

Grundlagen der Differential- und Integralrechnung



Analysis

Grundlagen der Differential- und Integralrechnung

Lucien Sina

21.6.2026

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	1
2	Vollständige Induktion und Kombinatorik	3
2.1	Beweis durch vollständige Induktion . . .	4
2.2	Summenzeichen	9
2.3	Produktzeichen und Fakultät	12
2.4	Der Binomialkoeffizient	15
2.5	Der binomische Lehrsatz	19
2.5.1	Folgerungen aus dem binomischen Lehrsatz	23
2.6	Die geometrische Reihe	26
2.7	Aufgaben und Lösungen	28
3	Die Körperaxiome der reellen Zahlen	36
3.1	Die Axiome der Addition	37
3.1.1	Folgerungen der Additionsaxiome .	38
3.2	Multiplikationsaxiome und Distributivgesetz	42
3.2.1	Folgerungen	43
3.3	Allgemeines Assoziativgesetz	50

INHALTSVERZEICHNIS

3.4	Allgemeines Kommutativgesetz	52
3.4.1	Doppelsummen und Doppelprodukte	54
3.5	Das allgemeine Distributivgesetz	55
3.6	Potenzen	57
3.6.1	Rechenregeln für Potenzen	58
3.7	Verallgemeinerung und Beispiele	61
4	Die Anordnungsaxiome	63
4.1	Die Anordnungsaxiome	64
4.2	Folgerungen	66
4.2.1	Vergleichbarkeit und Extremwerte	66
4.2.2	Transitivität der strikten Ordnung	69
4.2.3	Translationsinvarianz der Ordnung	70
4.2.4	Vorzeichenwechsel und Umkehrung der Ordnung	71
4.2.5	Additive Verträglichkeit der Ordnung	72
4.2.6	Monotonie der Multiplikation mit positiven Zahlen	73
4.2.7	Vergleich von Produkten	74
4.2.8	Monotonie der Multiplikation mit negativen Zahlen	76
4.2.9	Positivität von Quadraten und von 1	77
4.2.10	Positivität des multiplikativen In- versen	78
4.2.11	Monotonie der Inversen	80
4.2.12	Angeordnete Körper	81
4.3	Die natürlichen Zahlen als Teilmenge der reellen Zahlen	84
4.3.1	Die Peano-Axiome	84

INHALTSVERZEICHNIS

4.3.2	Verifikation der Peano-Axiome . . .	86
4.4	Der Absolutbetrag	95
4.4.1	Weitere Eigenschaften des Absolutbetrags	99
4.5	Das archimedische Axiom	103
4.5.1	Folgerungen	105
4.5.2	Die bernoullische Ungleichung . . .	109
4.5.3	Wachstum und Abklingen von Potenzen	111
4.6	Aufgaben und Lösungen zu den Körperaxiomen der reellen Zahlen	113
4.7	Aufgaben und Lösungen zu Anordnung, Betrag und archimedischem Axiom	121
5	Folgen und Grenzwerte	133
5.1	Beispiele für Folgen	135
5.2	Geometrische Interpretation	138
5.3	Beispiele	140
5.4	Folgenbeschränktheit	144
5.5	Eindeutigkeit des Grenzwerts	147
5.6	Rechenregeln für Grenzwerte	148
5.6.1	Summen konvergierender Folgen .	148
5.6.2	Produkte konvergierender Folgen .	149
5.6.3	Quotient konvergierender Folgen .	152
5.6.4	Monotonieverhalten des Grenzwerts	154
5.7	Divergenz gegen $\pm\infty$	156
5.8	Kehrwerte und Grenzwerte	159
5.9	Aufgaben und Lösungen	163

