$_2$. Le tableau de signe :

x	$-\infty$	-8	$3/2$	$+\infty$
$x+8$	$-$	0	$+$	
$3-2x$		$+$	0	$-$
$(x+8)(3-2x)$	$-$	0 $+$	0	$-$

On lit l'ensemble des solutions :

I_2 : $\boxed{]-\infty;-8] \cup \left[\frac{3}{2};+\infty\right[.}$

I_3. Le tableau de signe avec une valeur interdite.

x	$-\infty$	$-1/2$	1	$+\infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0 $+$	
$\frac{2x+1}{x-1}$	$+$	0 $-$	$\|\|$	$+$

On lit l'ensemble des solutions :

I_3 : $\boxed{\left]-\frac{1}{2};1\right[.}$

I_4. Notons que

$$x^2-6x+9=(x-3)^2 \geqslant 0.$$

En excluant la valeur interdite 3, on obtient

I_4 : $\boxed{[0;3[\cup]3;+\infty[.}$

I_5. $2x^2 \leqslant 18$ est equivalent à $x^2 \leqslant 3^2$. On trouve

$$\boxed{x \in [-3;3].}$$

I_6. Distinguons trois cas.

→ $x=1$ n'est pas solution.

→ Si $x>1$ alors $x-1>0$. On peut donc diviser chaque membre de l'inégalité sans modifier l'ordre.

$$(x-1)(x^2+9)<6(x-1)x \iff x^2+9<6x$$
$$\iff x^2-6x+9<0 \iff (x-3)^2<0.$$

Comme un carré de réel est toujours positif, il n'y a pas de solution strictement supérieure à 1.

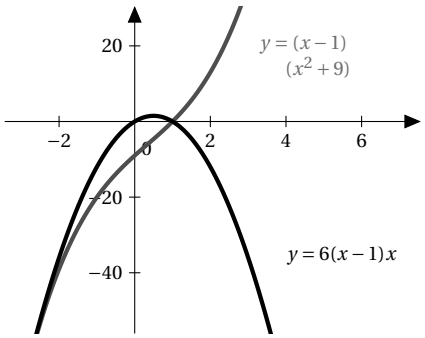
→ Si $x<1$, $x-1<0$ et

$$(x-1)(x^2+9)<6(x-1)x \iff (x^2+9)>6x$$
$$\iff x^2-6x+9>0 \iff (x-3)^2>0.$$

Cette inéquation est toujours vraie pour $x>1$.

I_6 : $\boxed{\text{Tout réel } x<1 \text{ est solution.}}$

Remarque. Illustrons graphiquement cette inégalité. La courbe d'équation $y=(x-1)(x^2+9)$ est strictement en dessous de celle d'équation $y=6(x-1)x$ sur l'intervalle $]-\infty;1[$.



I_7. On a

$$x^2+x+1=(x+1/2)^2+3/4>0.$$

On peut multiplier par x^2+x+1 sans modifier le sens des inégalités.

$$3x<x^2+x+1 \iff 0<x^2-2x+1=(x-1)^2.$$

I_7 : $\boxed{\text{Tout réel } x \neq 1 \text{ est solution.}}$

Exercice 9 p. 11

Précisons que $\alpha^2-1=(\alpha-1)(\alpha+1)$. On distingue 4 cas suivant le signe de cette expression.

→ Si $\alpha=-1$, l'équation devient I_{-1} : $0\cdot x<0$.
Il n'y a aucune solution.

→ Si $\alpha=1$, l'équation devient I_1 : $0\cdot x<2$.
Tous les réels x sont solutions.

→ Si $\alpha \in]-1;1[$, alors α^2-1 est strictement positif et en divisant par α^2-1, on obtient

$$x<\frac{\alpha+1}{\alpha^2-1}=\frac{1}{\alpha-1}.$$

Ainsi l'ensemble des solutions est

$$\left]-\infty;\frac{1}{\alpha-1}\right[.$$

→ Si $\alpha \notin]-1;1[$, alors α^2-1 est strictement négatif et en divisant par α^2-1, on obtient

$$x>\frac{\alpha+1}{\alpha^2-1}=\frac{1}{\alpha-1}.$$

Ainsi l'ensemble des solutions est :

$$\left]\frac{1}{\alpha-1};+\infty\right[.$$

Exercice 10 p. 11

1. Soit $x\in]1;+\infty[$.

$$\frac{2x-3}{x-1}-2=\frac{(2x-3)-2(x-1)}{x-1}=\frac{-1}{x-1}.$$

Comme $x-1>0$, on obtient

$$\frac{2x-3}{x-1}-2<0 \quad \text{puis} \quad \boxed{\frac{2x-3}{x-1}<2.}$$

2. Soit $x\in\mathbb{R}_*^+$.

$$x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2+1-2x}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}.$$

Comme $(x-1)^2\geqslant 0$, il vient

$$x+\frac{1}{x}-2\geqslant 0. \quad \text{puis} \quad \boxed{x+\frac{1}{x}\geqslant 2.}$$

3. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in]1;+\infty[$. On reconnaît une somme géométrique de raison $x\neq 1$, donc

$$\frac{1-x^n}{1-x}=1+x+\cdots+x^k+\cdots+x^{n-1}.$$

Soit $k\in[\![0;n-1]\!]$. Comme $x\geqslant 1$, on a $x^k<x^{n-1}$. Par somme

$$1+x+\cdots+x^k+\cdots+x^{n-1}$$
$$\leqslant \underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}}_{n \text{ termes}}=nx^{n-1}.$$

Finalement $\boxed{\dfrac{1-x^n}{1-x}\leqslant nx^{n-1}.}$

4. Soient $x,\,y\in]-1;1[$. Notons que $1+xy>0$, le quotient est bien défini. Vérifier que

$$\frac{x+y}{1+xy}+1=\frac{(1+x)(1+y)}{1+xy}>0.$$

Ainsi $\dfrac{x+y}{1+xy}>-1.$

De même, on montre que

$$\frac{x+y}{1+xy}-1=-\frac{(1-x)(1-y)}{1+xy}<0.$$

Et $\dfrac{x+y}{1+xy}<1.$

En conclusion, on obtient bien

$$\boxed{-1<\frac{x+y}{1+xy}<1.}$$

Exercice 11 p. 11

1. Notons que $x^2\leqslant z^2$ et $y^2\leqslant z^2$. Comme x, y et z sont positifs, $x\leqslant z$ et $y\leqslant z$. Puis, pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$x^k=\underbrace{x\cdot x\cdot x}_{k \text{ facteurs}}\leqslant\underbrace{z\cdot z\cdot z}_{k \text{ facteurs}}=z^k. \quad (\star)$$

car chaque facteur est positif. De même, $y^k\leqslant z^k$.
Autrement dit, la fonction $t\mapsto t^k$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$. On obtient

$$\begin{array}{rcl} x^n+y^n & = & x^2\cdot x^{n-2}+y^2\cdot y^{n-2}\\ & \leqslant & x^2\cdot z^{n-2}+y^2\cdot z^{n-2}\\ & \leqslant & (x^2+y^2)\cdot z^{n-2}\\ x^n+y^n & \leqslant & z^2\cdot z^{n-2}=z^n. \end{array}$$

2.(a) Faux.
Donnons un contre-exemple

$$3^2+4^2=25\leqslant 5^2 \quad \text{mais} \quad 3+4\not\leqslant 5.$$

2.(b) Faux.

$$3^2+4^2=25\leqslant(-5)^2 \quad \text{mais} \quad \underbrace{3^3+4^3}_{\geqslant 0}\not\leqslant\underbrace{(-5)^3}_{<0}.$$

Remarque. Dans la preuve de la question 1, c'est la relation $(\star)$ qui n'est plus valable pour k impair.

Exercice 12 p. 12

- $a=\sqrt{\dfrac{5^2\times 7^2}{2^6}}=\dfrac{5\times 7}{2^3}=\boxed{\dfrac{35}{8}.}$

- $b = \sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2} = \boxed{\sqrt{2}.}$

- Pour c, réduisons au même dénominateur

$$\begin{aligned} c &= \frac{(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \\ &= \frac{2}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \boxed{2.} \end{aligned}$$

- De plus

$$\begin{aligned} d &= \frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{5}-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} \\ d &= \boxed{\frac{5+\sqrt{5}}{4}.} \end{aligned}$$

- À l'aide des identités remarquables

$$\begin{aligned} e^2 &= 4-\sqrt{7}+4+\sqrt{7}-2\sqrt{(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})} \\ &= 8-2\sqrt{4^2-\sqrt{7}^2} = 8-2\sqrt{9} = 2. \end{aligned}$$

Comme e est négatif, $\boxed{e=-\sqrt{2}.}$

- Comme $x+3 \geqslant 0$

$$f = \sqrt{(x+3)^2} = \boxed{x+3.}$$

Exercice 13 p. 12

$$\begin{aligned} &\sqrt{2}\sqrt{4}\sqrt{8}\sqrt{16}\sqrt{32}\sqrt{64}\sqrt{128} \\ &= \sqrt{2\cdot 4\cdot 8\cdot 16\cdot 32\cdot 64\cdot 128} \\ &= \sqrt{2^1\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot 2^4\cdot 2^5\cdot 2^6\cdot 2^7} \\ &= \sqrt{2^{28}} = \left(2^{28}\right)^{1/2} = 2^{28\times 1/2} = \boxed{2^{14}.} \end{aligned}$$

Exercice 14 p. 12

Soient x et y deux réels positifs. Comme les quantités sont toutes positives

$$\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{y} \iff (\sqrt{x+y})^2 \leqslant \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2.$$

C'est-à-dire $x+y \leqslant \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2$.

Or

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 &= (\sqrt{x})^2+2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2 \\ &\leqslant x+y+2\sqrt{xy}. \end{aligned}$$

Comme $\sqrt{xy} \geqslant 0$, on a bien

$$x+y \leqslant \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2.$$

Ce qui prouve l'inégalité demandée.

