

Claire David • Pierre Gosselet

Équations aux dérivées partielles

3^e édition

DUNOD

Graphisme de couverture : Elizabeth Riba

Illustration de couverture : © Zulashai - Shutterstock.com

© Dunod, 2012, 2015, 2022

11, rue Paul Bert 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-084197-4

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	VI
Notations	VIII
Chapitre 1. Généralités	1
1.1 Premières définitions	1
1.2 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires en mécanique	5
Chapitre 2. Équations aux dérivées partielles du premier ordre	17
2.1 Préambule : étude d'un système différentiel de la forme $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$	17
2.2 Équations aux dérivées partielles quasi-linéaires du premier ordre	23
Exercices	30
Corrigés	30
Chapitre 3. Équations aux dérivées partielles du second ordre	33
3.1 Classification des équations	33
3.2 Courbes caractéristiques et problème de Cauchy	35
3.3 Réduction à la forme standard	40
Exercices	49
Corrigés	50
Chapitre 4. Distributions	55
4.1 Motivation	55
4.2 Espace des fonctions tests	57
4.3 Espace des distributions	60
4.4 Dérivation d'une distribution	66
4.5 Opérations	68
4.6 Distributions tempérées	73
Exercices	75
Corrigés	77
Chapitre 5. Transformations intégrales	83
5.1 Transformation de Fourier	83
5.2 Transformation de Laplace	90
Exercices	99
Corrigés	105
Chapitre 6. Méthode de séparation des variables	117
6.1 Fonctions à variables séparées	117
6.2 Problème de Sturm-Liouville	120
6.3 Séparation des variables	126
Exercices	135
Corrigés	140

Équations aux dérivées partielles

Chapitre 7. Quelques équations aux dérivées partielles classiques	153
7.1 Équation de transport	153
7.2 Équation des ondes	158
7.3 Équation de la chaleur	164
7.4 Équation de Laplace	166
7.5 Une équation aux dérivées partielles classique en finance : l'équation de Black-Scholes	178
Chapitre 8. Introduction aux approches variationnelles	183
8.1 Principe des approches variationnelles	183
8.2 Problème variationnel abstrait	189
8.3 Notions sur la régularité de la solution faible	195
8.4 Traitement de quelques EDP	195
8.5 Techniques d'approximation de Ritz-Galerkin	200
Exercices	202
Corrigés	204
Chapitre 9. Vers l'étude de problèmes moins réguliers	215
9.1 Cas de la dimension deux	216
9.2 Cas général : dimension $n \in \mathbb{N}^*$	223
9.3 Utilisation sur des domaines irréguliers	223
Annexe A. Rappels d'analyse et de géométrie	225
A.1 Fonctions de plusieurs variables	225
A.2 Éléments de géométrie	227
Annexe B. Éléments d'analyse hilbertienne	231
B.1 Définitions	231
B.2 Complétude	236
B.3 Sommes hilbertiennes	239
B.4 Projection sur un convexe fermé	243
B.5 Dualité dans les espaces de Hilbert	247
Annexe C. Éléments d'intégration de Lebesgue	251
C.1 Motivation	251
C.2 Rapide construction de l'intégrale de Lebesgue	252
C.3 Résultats importants	255
C.4 Comparaison Riemann-Lebesgue	257
C.5 Intégrales multiples	257
C.6 Espaces de Lebesgue	258
C.7 Produit de convolution de deux fonctions	262
C.8 Résultats de densité et de séparabilité	263

Annexe D. Propriétés de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$	265
D.1 Structure algébrique	265
D.2 Régularité des fonctions, notion de trace	267
D.3 Inégalités de Poincaré	270
Bibliographie	274
Index	276

Vous pouvez accéder à des exercices corrigés supplémentaires à partir de la page de présentation de l'ouvrage sur le site de l'éditeur www.dunod.com. Ces compléments sont au format pdf et permettent une recherche classique par mots-clés. Ils peuvent être lus, enregistrés ou imprimés en partie comme en totalité.