6	Das Vollständigkeitsaxiom	170
6.1	Cauchy-Folgen	171
6.1.1	Die Irrationalität von $\sqrt{2}$	173
6.1.2	Weshalb das Vollständigkeitsaxiom neu ist	174
6.1.3	Existenz von Quadratwurzeln po- sitiver reeller Zahlen	175
6.2	Das Intervallschachtelungsprinzip	176
6.2.1	Äquivalenz von Vollständigkeitsaxi- om und Intervallschachtelungsprinzip	179
6.3	Teilfolgen	183
6.4	Folgenmonotonie	195
6.5	Die Axiome der reellen Zahlen	200
6.5.1	Ausblick	202
7	Existenz von Quadratwurzeln	203
7.1	Supremum und Infimum	204
7.2	Die Existenz einer positiven Quadratwurzel	205
7.3	Das Heron-Verfahren	208
7.4	Quadratische Konvergenz	211
8	Konvergenzkriterien für Reihen	213
8.1	Cauchy-Konvergenzkriterium für Reihen .	214
8.2	Die geometrische Reihe	219
8.3	Konvergenz alternierender Reihen	222
8.4	Absolute Konvergenz	229
8.5	Der Reihenumordnungssatz	235
8.6	Umordnungen und bedingte Konvergenz .	238
8.7	Aufgaben und Lösungen	240

9	Punktmengen	244
9.1	Intervalle	245
9.2	Supremum und Infimum von Punktmengen	246
9.3	Limes superior und Limes inferior	250
10	Stetige Funktionen	256
10.1	Funktionen	257
10.1.1	Funktionsoperationen	260
10.1.2	Komposition von Funktionen	261
10.2	Funktionsgrenzwerte	262
10.3	Stetigkeit einer Funktion	268
10.4	Aufgaben	272
10.5	Der Zwischenwertsatz	274
10.6	Beschränkte Funktionen und Extremwerte	280
10.7	Gleichmäßige Stetigkeit	288
10.7.1	Treppenfunktionen und Approximation stetiger Funktionen	292
10.8	Aufgaben	295
11	Elementare Funktionen	301
11.1	Monotone Funktionen und Umkehrfunktionen	302
11.2	Potenz- und Wurzelfunktionen	308
11.3	Exponential- und Logarithmusfunktionen	311
11.3.1	Exponentialfunktion zur Basis a	314
11.4	Grenzwerte von Potenz- und Logarithmusfunktionen	325
11.5	Landau-Notation	329
11.6	Aufgaben und Lösungen	333
11.7	Trigonometrische Funktionen	337

INHALTSVERZEICHNIS

11.7.1	Der Einheitskreis und das Bogenmaß	338
11.8	Die Zahl π	349
11.9	Aufgaben zu den trigonometrischen Funktionen	361
12	Differentiation	365
12.1	Differenzierbarkeit von Funktionen	366
12.2	Geometrische Darstellung	368
12.3	Beispiele zur Berechnung von Ableitungen	369
12.4	Aufgaben und Lösungen	393
13	Lokale Extrema und der Mittelwertsatz	399
13.1	Lokale Extrema	400
13.2	Der Mittelwertsatz	404
13.3	Monotonie	407
13.4	Regeln von de l'Hospital	419
13.5	Beispiele zu den Regeln von de l'Hospital	423
13.6	Aufgaben und Lösungen	426
14	Integration	436
14.1	Treppenfunktionen	437
14.2	Ober- und Unterintegral	445
14.2.1	Integrabilität	449
14.2.2	Riemann-Integrierbarkeit	454
14.2.3	Mittelwertsatz der Integralrechnung	470
14.3	Riemannsche Summen	474
14.3.1	Zerlegungen und Feinheit	475
14.3.2	Riemannsche Summen und Integral	476
14.3.3	Riemannsche Summen und Zerlegung des Intervalls	479

15 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	485
15.1 Integralfunktionen	486
15.1.1 Stammfunktionen	489
15.2 Beispiele zur Berechnung bestimmter Integrale	492
15.3 Zusammenfassung: Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	493
15.4 Integrationsmethoden	494
15.4.1 Die Substitutionsregel	495
15.4.2 Beispiele zur Substitutionsregel . .	496
15.4.3 Partielle Integration	498
15.4.4 Partialbruchzerlegung	502
15.4.5 Trigonometrische Integrale	506
15.5 Aufgaben	509
16 Uneigentliche Integrale	514
16.1 Definition uneigentlicher Integrale	515
16.1.1 Unendliche Integrationsgrenzen . .	515
16.1.2 Undefinierte Integranden an einer Integrationsgrenze	516
16.1.3 Der allgemeine Fall	517
16.2 Erste Beispiele	518
16.3 Ausblick	521
16.4 Das Integralkriterium für Reihen	521
16.5 Aufgaben und Lösungen	525
17 Gleichmäßige Konvergenz	528
17.1 Funktionenfolgen	529
17.2 Punktweise Konvergenz	530