Précisons qu'il y a égalité si et seulement si $\sqrt{xy}=0$. Il y a donc égalité si et seulement si

$$\boxed{x=0 \text{ ou } y=0.}$$

Exercice 15 p. 12

I_1. Précisons que x est nécessairement positif pour pouvoir définir $\sqrt{x}$.
Soit $x \in \mathbb{R}^+$. De plus, la différence des deux membres de l'inégalité donne

$$\sqrt{x}-x = \sqrt{x}-\sqrt{x}\cdot\sqrt{x} = \underbrace{\sqrt{x}}_{\geqslant 0}(1-\sqrt{x}).$$

Ainsi, $\sqrt{x} \geqslant x$ est vérifiée si et seulement si $1-\sqrt{x} \geqslant 0$, c'est-à-dire $1 \geqslant \sqrt{x}$, puis $x \leqslant 1$. L'ensemble des solutions de I_1 est

$$\boxed{[0;1].}$$

I_2. $\sqrt{2x-1}$ a un sens si et seulement si $x \geqslant 1/2$.
Plaçons nous dans ce cas. Soit $x \in [1/2;+\infty[$. Par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$,

$$\sqrt{2x-1} \geqslant 1 \iff 2x-1 \geqslant 1^2 = 1 \iff x \geqslant 1.$$

En particulier, $x \geqslant 1/2$. Finalement, l'ensemble des solutions est

$$\boxed{[1;+\infty[.}$$

I_3. $\sqrt{2x-1}$ a un sens si et seulement si $x \geqslant 1/2$. Soit $x \in [1/2;+\infty[$.

$$\begin{aligned} & \sqrt{2x-1} \geqslant x \quad \iff \quad 2x-1 \geqslant x^2 \\ \iff \quad & 0 \geqslant x^2-2x+1 \quad \iff \quad 0 \geqslant (x-1)^2 \\ \iff \quad & 0 = (x-1)^2. \end{aligned}$$

Car un carré réel est toujours positif. Il y a une unique solution $\boxed{x=1.}$

Exercice 16 p. 12

E_1. L'expression $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ a un sens si et seulement si $\frac{x+1}{x-1}$ est positif.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$
$\frac{x+1}{x-1}$	$+$	0 $-$	‖	$+$

Soit $x \in]-\infty;-1] \cup]1;+\infty[$.

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 2 \iff \frac{x+1}{x-1} = 2^2 = 4$$
$$\iff x+1 = 4(x-1)$$
$$\iff \boxed{x = \frac{5}{3}.}$$

E$_2$. $\sqrt{6x-9}$ n'a de sens que pour $x \geqslant 3/2$. Dans ce cas

$$\sqrt{6x-9} = x \iff 6x-9 = x^2$$
$$\iff x^2-6x+9 = 0 \iff (x-3)^2 = 0$$
$$\iff \boxed{x = 3.}$$

Précisons qu'on a bien $3 \geqslant 3/2$.

E$_3$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

$$x = 2\sqrt{x}+3 \iff x-3 = 2\sqrt{x}$$
$$\iff (x-3)^2 = 4x \quad \text{et} \quad x-3 \geqslant 0$$
$$\iff x^2-6x+9 = 4x \quad \text{et} \quad x \geqslant 3$$
$$\iff x^2-10x+9 = 0 \quad \text{et} \quad x \geqslant 3$$
$$\iff (x-1)(x-9) = 0 \quad \text{et} \quad x \geqslant 3.$$

Seule $\boxed{x = 9}$ est solution.

Exercice 17 p. 12

1. Soient a et b deux réels positifs. Comme un carré est toujours positif,

$$0 \leqslant (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a+b-2\sqrt{ab}$$

donc $$\boxed{\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.}$$

2. Comme indiqué, appliquons successivement la relation précédente.

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \leqslant \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}$$
$$\leqslant \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \leqslant \frac{a+b+c+d}{4}.$$

3.(a) En substituant dans l'équation précédente :

$$a \leftarrow x, \quad b \leftarrow y, \quad c \leftarrow z \quad \text{et} \quad d \leftarrow 1/(xyz)$$

avec a, b, c et d strictement positifs, on trouve

$$1 = \sqrt[4]{x \cdot y \cdot z \cdot 1/(xyz)} \leqslant \frac{x+y+z+1/(xyz)}{4}.$$

D'où $$\boxed{x+y+z+\frac{1}{xyz} \geqslant 4.}$$

3.(b)i. Considérons un rectangle de longueur a et de largeur b. Le périmètre vaut $p = 2(a+b)$ et l'aire $S = ab$. D'après ce qui précède

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}, \quad \text{c-à-d,} \quad \sqrt{S} \leqslant \frac{p}{4}.$$

Par croissance de la fonction carrée

$$\boxed{S \leqslant \frac{p^2}{16}.}$$

3.(b)ii. En reprenant la preuve de la question 1, il y a égalité

$$\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$$

si et seulement si $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = 0$. C'est-à-dire $\sqrt{a}-\sqrt{b} = 0$, $a = b$. En conclusion, il a égalité si et seulement si le rectangle est

$$\boxed{\text{Un carré.}}$$

Remarque. On vient de montrer qu'à périmètre fixé, la surface maximale d'un rectangle est obtenue pour la forme la plus régulière : le carré.
Plus généralement, on montre que le disque est, à périmètre fixé, la figure ayant la plus grande aire. Un

exemple célèbre d'utilisation est le mythe de Didon, fondatrice de Carthage.

Exercice 18 p. 13

1.

$$\begin{aligned}\ln(8) &= \ln(2^3) = 3\ln(2).\\ \ln(32) &= \ln(2^5) = 5\ln(2).\\ \ln(0,125) &= \ln(1/8) = -\ln(8) = -3\ln(2).\\ \ln(72) &= \ln(9\times 8) = \ln(3^2\times 2^3)\\ &= 3\ln(2)+2\ln(3).\end{aligned}$$

D'où $\ln(72) - 2\ln(3) = 3\ln(2)$.

2. • On a

$$\ln(e\sqrt{e}) = \ln(e^{3/2}) = 3/2\ln(e)$$

d'où $\boxed{A = 3/2.}$

• De plus

$$\begin{aligned}B &= \ln\left((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\right)\\ &= \ln\left(2^2-\sqrt{3}^2\right) = \ln(1) = \boxed{0.}\end{aligned}$$

• Le calcul est similaire pour C en remarquant que

$$C = \ln\left(\sqrt{10}-3\right)+\ln(\sqrt{10}+3).$$

On trouve $\boxed{C = 0.}$

• Et

$$\begin{aligned}D &= \ln\left(\sqrt{1+\sqrt{3}}\right)+\ln\left(\sqrt{\sqrt{3}-1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{3}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{3}-1\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left((1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)\right) = \boxed{\frac{1}{2}\ln(2).}\end{aligned}$$

Exercice 19 p. 13

• Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}&\ln\left(e^x+1\right)-\ln\left(e^{-x}+1\right)\\ =\ &\ln\left(e^x+1\right)-\ln\left(e^{-x}(1+e^x)\right)\\ =\ &\cancel{\ln\left(e^x+1\right)}-\ln\left(e^{-x}\right)-\cancel{\ln\left(1+e^x\right)} = -(-x) = x.\end{aligned}$$

• Soit $x\in\mathbb{R}$. On a de même

$$\begin{aligned}&\ln\left(e^x+3x\right)-\ln\left(1+3xe^{-x}\right)\\ &= \ln\left(e^x+3x\right)-\ln\left(e^{-x}(e^x+3x)\right)\\ &= \ln\left(e^x+3x\right)-\ln\left(e^{-x}\right)-\ln\left(e^x+3x\right) = x.\end{aligned}$$

Exercice 20 p. 13

• Précisons que l'expression $\ln(x^2-2x)$ n'a de sens que si $x^2-2x>0$. Or

$$x^2-2x = x(x-2).$$

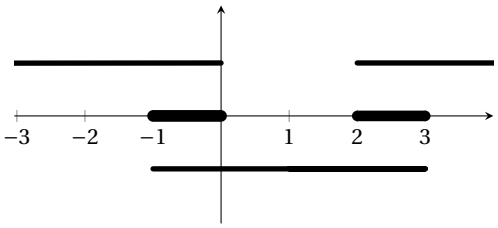
Il faut donc que $x\in\,]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$.

Comme la fonction logarithme est strictement croissante

$$\begin{aligned}&\ln(x^2-2x) < \ln(3)\\ \iff\ &x^2-2<3\\ \iff\ &x^2-2x-3<0\\ \iff\ &(x+1)(x-3)<0.\end{aligned}$$

On trouve $x\in\,]-1;3[$. Avec la contrainte $x\in\,]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$, l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\,]-1;0[\cup]2;3[\,}$$



• Précisons que l'expression $\ln(3-x)+\ln(3+x)$ n'a de sens que si $x\in\,]-3;3[$.
De plus, $\ln(1+x^2)$ est défini pour tout réel x.

$$\begin{aligned}&\ln(3-x)+\ln(3+x) = \ln(1+x^2)\\ \iff\ &\ln\left((3-x)(3+x)\right) = \ln(1+x^2)\\ \iff\ &(3-x)(3+x) = 1+x^2 \quad \left(\begin{smallmatrix}\ln\text{ strictement}\\ \text{croissante}\end{smallmatrix}\right)\\ \iff\ &9-x^2 = 1+x^2\\ \iff\ &4 = x^2.\end{aligned}$$

On a bien deux solutions dans $]-3;3[$:

$$\boxed{-2 \quad \text{et} \quad 2.}$$

Exercice 21 p. 14

• La fonction $u : x\in\mathbb{R}\mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale avec

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad u'(x) = 2x.$$

La fonction $v : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \ln(x)$ est la fonction logarithme, dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ avec

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_*^+, \quad v'(x) = \frac{1}{x}.$$

Par produit, f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$. Pour $x \in \mathbb{R}_*^+$

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= u(x)v'(x) + u'(x)v(x) \\ &= \boxed{\frac{x^2+1}{x} + 2x \cdot \ln(x).} \end{aligned}$$

• Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$

$$f_2(x) = \left(\frac{x^3}{2} + x^2\right) \mathrm{e}^{-x}.$$

$u : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3/2 + x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale avec

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u'(x) = 3/2\, x^2 + 2x.$$

Comme la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, $v : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}.$$

Par produit, f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= u(x)v'(x) + u'(x)v(x) \\ &= \left(\frac{3}{2}x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^{-x} - \left(\frac{x^3}{2} + x^2\right)\mathrm{e}^{-x} \\ &= \boxed{\left(-\frac{x^3}{2} + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^{-x}.} \end{aligned}$$

• Pour tout réel x, $4x^2 + 1 > 0$. f_3 est donc définie sur $\mathbb{R}$. De plus, f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynomiales). Pour $x \in \mathbb{R}$

$$f_3'(x) = \frac{2(x+1)\cdot(4x^2+1) - (x+1)^2 \cdot (8x+1)}{(4x^2+1)^2}.$$

Après simplifications

$$\boxed{f_3'(x) = -\frac{8x^2 + 6x - 2}{(4x^2+1)^2}.}$$

• Posons

$$u : x \in \mathbb{R} \mapsto x \quad \text{et} \quad v : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto 1 - \ln(x).$$

u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout réel x, $u'(x) = 1$. v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ avec $v'(x) = -1/x$. Toutefois v s'annule uniquement en e. Par quotient, f_4 est définie sur $\mathbb{R}_*^+ \setminus \{\mathrm{e}\}$. Pour tout réel strictement positif $x \neq \mathrm{e}$

$$f_4'(x) = \frac{1 \cdot \big(1 - \ln(x)\big) - x \cdot (-1/x)}{\big(1 - \ln(x)\big)^2}.$$

Il vient $\boxed{f_4'(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{\big(1 - \ln(x)\big)^2}.}$

Exercice 22 p. 14

1. Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$.