LES + EN



LIGNE

Pour aller plus loin et mettre toutes les chances de votre côté, des ressources complémentaires sont disponibles sur le site www.dunod.com.

Connectez-vous à la page de l'ouvrage (grâce aux menus déroulants, ou en saisissant le titre, l'auteur ou l'ISBN dans le champ de recherche de la page d'accueil). Sur la page de l'ouvrage, sous la couverture, cliquez sur le lien « LES + EN LIGNE ».

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage est une introduction à l'étude des équations aux dérivées partielles. Il est destiné aux étudiants de niveau L3 et M1 des écoles d'ingénieurs et filières universitaires scientifiques. Il se base sur un cours de L3 donné aux étudiants en ingénierie mécanique de l'ENS de Cachan et de l'université Pierre et Marie Curie-Paris 6.

Les équations aux dérivées partielles (EDP) apparaissent extrêmement fréquemment en sciences appliquées pour traduire des principes fondamentaux et modéliser de manière continue des phénomènes physiques. Face à cela, les étudiants se retrouvent souvent désarmés : les ouvrages dans ce domaine font généralement appel à des prérequis complexes, donnent des exposés trop généraux pour faire le lien avec des applications, ou au contraire éludent les fondations et se spécialisent sur certains aspects. L'étude des EDP est en effet un sujet très vaste, sur lequel les ouvrages de référence peuvent contenir plusieurs milliers de pages.

Cette troisième édition, revue et augmentée, est, encore, le fruit d'un compromis. Notre but est, toujours, de donner les éléments nécessaires à la compréhension des EDP qui jalonnent le monde des sciences appliquées, de savoir les interpréter, au sens classique et généralisé, connaître leurs principales propriétés et, lorsque cela est possible, les résoudre. Dans la deuxième édition, nous avons introduit les approches variationnelles qui font le lien entre les EDP théoriques et le calcul numérique. Ces méthodes sont, en effet, à la base de techniques d'approximation robustes extrêmement utilisées en ingénierie, dont il est intéressant de connaître le principe directeur. Dans cette troisième édition, nous introduisons quelques éléments plus modernes permettant d'aborder l'étude de certains problèmes peu réguliers.

L'objectif du premier chapitre est de donner le vocabulaire de base et de discuter, de manière assez empirique, des propriétés fondamentales des EDP les plus fréquentes en physique. Nous nous intéressons ensuite à l'analyse classique d'équations du premier et second ordre. Nous introduisons notamment la notion de courbe caractéristique d'une EDP.

Dans le chapitre quatre, nous donnons les fondements de l'interprétation généralisée des EDP en introduisant le concept de distributions. Ces dernières sont un outil extrêmement puissant puisqu'elles offrent un cadre plus large pour manier les EDP, notamment en présence de discontinuités, et fournissent de nouveaux outils pour leur étude.

Nous développons aussi quelques éléments d'analyse spectrale (transformation de Fourier et Laplace pour les domaines non bornés et séparation de variables pour les domaines bornés) dont l'intérêt dépasse l'étude des EDP, et qui permettent dans certains cas d'obtenir facilement des solutions d'équations aux dérivées partielles.

Le chapitre qui suit est consacré à l'étude d'équations classiques (de transport, de la chaleur, des ondes, de Laplace) à l'aide des outils introduits aux chapitres précédents.

Le chapitre huit est une introduction aux approches variationnelles, qui offrent un cadre théorique riche dans lequel il est possible de prouver l'existence et l'unicité de la solution de certaines EDP.

Le dernier chapitre introduit les espaces de Besov, utiles pour l'étude des équations posées sur des domaines peu réguliers.

À la fin de chaque chapitre se trouve une sélection d'exercices types, avec, bien sûr, leurs corrigés détaillés. Ceux-ci se veulent volontairement simples, sans complication calculatoire.