INHALTSVERZEICHNIS

17.3	Gleichmäßige Konvergenz	531
17.4	Erste Leitidee	532
17.5	Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit .	533
17.6	Supremumsnorm und gleichmäßige Konvergenz	536
17.7	Gleichmäßige Konvergenz und Integration	541
17.8	Gleichmäßige Konvergenz und Differentiation	546
17.9	Potenzreihen	550
17.9.1	Definition und erste Beispiele . . .	550
17.9.2	Ein erster Konvergenzsatz	551
17.9.3	Der Konvergenzradius	553
17.9.4	Erste Orientierung	555
17.9.5	Gleichmäßige Konvergenz im Inneren des Konvergenzradius	555
17.9.6	Gliedweise Differentiation von Potenzreihen	557
17.9.7	Folgerung: Gliedweise Integration .	561
17.9.8	Beispiele	562
17.10	Aufgaben mit Lösungen	568
18	Taylorreihen	579
18.1	Motivation und erste Orientierung	579
18.1.1	Eine erste Folgerung aus der Taylorformel	582
18.2	Das Restglied von Lagrange	583
18.3	Taylorpolynome	585
18.4	Eine Folgerung aus dem Restglied von Lagrange	586

INHALTSVERZEICHNIS

18.5 Beispiele zu Taylorentwicklungen	588
18.6 Potenzreihen als Taylorreihen	593
18.7 Der Abelsche Grenzwertsatz	595
18.8 Aufgaben mit Lösungen	598
19 Abschliessende Worte	610
19.1 Zusammenfassung	610
19.2 Ausblick	614
19.3 Buchempfehlungen	617
19.4 Die Lernreihe	620

Kapitel 1

Vorwort

Die Analysis gehört zu den grundlegenden Gebieten der Mathematik und ist zugleich für viele andere mathematisch orientierte Studiengänge von zentraler Bedeutung. Insbesondere für Studierende der Mathematik, der Informatik, der Physik und der Ingenieurwissenschaften bildet sie eine unverzichtbare Grundlage für das weitere Studium.

Dieses Buch richtet sich vor allem an Studierende der ersten beiden Semester, insbesondere an diejenigen, die sich im ersten Semester zum ersten Mal systematisch mit der Analysis auseinandersetzen. Der Schwerpunkt liegt auf einer sorgfältigen Einführung in die zentralen Begriffe und Methoden der Analysis. Dazu gehören unter anderem vollständige Induktion, die Eigenschaften der reellen Zahlen, Folgen und Reihen, Stetigkeit, Differentiation, Integration sowie weiterführende Themen wie

gleichmäßige Konvergenz, Potenzreihen und Taylorreihen.

Bei der Darstellung wird besonderer Wert auf mathematische Präzision gelegt. Begriffe werden exakt eingeführt, Zusammenhänge sorgfältig entwickelt und Aussagen konsequent bewiesen. Zugleich wurde darauf geachtet, die einzelnen Inhalte nicht nur formal, sondern auch anschaulich und nachvollziehbar zu vermitteln. Viele Beispiele, Bemerkungen und Aufgaben sollen dabei helfen, den Stoff nicht nur zu lesen, sondern wirklich zu verstehen.

Das Buch ist so aufgebaut, dass es sowohl zur Begleitung einer Vorlesung als auch zum eigenständigen Studium verwendet werden kann. Ausführliche Herleitungen und zahlreiche Aufgaben mit Lösungen sollen den Zugang zur Analysis erleichtern und den Leserinnen und Lesern ermöglichen, den Stoff systematisch zu erarbeiten und zu festigen.

Mein Ziel war es, ein Lehrbuch zu schreiben, das den mathematischen Inhalt ernst nimmt, ohne unnötig abschreckend zu wirken. Die Analysis ist für viele Studierende zunächst ein anspruchsvolles Gebiet, gewinnt aber mit wachsendem Verständnis an Klarheit und Struktur. Wenn dieses Buch dazu beiträgt, diesen Zugang zu erleichtern und vielleicht sogar ein wenig Freude an der Mathematik zu vermitteln, hat es seinen Zweck erfüllt.