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} = \frac{(a+b)x + a}{x(1+x)}.$$

Par identification, on choisit

$$a + b = 0 \quad \text{et} \quad a = 1.$$

C'est-à-dire $\boxed{a = 1, \quad b = -1.}$

2. En tant que somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$, f est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ avec

$$\boxed{f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1+x)^2}.}$$

De même, f' est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ avec

$$\boxed{f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{2}{(1+x)^3}.}$$

Exercice 23 p. 15

• La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f_1'(x) = 4 \times 2(2x+1)^3 = 8(2x+1)^3.$$

• La fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale. Pour $x \in \mathbb{R}$

$$f_2'(x) = 2x \times 3\left(x^2+1\right)^2 = 6x\left(x^2+1\right)^2.$$

• f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ par produit avec la fonction ln dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$. Pour $x \in \mathbb{R}_*^+$

$$f_3'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) = \frac{2\ln(x)}{x}.$$

• $x \in \mathbb{R} \mapsto 3x^3 \in \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. exp est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition, f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour $x \in \mathbb{R}$

$$f_4'(x) = 3 \times 3x^2 \exp'\left(3x^3\right) = 9x^2 \mathrm{e}^{3x^3}.$$

• ln est dérivable sur $]1;+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$. ln est aussi dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$. Donc f_5 est dérivable sur $]1;\infty[$ avec pour tout réel $x \geqslant 1$

$$f_5'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(x)}.$$

• ln est dérivable sur $]1;+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$. La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$. Donc f_6 est dérivable sur $]1;\infty[$ avec pour tout réel $x \geqslant 1$

$$f_6'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}.$$

Exercice 24 p. 16

Plusieurs maladresses :
→ Il faut écrire « La fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto 1/x$ » et f est décroissante » au lieu de « La fonction $f(x) = 1/x$ » et « $1/x$ est décroissante ». En effet, $1/x$ et $f(x)$ ne sont pas des fonctions mais des nombres. Dans le même esprit, on ne peut pas écrire « $\left(\frac{1}{x}\right)'$ » mais « $f'(x)$ ».
→ De plus, il y a une mauvaise application du théorème, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle. La conclusion est même fausse, f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

$$-2 \leqslant 2, \quad \text{mais} \quad f(-2) \not\geqslant f(2).$$

Il faut appliquer le théorème sur $\mathbb{R}_*^+$ et $\mathbb{R}_*^-$. Dans ce cas, f est décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$ et sur $\mathbb{R}_*^-$.

Exercice 25 p. 16

• La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ par produit. Pour $x \in \mathbb{R}_*^+$, $f'(x) = \ln(x) + 1$. Étudions le signe de la dérivée.

$$f'(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant -1 \iff x \geqslant \mathrm{e}^{-1}.$$

x	0		$1/\mathrm{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-1/\mathrm{e}$	↗	$+\infty$

• La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) \geqslant 0.$$

La fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

• h est dérivable par produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$h'(x) = \mathrm{e}^{-x} + x\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

De plus, $h'(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0

CHAPITRE 2

Logique et raisonnements

C'est avec la logique que nous prouvons et avec l'intuition que nous trouvons.

HENRI POINCARÉ
Mathématicien, physicien français (1854-1912)

La démarche mathématique consiste à dire si un énoncé est vrai ou faux et d'en apporter la preuve. C'est pourquoi il est très important d'avoir une rédaction rigoureuse afin d'être compris par tous. Alors que la langue française est source d'ambiguïté, le langage mathématique, basé sur la logique, se veut très précis.

1 Éléments de logique

1.1 Énoncés et connecteurs logiques

DÉFINITION **Énoncé mathématique/Proposition/Assertion**

*Un **énoncé mathématique** (ou une **proposition**, une **assertion**), est une phrase, dont les mots ont un sens mathématique, qui est soit vraie, soit fausse.*

Exemples. On a les énoncés suivants : « $2+2=5$ » (faux), « les médiatrices d'un triangle sont concourantes » (vrai), « pour tout réel x, il existe un réel y tel que $x<y$ » (vrai). On dira que la valeur de vérité de ces énoncés est respectivement Faux, Vrai et Vrai.
Par contre, les phrases telles que « 888 est un nombre bleu », « 3 » ne sont pas des énoncés puisqu'ils n'ont pas de valeur de vérité.

Dans la suite, on dira que deux propositions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont **logiquement équivalentes** si elles ont même valeur de vérité.

DÉFINITION **Connecteur logique**

*Un **connecteur logique** est une opération sur les énoncés mathématiques qui à partir de deux énoncés donne un troisième.*

Il y a :

- La conjonction *et* : $\mathscr{P}$ ET $\mathscr{Q}$ est vrai si et seulement si les deux énoncés $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont vrais en même temps.
- La disjonction *ou* : $\mathscr{P}$ OU $\mathscr{Q}$ est faux si et seulement si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont faux en même temps. Autrement dit, *au moins un* des énoncés est vrai.
- L'implication *implique* : $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})$ est faux si et seulement si $\mathscr{P}$ est vrai et $\mathscr{Q}$ est faux.
- La double-implication *équivalent à* : $\mathscr{P} \iff \mathscr{Q}$ est vrai si et seulement si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ ont même valeur de verité.

Vocabulaire.

• Considérons l'implication $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$. On dit $\mathscr{P}$ est une **condition suffisante** de $\mathscr{Q}$ (il suffit que l'énoncé $\mathscr{P}$ soit vrai pour que $\mathscr{Q}$ le soit aussi), ou encore que $\mathscr{Q}$ est une **condition nécessaire** de $\mathscr{P}$ (si $\mathscr{P}$ est un énoncé vrai, alors $\mathscr{Q}$ est vrai, donc il est impossible que $\mathscr{P}$ soit vrai et que $\mathscr{Q}$ soit fausse. Dit autrement, si l'énoncé $\mathscr{P}$ est vrai, il est nécessaire que $\mathscr{Q}$ soit vrai).
Par exemple, soit x un nombre réel. Si $x \leqslant 2$, alors $x \leqslant 4$, l'énoncé « $x \leqslant 2$ » implique l'énoncé « $x \leqslant 4$ ».
→ Le fait que x soit inférieur à 2 est une condition suffisante pour que x soit inférieur à 4.
→ Le fait que x soit inférieur à 4 est une condition nécessaire au fait que x soit inférieur à 2.

• La langue française permet d'exprimer une conséquence de plusieurs manières :

Donc, alors, par conséquent, il vient, d'où, par suite, il suffit...

Varier donc vos connecteurs logiques dans votre rédaction.

Exercice 1



✦ Soit $x \in \mathbb{R}$. Placer entre les énoncés les symboles $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\iff$.

1. $x = 3 \quad \ldots \quad x^2 = 9$
2. $x^2 \leqslant 4 \quad \ldots \quad x \leqslant 2$
3. $\mathrm{e}^x = 1 \quad \ldots \quad x = 0$
4. $x(x+2) = x(2x+3) \quad \ldots \quad x = -1$
5. $x^2 \leqslant x \quad \ldots \quad x \leqslant 1$
6. $\ln(x^4) = 16 \quad \ldots \quad \ln(x) = 4.$

Remarques.

• Il faut bien noter que si l'énoncé $\mathscr{P}$ est faux, l'implication est toujours vraie. En effet, si l'hypothèse est fausse, on peut démontrer n'importe quoi.
« Si $2 + 2 = 5$, alors en retranchant par 3, $1 = 2$. Par suite, la reine d'Angleterre et moi qui sommes deux personnes ne faisons plus qu'un. Je suis donc la reine d'Angleterre. »

• En pratique, pour justifier une équivalence un peu complexe, on raisonne par **double implication** :

$$\mathscr{P} \iff \mathscr{Q} \quad \text{est logiquement équivalent à} \quad (\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}) \text{ ET } (\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}).$$

Exemple. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + a\,\mathrm{e}^{-x}$.
Raisonnons par double implication pour justifier que f est une fonction impaire si et seulement si $a = -1$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que f est une fonction impaire. Nécessairement $f(0) = 0$. Or

$$f(0) = \mathrm{e}^0 + a\mathrm{e}^0 = 1 + a, \quad \text{puis} \quad a = -1.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, supposons que $a = -1$. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \mathrm{e}^{-x} + (-1)\,\mathrm{e}^{-(-x)} = -\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right) = -f(x).$$

Ce calcul étant vrai pour tout réel x, f est une fonction impaire.

1.2 Négation

DÉFINITION — **Négation d'un énoncé**

Soit $\mathscr{P}$ un énoncé, il existe un énoncé, noté NON $\mathscr{P}$ *qui est la* ***négation*** *de $\mathscr{P}$ et dont la valeur de vérité est donnée par :*

- *Vraie quand $\mathscr{P}$ est faux.*
- *Fausse quand $\mathscr{P}$ est vraie.*

Remarques.

- NON (NON $\mathscr{P}$) est logiquement équivalent à $\mathscr{P}$.

- Nous utilisons deux principes : le principe du tiers exclu et le principe de non contradiction. Le premier affirme que pour tout énoncé $\mathscr{P}$, l'un des énoncés $\mathscr{P}$ ou NON $\mathscr{P}$ est vrai. Le principe de non contradiction affirme qu'ils ne peuvent être simultanément vrais.

  Par exemple, considérons l'énoncé « Mon chat est vivant ». Le premier principe affirme que mon chat est soit vivant, soit mort. Le second affirme que mon chat n'est pas un mort-vivant.

- Les lois de DE MORGAN indiquent comment prendre la négation d'une disjonction, ou la négation d'une conjonction. Commençons par des exemples simples :

  → La négation de « Papi Robert porte des mocassins *et* des bretelles » est « Papi Robert ne porte pas de mocassins *ou* Papi ne porte pas de bretelles ».

  → La négation de « Mamie Georgette écoute Kanye West *ou* Beyoncé » est « Mamie Georgette n'écoute *ni* Kanye West *ni* Beyoncé ».