Quatre annexes complètent cet ouvrage. La première est une remise en forme pour se réapproprier des bases de géométrie et calcul différentiel. La deuxième est consacrée à l'analyse hilbertienne, et donne les résultats nécessaires concernant les espaces de Banach et de Hilbert. La troisième annexe concerne l'intégration de Lebesgue et les espaces fonctionnels associés ; il s'agit de permettre au lecteur non spécialiste de comprendre comment cette théorie de l'intégration conduit à un cadre simple pour déployer les méthodes présentées dans l'ouvrage. La dernière annexe présente les propriétés fondamentale de l'espace de Sobolev dans lequel les méthodes variationnelles sont inscrites.

La bibliographie recense quelques ouvrages de référence, permettant d'approfondir le sujet.

Claire David
Pierre Gosselet

NOTATIONS

- **Ensemble et topologie**

- $\partial\Omega$ bord du domaine Ω .
- χ_A pour $A \subset \Omega$: fonction indicatrice de A : $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus A \end{cases}$

- **Espaces fonctionnels**

- $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ espace de Lebesgue des fonctions dont la puissance $p^{\text{ième}}$ est intégrable sur Ω .
- $L^\infty(\Omega)$, espace de Lebesgue des fonctions essentiellement bornées sur Ω .
- $C^0(\Omega)$, espace des fonctions continues sur Ω .
- $C^n(\Omega)$, $n \in \llbracket 1, \infty \rrbracket$, espace des fonctions n fois continument dérivables.
- $C_c^n(\Omega)$, $n \in \llbracket 0, \infty \rrbracket$, espace des fonctions de classe $C^n(\Omega)$ à support compact.
- $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$, espace des fonctions infiniment dérivables à support compact, espace des fonctions tests pour les distributions.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, espace des fonctions à décroissance rapide, espace des fonctions tests pour les distributions tempérées.
- $\mathcal{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$, espace des fonctions infiniment dérivables sur Ω , espace des fonctions tests pour les distributions à support compact.
- $H^1(\Omega)$, espace de Sobolev des fonctions de carré intégrable admettant un gradient de carré intégrable

- **Opérations sur les fonctions et les distributions**

- $\text{supp}(f)$, support de la fonction f .
- pour une fonction réelle de la variable réelle : f' dérivée première de f , f'' dérivée seconde, $f^{(j)}$ dérivée j -ème.
- $f * g$, produit de convolution

- **Notation multientier** : $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$.

- $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$.
- $x \in \mathbb{R}^d$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_d^{\alpha_d}$ monôme.
- $f \in C^N(\mathbb{R}^d)$ avec $N \geq |\alpha|$, $\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$.

• **Opérateurs différentiels**

– Gradient spatial d’une fonction scalaire : $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}.$

– Dérivée normale :

$$\frac{\partial f}{\partial n} = df(\vec{n}) = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{n}.$$

– Divergence spatiale d’un champ de vecteur : $\text{div}(\vec{p}) = \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z}.$

– Laplacien d’un champ scalaire : $\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$

• **Opérations dans un espace vectoriel E**

- E' , dual topologique de E .
- $\langle g, h \rangle = g(h) \in \mathbb{R}$, crochet de dualité avec $h \in E$ et $g \in E'$.
- $(g, h)_E$ produit scalaire avec $g \in E$ et $h \in E$.
- $\|h\|_E$ norme de $h \in E$.

1.1 PREMIÈRES DÉFINITIONS

Une *Équation aux Dérivées Partielles (EDP)* est une équation fonctionnelle qui met en relation des dérivées partielles. Typiquement, si u est une fonction à valeurs scalaires des variables x et y , $(x, y) \in \Omega$, où Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$, une *EDP* est une relation de la forme :

$$\mathcal{F}\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad \text{pour } (x, y) \in \Omega \quad (1.1)$$

où $\mathcal{F}$ désigne une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^5$.

L'**ordre** d'une équation aux dérivées partielles est le plus haut degré de dérivation présent dans l'équation. L'équation (1.1) est donc d'ordre 1.

La **dimension** d'une équation aux dérivées partielles est le nombre de variables indépendantes dont dépend la fonction inconnue u . L'équation (1.1) est donc de dimension 2.