Lucien Sina

Kapitel 2

Vollständige Induktion und Kombinatorik

Die Analysis beschäftigt sich mit stetigen Veränderungen, mit Grenzprozessen, mit Reihen, Folgen, Funktionen und der Frage, wie aus endlich vielen Schritten ein allgemeines Gesetz für unendlich viele Fälle entsteht. Gerade deshalb ist es hilfreich, das Studium der Analysis mit einem Beweisprinzip zu beginnen, das genau diese Art des schrittweisen Denkens formalisiert: der vollständigen Induktion.

Mit ihrer Hilfe lassen sich Aussagen über alle natürlichen Zahlen beweisen, indem man zunächst den ersten Fall zeigt und anschließend nachweist, dass aus der Gültigkeit eines beliebigen Falls die Gültigkeit des

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

nächsten folgt. Auf diese Weise wird aus einer einzelnen sicheren Ausgangslage ein allgemein gültiger Schluss. Dieses Prinzip begegnet uns in der Analysis immer wieder, etwa bei Summenformeln, Ungleichungen, Rekursionen, Folgenabschätzungen und vielen weiteren Aussagen, die eine natürliche Zahl als Parameter besitzen.

Die vollständige Induktion ist daher nicht nur ein technisches Hilfsmittel, sondern ein zentrales Denkwerkzeug der Mathematik. Wer sie sicher beherrscht, besitzt ein wichtiges Fundament für das Verständnis und den Aufbau der Analysis.

2.1 Beweis durch vollständige Induktion

Das Prinzip der vollständigen Induktion beruht auf einer fundamentalen Eigenschaft der natürlichen Zahlen: Jede natürliche Zahl ist entweder der Anfang der Folge oder sie entsteht aus einer kleineren natürlichen Zahl durch das Hinzufügen von 1. Genau diese Struktur macht es möglich, Aussagen für alle natürlichen Zahlen aus einem Anfangsfall und einem Vererbungsschritt herzuleiten.

Definition 1 (Prinzip der vollständigen Induktion). *Sei $M \subseteq \mathbb{N}_0$. Gilt*

1. $0 \in M$ und

2. für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: Aus $n \in M$ folgt $n + 1 \in M$,

dann ist bereits $M = \mathbb{N}_0$.

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

Dieses Prinzip kann auch in Form einer allgemeinen Aussage über Eigenschaften formuliert werden:

Definition 2 (Induktionsprinzip in Aussageform). *Sei $P(n)$ eine Aussage über $n \in \mathbb{N}_0$. Wenn*

- 1. $P(0)$ wahr ist und*
- 2. für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ aus der Gültigkeit von $P(n)$ die Gültigkeit von $P(n + 1)$ folgt,*

dann ist $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ wahr.

Ein Beweis durch vollständige Induktion besteht daher immer aus zwei wesentlichen Teilen:

- 1. Induktionsanfang:** Man zeigt, dass die Aussage für den ersten relevanten Wert der natürlichen Zahl gilt.
- 2. Induktionsschritt:** Man nimmt an, die Aussage gelte für ein beliebiges, aber festes n , und zeigt dann, dass sie auch für $n + 1$ gilt.

Der Induktionsschritt ist dabei der entscheidende Übergang. Er zeigt nicht nur, dass ein einzelner Fall wahr ist, sondern dass sich die Wahrheit der Aussage entlang der natürlichen Zahlen fortpflanzt. Ist der Anfang gesichert, so ist damit automatisch jeder weitere Fall erfasst.

Man spricht dabei von einer *vollständigen* Induktion, weil nicht einzelne Zahlen isoliert überprüft werden,

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

sondern das gesamte unendliche System der natürlichen Zahlen durch eine allgemeine logische Struktur erfasst wird. Gerade in der Analysis ist dieses Verfahren von besonderer Bedeutung, da viele Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$ oder $n \in \mathbb{N}_0$ bewiesen werden müssen.