  → Soit x un nombre réel. La négation de $x \in [0;2]$ (c'est-à-dire x est positif *et* x est inférieur ou égal à 2) est $x < 0$ *ou* $x > 2$.

On démontre la généralisation :

PROPOSITION — **Lois DE MORGAN**

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux énoncés.

$$\text{NON}(\mathscr{P} \text{ ET } \mathscr{Q}) \quad \textit{est logiquement équivalent à} \quad (\text{NON}\,\mathscr{P}) \text{ OU } (\text{NON}\,\mathscr{Q})$$

$$\textit{et} \quad \text{NON}(\mathscr{P} \text{ OU } \mathscr{Q}) \quad \textit{est logiquement équivalent à} \quad (\text{NON}\,\mathscr{P}) \text{ ET } (\text{NON}\,\mathscr{Q}).$$

Donnons maintenant des exemples de la négation d'une implication :

- La négation de « S'il pleut dehors alors je prends mon parapluie » est « il pleut dehors et (pourtant) je ne prends pas mon parapluie ».
- La négation de « Si c'est un homme alors il est raisonnable » est « C'est un homme qui n'est pas raisonnable ».
- Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et deux réels x, y.
  La négation de « $x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(y)$ » est « $x < y$ ET $f(x) \geqslant f(y)$ ».

Exercice 2



✧ Écrire la négation des énoncés suivants :

1. « S'il y a cours de maths demain, alors je relis mon cours. »
2. « Si on est mercredi, alors il y a des frites à la cantine ».
3. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et x un réel. « $x \neq 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq 0$. »

Remarque. On montre que la négation d'une implication $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ est logiquement équivalente à l'énoncé $\mathscr{P}$ ET (NON $\mathscr{Q}$).

1.3 Quantificateurs

On utilisera essentiellement les trois quantificateurs suivants :

- « Pour tout » est traduit par la notation mathématique $\forall$ (quantificateur universel).
- « Il existe » est traduit par la notation mathématique $\exists$ (quantificateur existentiel).
- « Il existe un unique » est traduit par la notation mathématique $\exists !$.

⚠ **Attention.** L'ordre des quantificateurs importent lorsqu'ils sont de nature différente. Par exemple :

- Les énoncés $\big(\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, x + 2y \geqslant 0\big)$ et $\big(\forall y \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^+, x + 2y \geqslant 0\big)$ sont équivalents (ils sont vrais tous les deux).
- Par contre, les énoncés $\big(\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}^+, x + 2y \geqslant 0\big)$ et $\big(\exists y \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}, x + 2y \geqslant 0\big)$ ne le sont pas. Le premier est vrai, le second est faux.

Exercice 3



✦✦ Écrire, à l'aide des quantificateurs $\forall$, $\exists$, les énoncés suivants :

1. Le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul.
2. n est un entier impair.
3. Pour tout entier n, $n(n+1)$ est un entier pair.
4. Pour tout nombre réel, il existe un entier naturel qui lui est supérieur.
5. Le polynôme $\mathrm{P} : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 + x^2$ n'a pas de racine réelle.

Exercice 4



✦✦ Soient u une suite réelle et x un réel.
Traduire en français courant et simplifier les énoncés suivants :

1. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \quad x < \varepsilon$.
2. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \quad |x - 1| \leqslant \varepsilon$.
3. $\exists c \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = c$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists \ell \in \mathbb{R}^+, \quad u_n = \ell$.

Précisons maintenant comment écrire la négation d'un énoncé avec des quantificateurs.

Exemples.
• Considérons l'énoncé « la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction nulle ». On peut aussi l'écrire

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0.$$

Sa négation est alors

$$\exists\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq 0.$$

• La négation de « Il existe un unique élément tel que ... » est « Il n'existe pas de tel élément ou il n'est pas unique ».

PROPOSITION **Négation des quantificateurs**

Soit $\mathscr{P}(x)$ un énoncé dépendant d'un élément x.
• *La négation de l'énoncé* $\big(\forall\, x, \mathscr{P}(x)\big)$ *est* $\big(\exists\, x,\ \text{NON}\,\mathscr{P}(x)\big)$,
• *La négation de l'énoncé* $\big(\exists\, x, \mathscr{P}(x)\big)$ *est* $\big(\forall\, x,\ \text{NON}\,\mathscr{P}(x)\big)$.

Exercice 5



✦✦ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs les énoncés suivants :

1. f est paire.
2. f est positive.
3. f est constante.
4. f est monotone.

En déduire la négation de ces énoncés.

⚠ **Attention.** L'usage des quantificateurs $\forall$, $\exists$ est réglementé. Si l'on emploie ces symboles, on termine le morceau de phrase qui s'y rapporte de manière symbolique également. Il est préférable d'éviter d'utiliser ces symboles comme de simples abréviations au milieu d'une phrase pour gagner du temps. De manière générale, il ne faut pas mélanger les différents modes de langage. On n'écrit pas :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad x^2 + 1 \text{ est positif.} \qquad \times\times\times$$

Mais : Pour tout réel x, $x^2 + 1$ est positif. ✓✓✓

Ou encore : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 1 \geqslant 0.$ ✓✓✓

2 Les raisonnements mathématiques

2.1 Le raisonnement direct

C'est le raisonnement le plus simple, on utilise seulement des implications. Il est basé sur le fait que pour deux énoncés $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$

$$\big(\mathscr{P} \text{ ET } (\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q})\big) \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{Q}.$$

Si l'énoncé $\mathscr{P}$ est vrai et l'implication $(\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q})$ est vraie alors $\mathscr{Q}$ est aussi vrai.

Exemples. On prouve

- À partir des règles de calculs sur les nombres : $\frac{2^4\times(11\times3)^3}{27\times121\times8}=22$.
- Comme un carré d'un réel est toujours positif, $0\leqslant(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ et

$$\forall\, a\in\mathbb{R},\quad \forall\, b\in\mathbb{R},\quad a^2+b^2\geqslant 2ab.$$

- Pour un entier naturel n, $1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

En effet, l'ordre de sommation n'importe pas

$$\begin{aligned} \mathrm{S} &= 1+2+3+\cdots+n-1+n\\ &= n+n-1+n-2+\cdots+2+1\\ \text{donc}\quad 2\mathrm{S} &= \underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)}_{n\,\text{fois}}=n(n+1). \end{aligned}$$

2.2 Le raisonnement par récurrence

Le raisonnement s'articule en quatre parties :

I. L'introduction où on énonce clairement l'hypothèse de récurrence (notée ici $\mathscr{P}(n)$).

II. L'initialisation où on vérifie l'hypothèse de récurrence au rang n_0.

III. L'hérédité où l'on prouve que la proposition $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie sous réserve que $\mathscr{P}(n)$ le soit pour un entier n quelconque supérieur à n_0.

IV. La conclusion où on énonce clairement que la propriété est bien démontrée pour tout entier $n\geqslant n_0$.

Toute rédaction doit comporter ces quatre points.

Récurrence à un pas

Exemples.

- On prouve par récurrence que pour entier naturel n

$$0^3+1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=0}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Rédigeons :

→ *Introduction.* Prouvons par récurrence que $\mathscr{P}(n):\sum_{k=0}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

→ *Initialisation.* Pour $n=0$, on a d'une part $\sum_{k=0}^{0}k^3=0^3$ et d'autre part $\frac{0^2(0+1)^2}{4}=0$. L'égalité est bien vérifiée et la proposition $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

→ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la proposition $\mathscr{P}(n)$ vraie, démontrons $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= (n+1)^2 \frac{n^2+4(n+1)}{4} = (n+1)^2 \frac{n^2+4n+4}{4} \\
\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4} && \text{car c'est une identité remarquable.}
\end{aligned}$$

On vient donc de prouver que la proposition $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie si $\mathscr{P}(n)$ l'est.

→ *Conclusion.* Pour tout entier naturel n, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

• ***Inégalité de Bernoulli***

Montrons que pour tout entier naturel n, tout réel x positif, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

→ *Introduction.* Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Procédons par récurrence sur la propriété :

$$\mathscr{P}(n) : (1+x)^n \geqslant 1+nx \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}.$$

→ *Initialisation.* On a $(1+x)^0 = 1 \geqslant 1+0\cdot x$. $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

→ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Comme $1+x \geqslant 1 > 0$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geqslant (1+nx)(1+x).$$

Or $$(1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x,$$

car $nx^2 \geqslant 0$. Puis $$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x.$$

Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie si $\mathscr{P}(n)$ l'est.

→ *Conclusion.* Pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Comme le résultat est valable pour tout réel positif x, on a bien

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad (1+x)^n \geqslant 1+nx.$$

Exercice 6



✦✦ Rédaction d'un raisonnement par récurrence

1. Considérons la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n/2 - 1$.
   Prouver l'énoncé : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 3\cdot 2^{-n} - 2$.
2. Justifier que pour tout entier $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.
   On pourra établir par le calcul que $2n^2 \geqslant (n+1)^2$ *pour* $n \geqslant 4$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $f(2x) = f(x)$.
   Justifier que pour tous $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f\left(x/2^n\right)$.

Récurrence à plusieurs pas, récurrence forte

Détaillons à présent deux variantes du raisonnement par récurrence.

Exemples.

• On définit la suite u

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n.$$

Justifions que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n$.

→ *Introduction.* Procédons par récurrence *à deux pas* sur la propriété :

$$n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{P}(n) : u_n \geqslant n.$$

→ *Initialisation.* Comme $u_0 = 0 \geqslant 0$ et $u_1 = 1 \geqslant 1$, $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.

→ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies et démontrons $\mathscr{P}(n+2)$.

$$\begin{array}{rcll} u_{n+2} & = & 2u_{n+1} + u_n & \text{définition de la suite } u \\ & \geqslant & 2(n+1) + n & \text{par hypothèse de récurrence} \\ & \geqslant & (n+2) + 2n & \\ u_{n+2} & \geqslant & n+2 & \text{car } 2n \geqslant 0. \end{array}$$

$\mathscr{P}(n+2)$ est donc vraie si $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ le sont.

→ *Conclusion.* Pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Exercice 7



✦✦ Que dire d'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$u_0 = u_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n \,?$$

⋙ Aide

• Considérons une suite u telle que

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} \leqslant u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n.$$

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2^n$.