Résoudre l'*EDP* consiste donc à déterminer toutes les fonctions u définies sur Ω satisfaisant (1.1).

En général, une *EDP* est complétée par des conditions sur le bord de Ω du type :

$$\mathcal{G}\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad \text{pour } (x, y) \in \Gamma \subset \partial\Omega \quad (1.2)$$

Ces conditions peuvent être de nature très différentes et influent fortement sur l'existence et la forme des solutions. Quand les conditions portent sur le bord complet du domaine, on parle de **problème aux frontières**. Quand le domaine est d'extension infinie autour d'un obstacle compact (par exemple lors de l'étude de la signature radar d'un objet), on parle de **problème extérieur**.

Quand les conditions ne portent que sur une partie du bord du domaine sur lequel on connaît la valeur de la fonction et de ses dérivées de degré inférieur à l'ordre de l'équation, on parle de **problème de Cauchy**.

Les équations de la physique sont fréquemment posées sur des domaines spatio-temporels du type $\Omega = \omega \times [t_0, +\infty[$, où ω est un ouvert de l'espace $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3) et $[t_0, +\infty[$ est l'intervalle temporel d'étude, t_0 est l'instant initial (souvent pris égal à 0). Le temps joue un rôle particulier, dans la mesure où il est porteur du *principe de causalité*[†]. On a alors le plus souvent un problème aux frontières en espace et un

[†]. C'est le principe suivant lequel, si un phénomène physique, nommé *cause*, produit un autre phénomène, l'*effet*, alors ce dernier ne peut précéder la cause.

problème de Cauchy en temps que l'on appelle également **problème aux conditions initiales**.

Les problèmes aux frontières et les problèmes aux conditions initiales obéissent à des logiques différentes : pour les premiers, l'état est partiellement connu sur les bords et on cherche à l'aide de l'*EDP* à déterminer la solution dans l'ensemble du domaine ω , pour les seconds, l'état est complètement connu à l'instant initial t_0 et on va chercher à propager la solution à l'instant d'après puis, de proche en proche, à déterminer la solution sur l'ensemble de l'intervalle temporel d'étude.

Il n'existe pas de résultats généraux sur l'existence de solutions des équations aux dérivées partielles, il est nécessaire de restreindre l'étude à certains cas. On donne donc, dans ce qui suit, une rapide classification des *EDP* et des conditions aux limites.

Définition 1.1 Classification des EDP

Cette classification est illustrée dans le cas d'équations du second ordre.

- i. On dit qu'une équation aux dérivées partielles est **linéaire** si la dépendance par rapport à la fonction inconnue et ses dérivées partielles est linéaire :

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + e(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + f(x, y) u + g(x, y) = 0$$

L'équation est dite **homogène** si la fonction g est identiquement nulle sur Ω .

- ii. On dit qu'une équation aux dérivées partielles est **semi-linéaire** si la dépendance par rapport aux dérivées partielles d'ordre le plus élevé est linéaire :

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathcal{F}\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

où a, b, c désignent des fonctions des variables x et y , et $\mathcal{F}$ une fonction définie dans un ouvert de $\mathbb{R}^5$.

- iii. On dit qu'une équation aux dérivées partielles est **quasi-linéaire** si elle est de la forme :

$$a\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathcal{F}\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

où a, b, c et $\mathcal{F}$ sont des fonctions définies dans un ouvert de $\mathbb{R}^5$.

- iv. On dit qu'une équation aux dérivées partielles est **complètement non linéaire** si elle dépend non linéairement de ses termes d'ordre le plus élevé.

Cet ouvrage traite plus particulièrement d'équations aux dérivées partielles fréquemment rencontrées en physique, du premier ordre quasi-linéaires et du second ordre semi-linéaires.