Bemerkung 3. *Je nach Konvention beginnt man die natürlichen Zahlen bei 0 oder bei 1. Die hier verwendete Form mit $\mathbb{N}_0$ enthält die 0. Falls in einem späteren Kapitel mit $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ gearbeitet wird, ändert sich lediglich der Induktionsanfang, nicht aber das grundlegende Prinzip.*

Das Prinzip der vollständigen Induktion entfaltet seine Stärke besonders dann, wenn man es an einer konkreten Aussage sieht. Ein klassisches Beispiel dafür ist die Summe der ersten n natürlichen Zahlen. An ihr lässt sich sehr gut erkennen, wie ein Beweis durch Induktion aufgebaut ist und warum der Übergang von n zu $n + 1$ das eigentliche Herzstück des Verfahrens bildet.

Beispiel 4 (Kleine Gaußsche Summenformel). *Eine der ersten und zugleich bekanntesten Anwendungen der vollständigen Induktion ist die Summenformel*

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Sie beschreibt die Summe der ersten n natürlichen Zahlen und wird deshalb oft als kleine Gaußsche Summenformel bezeichnet.

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

Auf den ersten Blick scheint die linke Seite für jedes neue n eine neue Rechnung zu verlangen. Die Formel zeigt jedoch, dass sich diese Summe in eine einfache geschlossene Darstellung überführen lässt. Gerade solche Aussagen sind für die Analysis typisch: Aus einer Folge einzelner Werte entsteht ein allgemeines Gesetz.

Beweis. Wir beweisen die Formel durch vollständige Induktion über n .

Zur besseren Übersicht bezeichnen wir die Summe der ersten n natürlichen Zahlen mit

$$S_n := 1 + 2 + \cdots + n.$$

Zu zeigen ist also:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

1. Induktionsanfang. Für $n = 1$ ist

$$S_1 = 1.$$

Andererseits ergibt die rechte Seite

$$\frac{1 \cdot 2}{2} = 1.$$

Die Aussage ist also für den Anfangswert $n = 1$ richtig.

2. Induktionsschritt. Nun nehmen wir an, die Formel gelte bereits für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Das heißt,

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

Diese Annahme nennt man *Induktionsvoraussetzung*. Sie bedeutet nicht, dass wir die Aussage nur für dieses eine n beweisen wollen, sondern dass wir sie als bereits bekannt voraussetzen, um daraus den nächsten Fall abzuleiten.

Wir betrachten nun die Summe bis $n + 1$:

$$S_{n+1} = 1 + 2 + \cdots + n + (n + 1).$$

Da $1 + 2 + \cdots + n = S_n$ ist, erhalten wir mit der Induktionsvoraussetzung

$$S_{n+1} = S_n + (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1).$$

Jetzt ziehen wir $n + 1$ als gemeinsamen Faktor heraus:

$$S_{n+1} = (n + 1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = (n + 1) \left(\frac{n + 2}{2} \right).$$

Damit folgt

$$S_{n+1} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}.$$

Das ist genau die gewünschte Formel für den Fall $n + 1$.

Da der Anfang gezeigt wurde und aus der Gültigkeit für n stets die Gültigkeit für $n + 1$ folgt, ist die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. $\square$

Dieses Beispiel zeigt das Grundmuster der vollständigen Induktion besonders klar: Zuerst wird ein Anfang gesichert, dann wird gezeigt, dass jeder Fall den nächsten nach sich zieht. Auf diese Weise kann eine Aussage nicht nur für einige Zahlen, sondern für alle natürlichen Zahlen bewiesen werden.

2.2 Summenzeichen

Wenn in der Analysis viele Terme addiert werden, wäre es unpraktisch, jede Summe immer vollständig auszu-schreiben. Daher verwendet man ein eigenes Zeichen für Summen, das sogenannte *Summenzeichen*. Es erlaubt, lange Additionen übersichtlich und allgemein zu notieren.

Definition 5 (Summenzeichen). *Seien $a_1, a_2, \dots, a_n$ Zahlen und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann bedeutet*

$$\sum_{i=1}^n a_i := a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Die Zahl i heißt Laufindex oder Summationsindex. Sie dient nur dazu, die einzelnen Summanden zu ordnen und wird innerhalb der Summe nicht unabhängig betrachtet.