→ *Introduction.* Prouvons que la propriété $\mathscr{P}(n)$: $u_n \leqslant 2^n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
→ *Initialisation.* $u_0 = 1 \leqslant 2^0$. $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
→ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}(1)$, …, $\mathscr{P}(n)$ vraies et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$.
En particulier, par somme

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_k + \cdots + u_n \leqslant 1 + 2 + \cdots + 2^k + \cdots + 2^n.$$

C'est-à-dire $\qquad u_{n+1} \leqslant 1 + 2 + \cdots + 2^k + \cdots + 2^n.$

Or, on reconnaît une somme géométrique de raison $2 \neq 1$

$$1 + 2 + \cdots + 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1 \leqslant 2^{n+1}, \quad \text{puis} \quad u_{n+1} \leqslant 2^{n+1}.$$

Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ et vraie si $\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}(1)$, …, $\mathscr{P}(n)$ le sont aussi.

→ *Conclusion.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2^n$.

Exercice 8



✦✦ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant ⋙ Aide

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left({u_0}^2 + {u_1}^2 + {u_2}^2 + \cdots + {u_n}^2\right).$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un entier naturel pair.

2.3 Le raisonnement par contraposée

Comme la cause implique la conséquence, l'absence de conséquence indique l'absence de cause. Traduisons en langage mathématique :

DÉFINITION - PROPOSITION **Contraposée**

La contraposée de l'implication $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})$ *est l'énoncé* $(\text{NON}\,\mathscr{Q} \Rightarrow \text{NON}\,\mathscr{P})$.
Ces deux énoncés sont logiquement équivalents.

Exemples.

• La contraposée de « Si une figure est un losange, alors elle a quatre cotés » est « Si une figure ne possède pas quatre cotés, alors ce n'est pas un losange ».

• Soit n un entier naturel. Prouvons par contraposée que « si n a son carré qui est impair, alors n est impair ».
Si n est pair, alors il existe un entier p tel que $n = 2p$. Par suite, $n^2 = 4p^2 = 2 \cdot (2p^2)$. Le carré est pair. Par contraposée, si n a son carré qui est impair, alors n est impair.

• Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Prouvons que $\left(\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \quad x \leqslant \varepsilon\right) \quad \Rightarrow \quad x = 0.$

La contraposée est : $x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \quad x > \varepsilon\right).$

Ce second énoncé est plus facile à vérifier. Si $x \neq 0$, on peut poser $\varepsilon = x/2 \in \mathbb{R}_*^+$ afin de vérifier l'implication.

Exercice 9



✦ **Rédaction d'une contraposée**
Soient a et b deux entiers.

1. Montrer que si $a + b$ est un entier pair, alors a, b sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs.
2. Montrer que si ab est un entier impair, alors a et b sont impairs.

2.4 Le raisonnement par l'absurde

Pour prouver qu'un énoncé $\mathscr{P}$ est vrai, on peut supposer que la négation de ce dernier est vraie et aboutir à une contradiction. Cela repose sur le principe de non-contradiction et du tiers-exclus.

Exemples.

• Prouvons qu'il est impossible de trouver deux entiers strictement positifs a et b tels $a^2 - b^2 = 1$.
Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe de tels nombres a et b. Précisons que $a > b$. Il vient

$$1 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Or $a+b$ et $a-b$ sont deux entiers strictement positifs, nécessairement

$$\begin{cases} a+b &= 1 & \text{L}_1 \\ a-b &= 1 & \text{L}_2 \end{cases}$$

En effectuant la différence et la somme des deux lignes, on trouve $a = 1$ et $b = 0$. C'est absurde, on a supposé que b est strictement positif.
En conclusion, il n'existe pas de tels nombres.

• Posons u la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2{u_n}^2 + 3.$$

Justifions que u ne converge pas vers une limite finie.
Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$. Puis

$$u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \text{et} \quad 2{u_n}^2 + 3 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\ell^2 + 3.$$

En reprenant la relation de récurrence, on trouve $\ell = 2\ell^2 - 3$. D'où $2\ell^2 - \ell + 3 = 0$. ℓ est solution d'une équation polynomiale de degré 2. Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times 2 = -23$. Le discriminant est strictement négatif, il n'y a pas de solution réelle. Absurde, la suite u ne converge pas vers une limite finie.

• ***L'énigme des chapeaux***

Une urne contient 3 chapeaux noirs et 2 blancs. Albert, Marie et Sophie tirent successivement un chapeau au hasard dans l'urne. Les chapeaux restants dans l'urne sont inconnus. Chaque personnage ne connaît pas la couleur de son chapeau mais peut voir la couleur des chapeaux des autres.
On se place dans le cas où chacun a tiré un chapeau noir.

→ Albert est le premier à parler et affirme qu'il ne peut conclure sur la couleur de son chapeau.

→ Marie affirme à son tour qu'elle ne peut pas non plus déterminer la couleur de son chapeau.

→ Sophie s'exclame alors : « J'ai un chapeau noir ! ».

Exercice 10



✦✦✦ ⋙ Aide

Sophie a raisonné par l'absurde, pouvez-vous expliquer son raisonnement ?

⚠ **Attention.** Un raisonnement par l'absurde n'est pas un raisonnement par contraposée. En effet, pour prouver $(\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q})$, on suppose, dans le raisonnement par l'absurde, que les énoncés $\mathscr{P}$ et NON $\mathscr{Q}$ sont vrais, alors que dans le raisonnement par contraposée, on suppose seulement NON $\mathscr{Q}$ vrai.

Exercice 11



✦ Soient x, y deux réels positifs tels que $x/(1+y) = y/(1+x)$.

1. Vérifier que $x^2 - y^2 = -(x-y)$.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que $x = y$.

2.5 Compléments

L'exemple ou le contre-exemple

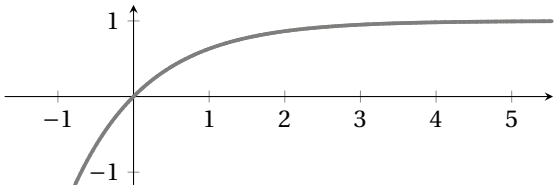
Dans certains cas très particuliers, pour prouver que l'énoncé est vrai, il suffit d'exhiber une solution. Pour prouver qu'un énoncé est faux, il suffit de trouver un contre-exemple.

- L'énoncé : « Il existe trois entiers x, y et z supérieurs à 2 tels que $x^2 + y^2 = z^2$ » est vrai.

Par exemple, $3^2 + 4^2 = 5^2$.

- Soit x un réel. L'implication $\left(x^2 = 4 \Rightarrow x = 2\right)$ est fausse. $x = -2$ est un contre-exemple.

- L'énoncé : « Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissante admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$ » est faux. En effet, la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-x}$ est bien strictement croissante mais la limite en $+\infty$ est 1.



Exercice 12



✦✦ Étudier la valeur de vérité des énoncés suivants :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 2x \geqslant 0$.
2. $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}^+, \quad \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
3. $\exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad |a| \leqslant \varepsilon$.
4. $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \exists \varepsilon > 0, \quad |a| \leqslant \varepsilon$.
5. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad \left(x + y + z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y = z = 0\right)$.

La disjonction des cas

> *Diviser chacune des difficultés [...] en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.*
>
> RENÉ DESCARTES

L'idée est d'introduire des sous-cas et de les vérifier séparément.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouvons que n a la même parité que n^2. En effet :

- Si n est pair, alors il existe un entier p tel que $n = 2p$. Par suite, $n^2 = (2p)^2 = 2(2p^2)$ est pair.
- Si n est impair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$ et $n^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$ est impair.

Exercice 13



✦ **Exemples**

1. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $|x - 2| + |x + 1| = 3$. ⋙ Aide
2. Justifier que parmi trois entiers, il existe toujours deux nombres parmi les trois dont la somme est paire.

L'outil informatique et la conjecture

Lorsque la question posée est ouverte, on peut utiliser un logiciel de calcul pour conjecturer le résultat, une formule etc. et ensuite le prouver.

Exemple. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$.
Voici un programme Python qui affiche les premières valeurs.

Editeur

```
s=0
n=5
for i in range(1,n+1):
    s=s+(2*i-1) # ou s+=2*i-1
    print(s)
```

Console

```
1
4
9
16
25
```

On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = n^2$.
Puis, on prouve la conjecture par récurrence sur la propriété : $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: $S_n = n^2$.

Exercice 14



✦✦ Soit u définie par $u_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n/(1+u_n)$.

1. En s'aidant du script ci-contre, conjecturer une formule explicite pour u_n.
2. Prouver la conjecture.

⋙ Aide

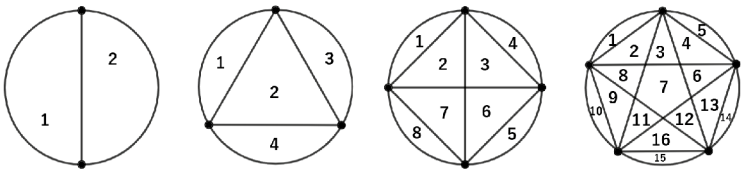
Editeur

```
u=1
print(u)
for i in range(1,6):
    u=u/(1+u)
    print(u)
```

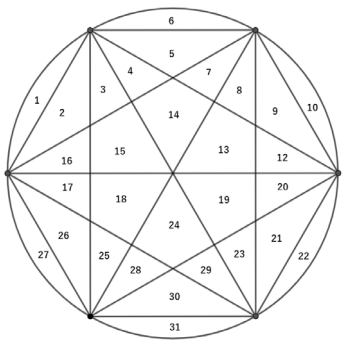
Console

```
1
0.5
0.3333333333333333
0.25
0.2
0.16666666666666669
```

Exemple. La partie manquante
Plaçons régulièrement n points sur un cercle. Relions les points et comptons le nombre de parties.



On obtient : 2, 4, 8, 16 ...
Ces premiers exemples suggèrent que le nombre de parties obtenues est 2^n. Mais pour $n = 6$, on trouve 31 au lieu de 32. La conjecture est invalidée.



⚠ **Attention.** Retenons de cet exemple qu'une conjecture ne fait pas une preuve. La vérification de quelques cas ne permet pas de prouver le cas général.



Exercices d'approfondissement



Exercice 15. ✦ Soient f_1, f_2 et f_3 trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Interpréter graphiquement les énoncés :

1. $\exists\, i \in \{1;2;3\},\ \exists\, a \in \mathbb{R},\ f_i(a) = 1$;
2. $\exists\, a \in \mathbb{R},\ \forall\, i \in \{1;2;3\},\ f_i(a) = 1$;
3. $\exists\, i \in \{1;2;3\},\ \forall\, a \in \mathbb{R},\ f_i(a) = 1$;
4. $\forall\, i \in \{1;2;3\},\ \exists\, a \in \mathbb{R},\ f_i(a) = 1$.

Exercice 16. ✦ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{F}_n = 2^{2^n} + 1$.