Définition 1.2 Classification des conditions aux limites

- i. On appelle **condition de Dirichlet** une condition où on impose la valeur de la fonction recherchée sur le bord $\partial\omega$. Un **problème du premier type** est un problème où tout le bord est soumis à des conditions de Dirichlet.
- ii. On appelle **condition de Neumann** une condition où on impose la valeur de la dérivée normale de la fonction recherchée sur le bord $\partial\omega$. Un **problème du deuxième type** est un problème où tout le bord est soumis à des conditions de Neumann.
- iii. On appelle **condition de Fourier-Robin** une condition où on impose une relation entre la valeur de la dérivée normale de la fonction recherchée et sa valeur sur le bord $\partial\omega$.
- iv. On appelle **problème du troisième type** un problème où les conditions sont de types différents sur des portions du bord.

Remarque 1.1

Dans le cas d'un problème extérieur, l'EDP est généralement complétée par un comportement asymptotique à l'infini.

Le concept même de recherche de solution(s) d'une équation aux dérivées partielles n'est pas forcément très clair, et nécessite d'être précisé pour chaque problème.

Un repère important est la notion de *problème bien posé*.

Définition 1.3

Un problème est *bien posé au sens de Hadamard* s'il existe une *unique* solution qui dépend des données de façon continue[†].

La dernière condition est particulièrement significative en physique. Une EDP traduit en général des principes physiques (comme la conservation de la masse,

[†]. Cette définition suppose le choix d'une mesure « raisonnable » des variations des données.

de l'énergie, de la quantité de mouvement) et des modèles (comme la relation effort/déformation dans un ressort, la loi de la gravitation) dans lesquels on peut avoir une confiance raisonnable. Les données (les valeurs des coefficients, conditions aux limites imposées) sont souvent le résultat de mesures et donc peu fiables. Il est souhaitable que la solution de l'équation aux dérivées partielles présente une certaine stabilité si les données venaient à être légèrement perturbées.

Une première limite du concept de problème bien posé apparaît pour les problèmes physiques où il est connu et souhaité que la solution de l'équation aux dérivées partielles ne soit pas unique (par exemple, dans l'étude des régimes turbulents en mécanique des fluides). Il faut alors classer les solutions en fonction de leurs propriétés (régularité, dimensions caractéristiques, etc.).

Une seconde limite est que le caractère bien posé peut dépendre de la façon dont on recherche la solution. Par exemple, une des premières techniques d'étude des équations aux dérivées partielles consistait à chercher des solutions analytiques (i.e. développables en série entière). Il a été démontré depuis qu'il existe des problèmes avec une unique solution analytique, mais de nombreuses autres solutions (même infiniment dérivables). De tels problèmes sont donc bien posés au sens des fonctions analytiques, mais mal posés dans un cadre plus général.

La question de la régularité[†] des solutions d'une équation aux dérivées partielles est souvent au cœur de son étude.

Le fait qu'une équation aux dérivées partielles présente des dérivées partielles d'ordre k suggère assez naturellement de chercher une solution au moins k fois dérivable ; c'est ce que l'on appelle le *cadre classique* (ceci dit, le fait de mettre en relation une fonction et ses dérivées suggère que toutes ont la même régularité, ce qui conduirait à des solutions infiniment dérivables, d'où la légitimité de chercher des solutions analytiques).

Le cadre classique peut se montrer trop restrictif : les discontinuités sont fréquentes en physique (ondes de choc, hétérogénéités), et il peut être souhaitable de placer l'équation aux dérivées partielles dans un cadre plus large où les solutions peuvent présenter des irrégularités. Dans ce cadre, abordé au chapitre 4, on parle de *solutions faibles* ou *solutions généralisées*. Cependant, le fait d'interpréter l'équation aux dérivées partielles au sens faible n'empêche pas de chercher des solutions classiques : une fois qu'une solution faible a été obtenue, on peut chercher à prouver qu'elle possède en fait des propriétés de régularité au sens « classique » (continuité, dérivabilité, etc.).

[†]. Le terme régularité est un raccourci pour parler des propriétés de continuité, dérivabilité (classique ou faible) d'une fonction, et de l'appartenance de la fonction et de ses dérivées à certains espaces de Lebesgue.