Mit Hilfe des Summenzeichens lassen sich viele Aussagen sehr kompakt formulieren. Besonders häufig treten Summen auf, deren Glieder von einer natürlichen Zahl abhängen. Genau in solchen Situationen ist die vollständige Induktion ein besonders geeignetes Beweisverfahren.

Im Folgenden beweisen wir ein klassisches Beispiel, das zugleich eine wichtige Rolle beim Umgang mit Summen spielt.

Beispiel 6 (Summe der ersten ungeraden Zahlen). *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2.$$

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

Mit anderen Worten: Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist stets gleich dem Quadrat von n .

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion über n .

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist

$$\sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

und zugleich gilt

$$1^2 = 1.$$

Die Behauptung ist also für $n = 1$ richtig.

Induktionsvoraussetzung: Es gelte für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ bereits

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2.$$

Induktionsschritt: Nun zeigen wir, dass dann auch die Aussage für $n + 1$ gilt. Dazu betrachten wir

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1).$$

Wir trennen den letzten Summanden ab:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) = \sum_{i=1}^n (2i - 1) + (2(n + 1) - 1).$$

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

Mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) = n^2 + 2n + 1.$$

Da

$$n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

gilt, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) = (n + 1)^2.$$

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt.

Also gilt

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

□

Die vollständige Induktion und viele der bisherigen Beispiele beruhen auf den natürlichen Zahlen. Daher führen wir nun die wichtigsten Zahlenmengen ein, die im weiteren Verlauf der Analysis ständig verwendet werden.

Definition 7 (Natürliche Zahlen). *Die Menge der natürlichen Zahlen ist*

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Ergänzt man zusätzlich die Zahl 0, so erhält man die Menge

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

Die natürlichen Zahlen dienen insbesondere zum Zählen und Ordnen. Wegen ihrer schrittweisen Struktur bilden sie die Grundlage der vollständigen Induktion.

Um auch Differenzen natürlicher Zahlen ohne Einschränkung bilden zu können, erweitert man die natürlichen Zahlen zu den ganzen Zahlen.

Definition 8 (Ganze Zahlen). *Die Menge der ganzen Zahlen ist*

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Sie enthält also sowohl die positiven als auch die negativen ganzen Zahlen sowie die 0.

Bemerkung 9. *Die vollständige Induktion ist ein Beweisverfahren und keine Definition der natürlichen Zahlen. Sie ist jedoch eng mit den natürlichen Zahlen verbunden, da diese in einer fortlaufenden Reihenstruktur angeordnet sind. Genau diese Struktur ermöglicht den Übergang von n auf $n + 1$ im Induktionsschritt.*

Im weiteren Verlauf werden noch weitere Zahlenmengen eingeführt, insbesondere die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Für die Grundlagen der vollständigen Induktion genügen jedoch zunächst die natürlichen Zahlen.

2.3 Produktzeichen und Fakultät

Produktzeichen und Fakultät sind nicht nur nützliche Abkürzungen für wiederholte Multiplikationen, sondern

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

auch zentrale Begriffe der Kombinatorik. In diesem Gebiet der Mathematik untersucht man, wie viele Möglichkeiten bestimmte Anordnungen und Auswahlvorgänge zulassen. Die Fakultät tritt dabei ganz natürlich auf, weil sie die Anzahl aller möglichen Reihenfolgen einer endlichen Menge beschreibt. Wie das Summenzeichen lange Additionen kompakt darstellt, so dient das *Produktzeichen* dazu, längere Multiplikationen übersichtlich zu notieren. Es spielt in der Analysis ebenso wie in der Kombinatorik eine wichtige Rolle.

Definition 10 (Produktzeichen). *Seien $a_1, a_2, \dots, a_n$ Zahlen und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann bedeutet*

$$\prod_{i=1}^n a_i := a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n.$$

Die Zahl i heißt wieder Laufindex oder Multiplikationsindex. Sie dient nur dazu, die Faktoren der Reihe nach zu ordnen.

Analog zur Summe betrachtet man auch das leere Produkt. Es ist zweckmäßig, dieses als 1 zu definieren, da 1 das neutrale Element der Multiplikation ist.