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{F}_{n+1} = (\mathrm{F}_n - 1)^2 + 1$, puis $\mathrm{F}_{n+1} - 2 = \mathrm{F}_n(\mathrm{F}_n - 2)$.
2. En déduire que $\mathrm{F}_{n+1} = \mathrm{F}_0 \times \mathrm{F}_1 \times \cdots \times \mathrm{F}_n + 2$.

Exercice 17. ✦ Montrer qu'il n'existe pas trois réels a, b et c tels que : ⋙ Aide

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \exp(x) = ax^2 + bx + c.$$

Exercice 18. ✦✦

1. Justifier que pour tout $x \in [0;2]$, $0 \leqslant x(2-x) \leqslant 1$.
2. Soient $a, b, c \in [0;2]$. Justifier que l'un de ces trois nombres est inférieur à 1 : ⋙ Aide

$$a(2-b), \qquad b(2-c) \quad \text{et} \quad c(2-a).$$

Exercice 19. ✦✦ Soit u la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = (n+1)(u_n + u_{n+1})$.
Prouver que $u_n = n!$ où l'on note $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. ⋙ Aide

Exercice 20. ✦✦ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 3$ et ⋙ Aide

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n).$$

Calculer les premiers termes de la suite et conjecturer une formule simple. Prouver la conjecture.

Exercice 21. ✦✦✦ **Étude d'une suite homographique**
Pour tout réel x différent de 2, on pose

$$f(x) = \frac{2x-3}{x-2}.$$

1. Prouver qu'il n'existe pas de réel x tel que $f(x) = 2$. ⋙ Aide
2. Soit a un réel distinct de 2. On définit la suite u par :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

   (a) Justifier que la suite u est bien définie.
   (b) Préciser $f(0)$ et $f(3/2)$.
   (c) On suppose que $a = 0$. Conjecturer la formule explicite de u_n puis la prouver. ⋙ Aide



Indications et solutions



Indication de l'exercice 7 — p. 34

Montrer que u est la suite nulle en raisonnant à l'aide d'une récurrence à deux pas.

Indication de l'exercice 8 — p. 35

Raisonner à l'aide d'une récurrence forte sur la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \quad u_n \text{ est un nombre pair, c'est-à-dire, il existe } p_n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } u_n = 2p_n.$$

Indication de l'exercice 10 — p. 36

Sophie raisonne par l'absurde en supposant qu'elle a un chapeau blanc. Dans ce cas, Marie peut aussi raisonner par l'absurde en supposant son chapeau blanc.

Indication de l'exercice 13 — p. 37

1. Distinguer trois cas afin de simplifier les valeurs absolues :

$$x \leqslant -1, \quad x \in [-1;2], \quad x \geqslant 2.$$

Indication de l'exercice 14 — p. 38

2. Prouver par récurrence la conjecture

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{n+1}.$$

Indication de l'exercice 17 — p. 39

Raisonner par l'absurde et étudier les limites ou la dérivée.

Indication de l'exercice 18 — p. 39

2. Raisonner par l'absurde en supposant les trois nombres strictement supérieurs à 1. Comparer ensuite 1 et $a(2-b)b(2-c)c(2-a)$.

Indication de l'exercice 19 — p. 39

Faire une récurrence à deux pas.

Indication de l'exercice 20 — p. 39

Prouver par une récurrence forte que la suite u est constante égale à 3.

Indication de l'exercice 21 — p. 39

1. Raisonner par l'absurde en supposant qu'un tel réel x existe.
2.(c) Raisonner par récurrence sur la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \quad u_{2n} = 0 \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = \frac{3}{2}.$$

Exercice 1 — p. 28

1. $x = 3 \boxed{\Rightarrow} x^2 = 9$

2. $x^2 \leqslant 4 \boxed{\Rightarrow} x \leqslant 2$

3. $\mathrm{e}^x = 1 \boxed{\Longleftrightarrow} x = 0$

4. $x(x+2) = x(2x+3) \boxed{\Leftarrow} x = -1$

5. $x^2 \leqslant x \boxed{\Rightarrow} x \leqslant 1$

6. $\ln(x^4) = 16 \boxed{\Leftarrow} \ln(x) = 4.$

1. Il ne faut pas oublier les nombres négatifs. Une équivalence juste est par exemple

$$x = 3 \text{ ou } x = -3 \iff x^2 = 9.$$

2. De nouveau, il ne faut pas oublier les nombres négatifs.

$$x^2 \leqslant 4 \iff -2 \leqslant x \leqslant 2.$$

3. Revoir le graphe de la fonction exponentielle.
4. Attention, il y a aussi $x = 0$.

5. $x^2 \leqslant x \iff x \in [0;1]$.

6. On a plutôt

$$\ln(x^4) = 16 \iff 4\ln(|x|) = 16 \iff \ln(|x|) = 4.$$

$$\iff |x| = \mathrm{e}^4 \iff x = \pm\mathrm{e}^4.$$

Exercice 2 p. 30

→ Il y a cours de maths demain et je n'ai pas relu mon cours.
→ On est mercredi et il n'y a pas de frites à la cantine.
→ $x \neq 1$ ET $f(x) = 0$.

Exercice 3 p. 30

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geqslant 0$.
2. $\exists\, p \in \mathbb{Z},\ n = 2p+1$.
3. $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ \exists\, p \in \mathbb{Z},\ n(n+1) = 2p$.
4. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \exists\, n \in \mathbb{N}, \quad x \leqslant n$.
5. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}(x) \neq 0$.

Exercice 4 p. 30

1. x est inférieur à tout réel strictement positif.

x est négatif.

2. $|x-1|$ est un nombre positif et inférieur à n'importe quel réel positif. $|x-1|$ est nul, c'est-à-dire

$x = 1$.

3. u est une suite constante.

4. La suite est à termes positifs.

Exercice 5 p. 31

1. f est une fonction paire :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(-x).$$

La négation est

$$\exists\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq f(-x).$$

2. f est une fonction positive :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant 0.$$

La négation est

$$\exists\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) < 0.$$

3. f est une fonction constante :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(y).$$

La négation est

$$\exists\, x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq f(y).$$

On aurait aussi pu écrire

$$\exists\, c \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = c.$$

La négation serait alors

$$\forall\, c \in \mathbb{R}, \quad \exists\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq c.$$

4. f est une fonction monotone si et seulement si elle est croissante ou décroissante :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leqslant f(y).$$

OU

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant y \quad \Rightarrow \quad f(x) \geqslant f(y).$$

La négation est « la fonction n'est pas croissante, ni décroissante. »

$$\exists\, x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant y \text{ ET } f(x) > f(y).$$

ET

$$\exists\, x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant y \text{ ET } f(x) < f(y).$$

Exercice 6 p. 33

1. *Introduction.* Prouvons par récurrence que

$$\mathscr{P}(n) : u_n = 3 \cdot 2^{-n} - 2$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation.

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad 3 \cdot 2^{-0} - 2 = 3 - 2 = 1.$$

D'où $u_0 = 3 \cdot 2^{-0} - 2$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n/2 - 1 \\ &= \left(3 \cdot 2^{-n} - 2\right)/2 - 1 \\ &= 3 \cdot 2^{-n-1} - 1 - 1 \\ u_{n+1} &= 3 \cdot 2^{-(n+1)} - 2. \end{aligned}$$

$\mathscr{P}(n+1)$ est vraie si $\mathscr{P}(n)$ l'est.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 2n^2 - (n+1)^2 &= 2n^2 - n^2 - 2n - 1 \\ &= n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 \end{aligned}$$

Ainsi, pour $n \geqslant 4$, $(n-1)^2 - 2 \geqslant 0$ et $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.
Raisonnons par récurrence avec

$$\mathscr{P}(n) : 2^n \geqslant n^2 \quad \text{où } n \in \mathbb{N}, n \geqslant 4$$

Initialisation. Pour $n = 4$, $2^4 = 16$ et $n^2 = 16$.
$\mathscr{P}(4)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 4$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Par hypothèse de récurrence

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geqslant 2 \cdot n^2,$$

puis, d'après ce qui précède,

$$2^{n+1} \geqslant (n+1)^2.$$

$\mathscr{P}(n+1)$ est vraie si $\mathscr{P}(n)$ l'est.

Conclusion. Pour tout $n \geqslant 4$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Procédons par récurrence sur la propriété :

$$\mathscr{P}(n) : f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Initialisation. Comme $x/2^0 = x$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire $f(x) = f(x/2^n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$, c'est-à-dire $f(x) = f(x/2^{n+1})$.
Par hypothèse sur la fonction f

$$f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(2 \cdot \frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

Puis, par hypothèse de récurrence

$$f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f(x).$$

Si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, $\mathscr{P}(n+1)$ aussi.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Exercice 7 p. 34

Procédons par récurrence à deux pas sur

$$\mathscr{P}(n) : u_n = 0 \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Initialisation. Par hypothèse sur la suite u

$$u_0 = u_1 = 0.$$

$\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies, c'est-à-dire $u_n = u_{n+1} = 0$. On a donc

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n = 4 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 0.$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie si $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ le sont.
Conclusion. Pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0.$$

u est la suite nulle.

Exercice 8 p. 35

On raisonne par récurrence forte sur la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \ u_n \text{ est un entier naturel pair.}$$

Initialisation. $\mathscr{P}(0)$ est vraie par hypothèse sur u_0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}(1)$, …, $\mathscr{P}(n)$ vraies et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$.
Pour prouver $\mathscr{P}(n+1)$, étudions la parité de u_{n+1}. Par hypothèse de récurrence, il existe des entiers p_0, p_1, …, p_n tels que

$$u_0 = 2p_0, \quad u_1 = 2p_1, \ldots, \quad u_n = 2p_n.$$

Il vient

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2}\left({u_0}^2 + {u_1}^2 + {u_2}^2 + \cdots + {u_n}^2\right) \\ &= 2{p_0}^2 + 2{p_1}^2 + 2{p_2}^2 + \cdots + 2{p_n}^2 \\ &= \underbrace{2\left({p_0}^2 + {p_1}^2 + {p_2}^2 + \cdots + {p_n}^2\right)}_{\in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

u_{n+1} est un entier pair. La propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie sous réserve de $\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}(1)$, …, $\mathscr{P}(n)$.

Conclusion. $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Exercice 9 p. 35

1. Prouvons la contraposée : si a, b sont de parité différente, alors $a+b$ est un entier impair.
Si a est pair et b impair, il existe deux entiers p et q tels que

$$a = 2p \quad \text{et} \quad b = 2q + 1.$$

D'où $$a + b = \underbrace{2(p+q)}_{\in \mathbb{Z}} + 1.$$

$a+b$ est impair. Le cas a impair et b pair étant similaire, l'énoncé est prouvé.

2. Prouvons la contraposée : si l'un des deux nombres a ou b est pair, alors ab est pair. Par exemple, si a est pair, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2p$ et

$$ab = 2pb \quad \text{avec} \quad pb \in \mathbb{Z}.$$

ab est pair. Le calcul est similaire si b est pair.
L'énoncé est donc prouvé par contraposée.

Exercice 10 p. 36

Sophie sait que Marie et Albert ont deux chapeaux noirs. Elle raisonne par l'absurde. Elle suppose qu'elle n'a pas de chapeau noir mais un chapeau blanc.
Marie aurait donc vu un chapeau noir (celui d'Albert) et un chapeau blanc (celui de Sophie).
Marie aurait raisonné à son tour par l'absurde. Si son chapeau avait été blanc, Albert aurait vu deux chapeaux blancs et aurait pu conclure que son chapeau était noir. Or, il n'a pas conclu. Marie aurait pu donc affirmer que son chapeau était noir.
Or, Marie, qui a parlé avant Sophie, n'a pas non plus conclu sur la couleur de son chapeau. Sophie en déduit que son hypothèse de chapeau blanc est absurde. Il est noir !

Exercice 11 p. 36

1. Pour $x, y \in \mathbb{R}$

$$\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x} \iff x(1+x) = y(1+y)$$
$$\iff x^2 + x = y^2 + y.$$

Ainsi $\boxed{x^2 - y^2 = -(x-y).}$

2. Raisonnant par l'absurde en supposant $x \neq y$. Dans ce cas, $x - y \neq 0$ et on peut diviser

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = -1.$$

Le terme de gauche se simplifie, c'est une identité remarquable, $x + y = -1$. Absurde, x et y sont positifs et la somme est strictement négative. En conclusion

$$\boxed{x = y.}$$

Exercice 12 p. 37

1. L'énoncé est faux.
$x = -1$ est un contre-exemple.

2. L'énoncé est faux.
Par exemple $a = b = 1$ donne un contre-exemple puisque $\sqrt{2} \neq 2$.

3. L'énoncé est vrai.
$a = 0$ est une solution (c'est même la seule).

4. L'énoncé est vrai.
Pour tout réel a, $\varepsilon = 2|a|$ est une solution.

5. L'énoncé est faux.
$x = 2,\ y = -1,\ z = -1$ fournissent un contre-exemple.

Exercice 13 p. 37

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Procédons par disjonction des cas en distinguant suivant le signe des expressions $x-2$ et $x+1$.

x		-1		-2	
$x+1$	$-$	0	$+$	0	$+$
$x-2$	$-$	0	$-$	0	$+$

- Si $x \leqslant -1$ alors

$$|x-2| + |x+1| = -(x-2) - (x+1) = -2x + 1.$$

Seul $x = -1$ est solution.
- Si $x \in [-1;2]$

$$|x-2| + |x+1| = -(x-2) + (x+1) = 3.$$

Tout réel $x \in [1;2]$ est solution.
- Si $x \geqslant 2$

$$|x-2| + |x+1| = +(x-2) + (x+1) = 2x - 1.$$

Seul $x = 2$ est solution.
En conclusion, il y a une infinité de solutions, tous les réels de $[-1;2]$.

2. Distinguons suivant le nombre d'entiers pairs.
→ S'il y a au moins deux nombres pairs, la somme de ces deux nombres est paire.
→ Sinon, il y a au plus un nombre pair. Il y a donc

au moins deux entiers impairs et leur somme est encore paire.

Exercice 14 p. 38

1. On a $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{3}$ ...

On conjecture $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

2. Prouvons par récurrence la propriété :

$$\mathscr{P}(n) : \quad u_n = \frac{1}{n+1} \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Initialisation. $\mathscr{P}(0)$ est vraie car $\frac{1}{0+1} = 1$ et $u_0 = 1$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.

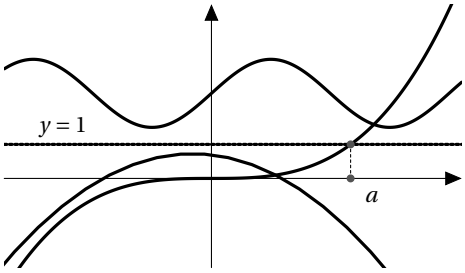
$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \underset{\text{H.R}}{=} \frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+2}.$$

$\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

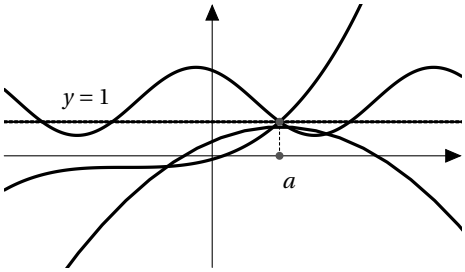
Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = \dfrac{1}{n+1}.}$

Exercice 15 p. 39

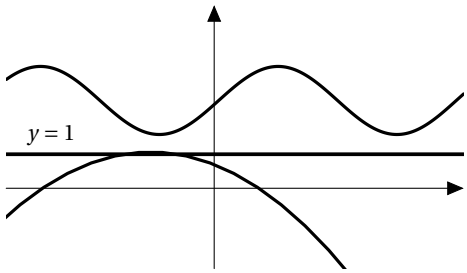
1. Il y a au moins une courbe qui coupe la droite d'équation $y = 1$.



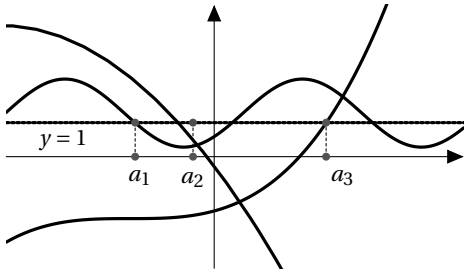
2. Il existe une abscisse a telle que les trois courbes passent par le point $(a, 1)$.



3. Une des fonctions est constante égale à 1. Une des courbes est la droite d'équation $y = 1$.



4. Chaque courbe coupe au moins une fois la droite d'équation $y = 1$.



Exercice 16 p. 39

Les nombres F_n *sont les nombres de Fermat. Ils sont liés à la recherche des nombres premiers.*

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
(\mathrm{F}_n - 1)^2 + 1 &= \left(\left(2^{2^n}+1\right)-1\right)^2 + 1 \\
&= \left(2^{2^n}\right)^2 + 1 \\
&= 2^{2^n \cdot 2} + 1 \\
&= 2^{2^{n+1}} + 1 \\
(\mathrm{F}_n - 1)^2 + 1 &= \mathrm{F}_{n+1}.
\end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_{n+1} - 2 &= (\mathrm{F}_n - 1)^2 - 1 \\
&= {\mathrm{F}_n}^2 - 2\mathrm{F}_n + 1 - 1 \\
\mathrm{F}_{n+1} - 2 &= \mathrm{F}_n(\mathrm{F}_n - 2).
\end{aligned}$$

2. *Introduction.* Procédons par récurrence sur la propriété :

$$\mathscr{P}(n) : \mathrm{F}_{n+1} = \mathrm{F}_0 \times \mathrm{F}_1 \times \cdots \times \mathrm{F}_n + 2, \quad n \in \mathbb{N}$$

Initialisation. $F_0 = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$ et $F_1 = 2^{2^1} + 1 = 4 + 1 = 5$.

$$F_1 = F_0 + 2.$$

$\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} F_{n+2} - 2 &= F_{n+1}(F_{n+1} - 2) \\ &= F_{n+1}(F_0 \times F_1 \times \cdots \times F_n) \\ F_{n+2} - 2 &= F_0 \times F_1 \times \cdots \times F_n \times F_{n+1}. \end{aligned}$$

D'où

$$F_{n+2} = F_0 \times F_1 \times \cdots \times F_n \times F_{n+1} + 2.$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie si $\mathscr{P}(n)$ l'est.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Exercice 17 p. 39

Raisonnons par l'absurde en supposant que de tels nombres a, b et c existent.

Méthode 1.
On a alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad 1 = ax^2 e^{-x} + bxe^{-x} + ce^{-x}.$$

Or, par *les croissances comparées* : $x^2 e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $xe^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Puis

$$ax^2 e^{-x} + bxe^{-x} + ce^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \neq 1.$$

Absurde par unicité de la limite. Il n'existe pas de tels nombres a, b et c.

Méthode 2.
Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. f est une fonction polynomiale de degré 2, f est trois fois dérivable et f''' est la fonction nulle. Or, f est aussi la fonction exponentielle, $f''' = \exp$. Absurde. Il n'existe pas de tels nombres a, b et c.

Exercice 18 p. 39

1. Soit $x \in [0;2]$

$$x \geqslant 0,\ (2-x) \geqslant 0 \quad \text{donc} \quad x(2-x) \geqslant 0.$$

De plus

$$x(2-x) - 1 = -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2 \leqslant 0.$$

C'est-à-dire $x(2-x) \leqslant 1$.

D'où le résultat.

Une deuxième méthode consiste à étudier la fonction $f : x \in [0;2] \mapsto x(2-x)$.

2. Raisonnons par l'absurde en supposant les nombres supérieurs strictement à 1. Le produit l'est donc aussi :

$$a(2-b)\cdot b(2-c)\cdot c(2-a) > 1. \quad (\bullet)$$

En réorganisant les facteurs :

$$a(2-a)\cdot b(2-b)\cdot c(2-c) > 1.$$

Or, on a vu à la question précédente que

$$a(2-a),\ b(2-b),\ c(2-c) \in [0;1].$$

En particulier

$$a(2-a)\cdot b(2-b)\cdot c(2-c) \leqslant 1.$$

On a une contradiction avec $(\bullet)$. Au moins un des trois nombres est inférieur à 1.

Exercice 19 p. 39

→ *Introduction.* Prouvons par récurrence *à deux pas* la propriété

$$\mathscr{P}(n) : u_n = n!$$

est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

→ *Initialisation.* Comme $u_1 = 1 = 1!$ et

$$u_2 = u_{0+2} = (0+1)(u_0 + u_1) = 2 = 2!.$$

$\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$ sont vraies.

→ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies et démontrons $\mathscr{P}(n+2)$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= (n+1)(u_n + u_{n+1}) \\ &= (n+1)\big(n! + (n+1)!\big) \\ &= (n+1)\big(n! + n!\cdot(n+1)\big) \\ &= (n+1)\cdot n!\cdot\big(1 + (n+1)\big) \\ u_{n+2} &= n!\cdot(n+1)(n+2) = (n+2)!. \end{aligned}$$

La propriété $\mathscr{P}(n+2)$ est donc vraie si $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ le sont.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Exercice 20 p. 39

$$u_2 = \frac{1}{1}u_1 = 3, \quad u_2 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = 3$$

$$u_4 = \frac{1}{3}(u_1 + u_2 + u_3) = 3.$$

On conjecture que la suite u est constante égale à 3.

Introduction. Prouvons que la propriété $\mathscr{P}(n)$: $u_n = 3$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation. $u_1 = 3$. $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(1)$, $\mathscr{P}(2)$, …, $\mathscr{P}(n)$ vraies et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$.

$$u_{n+1} = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$$
$$= \frac{1}{n}(3 + 3 + \cdots + 3) = \frac{3n}{n} = 3.$$

Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ et vraie si $\mathscr{P}(1), \mathscr{P}(2), \ldots, \mathscr{P}(n)$ le sont aussi.

→ *Conclusion.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 3$.

Exercice 21 p. 39

1. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'un tel réel x existe. Ainsi

$$\frac{2x-3}{x-2} = 2 \quad \Rightarrow \quad 2x - 3 = 2(x-2) = 2x - 4.$$

Il vient $-3 = -4$, absurde. Un tel x n'existe pas.

2.(a) Pour justifier que la suite u est bien définie, il suffit de s'assurer qu'il n'existe pas d'entier n tel que $u_n = 2$. Si un tel cas se produisait, on ne pourrait calculer u_{n+1}.
Raisonnons par récurrence sur la propriété

$\mathscr{P}(n)$: Le nombre u_n est bien défini et $u_n \neq 2$.

Initialisation. Par hypothèse $u_0 = a \neq 2$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Comme $u_n \neq 2$, on peut bien poser

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2u_n - 3}{u_n - 2.}$$

De plus, d'après la question 1, $u_{n+1} = f(u_n) \neq 2$. Par suite, $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

La suite u est bien définie.

2.(b) On a $f(0) = 3/2$ et $f(3/2) = 0$.

2.(c) Calculons les premiers termes.

$$u_0 = 0,\ u_1 = f(u_0) = f(0) = 3/2,$$

$$u_2 = f(u_1) = f(3/2) = 0,\ u_3 = f(u_2) = f(0) = 3/2.$$

On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{2n} = 0 \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = \frac{3}{2}.$$

Pour la preuve, on peut procéder par récurrence sur la propriété :

$$\mathscr{P}(n) :\ u_{2n} = 0 \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = \frac{3}{2} \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Initialisation. Par définition de la suite u

$$u_0 = a = 0,\ \ u_1 = f(u_0) = \frac{3}{2}.$$

$\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.

$$u_{2n} = 0 \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = \frac{3}{2}.$$

Par application de la fonction f

$$u_{2n+1} = f(u_{2n}) = f(0) = \frac{3}{2}$$

et $\qquad u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(3/2) = 0.$

$\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Autrement dit

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 3/2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

CHAPITRE 3

Ensembles et coefficients binomiaux

Mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, not whether what we are saying is true.

BERTRAND RUSSELL
Mathématicien, philosophe britannique (1872-1970)

On suppose connue la notion d'ensemble, on ne cherchera donc pas à définir précisément cette notion. Dans la suite, on dira qu'un ensemble est une « collection d'objets ». Ces objets étant les éléments de l'ensemble.

1 Ensembles

1.1 Définitions et notations

Pour définir un ensemble, on peut :

- Lister tous les éléments.
  Par exemple, il y a l'ensemble $V = \{a; e; i; o; u; y\}$. On s'autorise les listes que l'on complète naturellement : $L = \{a; b; c; \cdots; y; z\}$, $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \cdots\}$.
- Considérer une propriété caractéristique.
  Par exemple, V et L sont respectivement l'ensemble des voyelles et des lettres de l'alphabet latin, $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.
- Procéder par sélection, selon un critère précis parmi des éléments d'un ensemble plus important.
  Par exemple, on a $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$, $\{1; 3; 5; \cdots\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est impair}\}$,
  $\{1; 4; 9; 16 \cdots\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est carré d'entier}\}$. Précisons que le symbole « $\mid$ » se lit « tel que ».

Notation.
- L'énoncé mathématique « x appartient à E » est noté $x \in E$.
- Inversement, l'énoncé « x n'appartient pas à E » est noté $x \notin E$.

Exemples. Les ensembles de nombres
- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs.
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.
- Citons aussi $\mathbb{Q}$: l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^* \right\}$.
- Pour a, b deux réels avec $a < b$.

→ $[a; b]$ est l'ensemble des réels compris entre a et b (inclus).
→ $[a; b[$ est l'ensemble des réels compris entre a (inclus) et b (exclus).
→ etc.
- Pour deux entiers n, p avec $n \leqslant p$, $[\![n; p]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre n et p.

DÉFINITION **Égalité entre ensembles**

On dit que ***deux ensembles sont égaux****, noté* $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ *si tout élément de* A *appartient à* B *et inversement. Avec des quantificateurs, cela devient*

$$(\forall\, x \in \mathrm{A},\ x \in \mathrm{B}) \quad \text{ET} \quad (\forall\, x \in \mathrm{B},\ x \in \mathrm{A}).$$

Remarque. Lorsqu'on définit un ensemble de manière exhaustive, il n'y a pas de relation d'ordre et on peut répéter les éléments $\mathrm{V} = \{a; e; i; o; u; y\} = \{e; a; o; i; u; y\} = \{a; a; a; e; e; i; o; u; y\}$.

Exemples.
- $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ où $\mathrm{A} = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ et $\mathrm{B} = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leqslant 4\right\}$.
- On vérifie que $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{C}$ où $\mathrm{A} = [-1; 1]$, $\mathrm{B} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leqslant 1\right\}$ et $\mathrm{C} = \left\{\ln(t) \mid t \in [\mathrm{e}^{-1}; \mathrm{e}]\right\}$.

DÉFINITION **Parties, ensembles des parties**

Considérons deux ensembles A *et* B.
On dit que A *est une* ***partie*** *de* B*, noté* $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$*, si tout élément de* A *appartient à* B*. Autrement dit*

$$\forall\, x \in \mathrm{A},\ x \in \mathrm{B}.$$

*On définit de plus l'****ensemble des parties*** *d'un ensemble* B*, noté* $\mathscr{P}(\mathrm{B})$*, par*

$$\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{B}) \iff \mathrm{A} \subset \mathrm{B}.$$

Vocabulaire. On dit aussi « A est inclus dans B » ou encore « A est un sous-ensemble de B ».

Exemples.
- L'ensemble des voyelles est inclus dans l'ensemble des lettres $\mathrm{V} \subset \mathrm{L}$.
- On a aussi $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Soient a et b deux réels avec $a < b$. On a $]a; b[\subset]a; b] \subset [a; b]$.
- Si $\mathrm{B} = \{1; 2; 3\}$ alors $\mathscr{P}(\mathrm{B}) = \left\{\varnothing; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{2; 3\}; \{1; 3\}; \{1; 2\}; \{1; 2; 3\}\right\}$.

Notation. L'ensemble vide est désigné par $\varnothing$. On peut démontrer à partir du cours de logique que pour tout ensemble B, $\varnothing \in \mathscr{P}(\mathrm{B})$. En particulier, $\mathscr{P}(\mathrm{B})$ n'est jamais vide. De plus, $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$.

⚠ **Attention.** Il ne faut pas confondre « appartenance » et « inclusion ».

Les questions sont indépendantes.

Exercice 1



1. ✦ Placer le bon symbole $\in$ ou $\subset$ dans les énoncés suivants.

$$0 \dots \mathbb{R}, \quad \{0\} \dots \mathbb{R}, \quad \{0\} \dots \mathscr{P}(\mathbb{R}), \quad \{1;2;3\} \dots \mathscr{P}(\mathbb{R}).$$

2. ✦✦ Expliciter l'ensemble $\mathscr{P}\Big(\mathscr{P}\big(\{a\}\big)\Big)$.

Vocabulaire. Point de vue probabiliste.
Si on considère un ensemble de référence Ω (par exemple $\{1;2;\cdots;6\}$ qui sont les résultats possibles d'un jet de dé), un élément de $\mathscr{P}(\Omega)$ sera appelé un **événement**. Dans le cas d'un lancer de dé, l'événement « Le dé donne un nombre pair » est traduit par la partie $\{2;4;6\}$.

Méthode

Rédiger une inclusion.

Considérons les ensembles $\mathrm{A} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, n \in \mathbb{N}^*, \quad x = n + \frac{1}{n}\right\}$ et $\mathrm{B} = [2;+\infty[$.
Justifions l'inclusion $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$.
Soit $x \in \mathrm{A}$. Par définition, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = n + 1/n$. On a

$$x - 2 = n + \frac{1}{n} - 2 = \frac{n^2 + 1 - 2n}{n} = \frac{(n-1)^2}{n} \geqslant 0.$$

Donc $x \geqslant 2$, c'est-à-dire $x \in \mathrm{B}$.
Pour tout $x \in \mathrm{A}$, $x \in \mathrm{B}$. On a prouvé l'inclusion $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$.

Exercice 2



✦✦ Posons $\mathrm{A} = \left\{m \in \mathbb{Z} \mid \exists\, n \in \mathbb{N},\ n^2 = m\right\}$ et $\mathrm{B} = \left\{m \in \mathbb{Z} \mid \exists\, n \in \mathbb{N},\ n^4 = m\right\}$.
Préciser si les énoncés suivants sont vrais ou faux. Justifier.

1. $9 \in \mathrm{A}$
2. $4 \in \mathrm{B}$
3. $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^+$
4. $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$
5. $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$
6. $\forall\, m_1, m_2 \in \mathrm{A},\ m_1 m_2 \in \mathrm{A}$.

Méthode

Comment établir une égalité entre ensembles ?

Dire que $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ est équivalent à dire que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$. Retenons que pour établir une égalité entre deux ensembles, on peut raisonner par **double inclusion** en prouvant que tout élément de A est un élément de B et inversement.

Exemple. Prouvons que $\{t^2 + 2t \mid t \in \mathbb{R}\} = [-1;+\infty[$.

$\subset$ Justifions que $\mathrm{A} = \{t^2 + 2t \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{B} = [-1;+\infty[$.
Soit $x \in \mathrm{A}$. Par définition, il existe un réel t tel que $x = t^2 + 2t$. On écrit sous la forme canonique :

$$x = t^2 + 2t = (t+1)^2 - 1 \geqslant -1.$$