Bemerkung 11 (Leeres Produkt). *Für $n = 0$ setzt man*

$$\prod_{i=1}^0 a_i := 1.$$

Diese Konvention ist nicht willkürlich, sondern macht viele Formeln einheitlich und ohne Sonderfälle gültig.

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

Eine besonders wichtige Anwendung des Produktzeichens ist die *Fakultät*.

Definition 12 (Fakultät). Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man die Fakultät durch

$$n! := \prod_{k=1}^n k.$$

Damit gilt insbesondere

$$1! = 1, \quad 2! = 1 \cdot 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3, \quad \dots$$

und wegen der Konvention für das leere Produkt auch

$$0! = 1.$$

Die Fakultät zählt in der Kombinatorik die Anzahl aller möglichen Anordnungen von n verschiedenen Elementen.

Theorem 13 (Anordnungen einer n -elementigen Menge). Sei M eine Menge mit genau n Elementen. Dann gibt es genau $n!$ verschiedene Anordnungen der Elemente von M .

Beweis. Wir begründen die Aussage Schritt für Schritt.

Für das erste Element einer Anordnung gibt es n Möglichkeiten, denn jedes der n Elemente kann an erster Stelle stehen. Hat man ein erstes Element gewählt, so bleiben noch $n - 1$ Elemente übrig, also gibt es für die zweite Stelle $n - 1$ Möglichkeiten. Für die dritte Stelle bleiben dann noch $n - 2$ Möglichkeiten, und so weiter.

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

Fortgesetzt bis zur letzten Stelle erhält man insgesamt

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1 = n!.$$

Also besitzt eine n -elementige Menge genau $n!$ verschiedene Anordnungen. $\square$

Beispiel 14. *Eine Menge mit drei Elementen besitzt genau*

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

verschiedene Anordnungen. Sind die Elemente etwa a, b, c , so lauten diese Anordnungen:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

Bemerkung 15. *Die Fakultät wächst sehr schnell. Schon für $n = 5$ gilt $5! = 120$, und für größere Zahlen werden die Werte rasch sehr groß. Gerade deshalb ist die Fakultät in der Analysis von Bedeutung, etwa bei Reihen, Abschätzungen und später auch bei der Taylorentwicklung.*

2.4 Der Binomialkoeffizient

In der Kombinatorik tritt immer wieder dieselbe Frage auf: Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus einer endlichen Menge einige Elemente auszuwählen, ohne ihre Reihenfolge zu beachten? Genau für solche Zählprobleme wurde der Binomialkoeffizient eingeführt. Er ist einer der wichtigsten Zahlenbegriffe der elementaren Kombinatorik und spielt später auch in der Analysis, etwa im Binomischen Lehrsatz und bei Reihenentwicklungen, eine zentrale Rolle.

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

Definition 16 (Binomialkoeffizient). Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ definiert man den Binomialkoeffizienten durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Für $k > n$ setzt man ergänzend

$$\binom{n}{k} := 0.$$

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ wird gesprochen als „ n über k “. Er zählt die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer n -elementigen Menge genau k Elemente auszuwählen, wenn die Reihenfolge der Auswahl keine Rolle spielt.

Theorem 17 (Pascal'sche Rekursionsformel). Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \{1, \dots, n-1\}$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Beweis. Wir geben einen kombinatorischen Beweis.

Betrachte eine Menge M mit n Elementen und fixiere ein bestimmtes Element $x \in M$. Gesucht ist die Anzahl aller k -elementigen Teilmengen von M . Diese Anzahl ist per Definition gerade $\binom{n}{k}$.

Nun teilen wir alle k -elementigen Teilmengen von M in zwei disjunkte Fälle ein:

1. Die Teilmenge enthält das Element x .

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

2. Die Teilmenge enthält das Element x nicht.

Im ersten Fall muss man neben x noch $k - 1$ weitere Elemente aus den verbleibenden $n - 1$ Elementen auswählen. Das ist auf $\binom{n-1}{k-1}$ Arten möglich.

Im zweiten Fall wird x nicht gewählt, also müssen alle k Elemente aus den übrigen $n - 1$ Elementen stammen. Das ist auf $\binom{n-1}{k}$ Arten möglich.

Da sich beide Fälle gegenseitig ausschließen und zusammen alle Möglichkeiten erfassen, ist die Gesamtzahl der k -elementigen Teilmengen gleich

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Andererseits ist diese Gesamtzahl per Definition $\binom{n}{k}$. Also gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Bemerkung 18. *Die Pascal'sche Formel ist eine Rekursionsformel: Sie drückt einen Binomialkoeffizienten durch zwei benachbarte Binomialkoeffizienten aus. Sie ist daher besonders nützlich, um Tabellen von Binomialkoeffizienten schrittweise aufzubauen.*

Die kombinatorische Bedeutung des Binomialkoeffizienten zeigt der folgende grundlegende Satz. Er erklärt, warum der Ausdruck

$$\binom{n}{k}$$

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

gerade die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge beschreibt.

Theorem 19 (Anzahl der k -elementigen Teilmengen).
Sei M eine Menge mit genau n Elementen und sei $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Dann gibt es genau

$$\binom{n}{k}$$

verschiedene k -elementige Teilmengen von M .

Beweis. Wir zählen die k -elementigen Teilmengen von M .

Zunächst betrachten wir nicht die Teilmengen selbst, sondern geordnete Auswahlen von k verschiedenen Elementen aus M . Für das erste Element gibt es n Möglichkeiten, für das zweite noch $n-1$, dann $n-2$ und so weiter, bis für das k -te Element noch $n-k+1$ Möglichkeiten bleiben. Insgesamt gibt es also

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

solche geordneten Auswahlen.

Jede k -elementige Teilmenge wird dabei jedoch mehrfach gezählt, nämlich genau so oft, wie es Anordnungen ihrer k Elemente gibt. Das sind $k!$ verschiedene Anordnungen.

Daher erhält man die Anzahl der k -elementigen Teilmengen, indem man die Zahl der geordneten Auswahlen

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

durch $k!$ teilt:

$$\frac{1}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Nach Definition des Binomialkoeffizienten ist dies gerade

$$\binom{n}{k}.$$

Also besitzt eine n -elementige Menge genau $\binom{n}{k}$ verschiedene k -elementige Teilmengen. $\square$

2.5 Der binomische Lehrsatz

Wenn man Potenzen eines Binoms $(a+b)$ ausmultipliziert, entstehen mit wachsendem Exponenten immer längere Ausdrücke. Bemerkenswert ist jedoch, dass sich diese Ausdrücke nach einem sehr regelmäßigen Muster zusammensetzen. Genau dieses Muster beschreibt der binomische Lehrsatz. Er gehört zu den wichtigsten Formeln der Algebra und spielt auch in der Analysis eine zentrale Rolle, etwa bei Reihenentwicklungen und Abschätzungen.

Ordnet man die zugehörigen Koeffizienten zeilenweise an, so erhält man das *Pascal'sche Dreieck*. In jeder Zeile stehen die Binomialkoeffizienten, und jeder innere Eintrag ergibt sich als Summe der beiden darüberstehenden Einträge. Die Pascal'sche Rekursionsformel erklärt genau diese Regel.

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

Bemerkung 20 (Pascal'sches Dreieck). *Die Binomialkoeffizienten lassen sich in folgender Weise anordnen:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & \\ & & & & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & & & & & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ & & & & & & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{array}$$

und so weiter.

Dabei gilt am Rand stets

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

und für die inneren Einträge die Rekursionsformel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad (1 \leq k \leq n-1).$$

Diese beiden Eigenschaften beschreiben das Pascal'sche Dreieck vollständig.

Nachdem die Binomialkoeffizienten als Zählzahlen eingeführt worden sind, erscheint nun ihre zweite zentrale Bedeutung: Sie sind genau die Koeffizienten in der Entwicklung einer Potenz von $(a+b)$. Der folgende Satz beschreibt diesen Zusammenhang.

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

Theorem 21 (Binomischer Lehrsatz). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion über n .

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist

$$(a + b)^1 = a + b.$$

Andererseits ergibt die rechte Seite

$$\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b.$$

Die Aussage ist also für $n = 1$ richtig.

Induktionsvoraussetzung: Es gelte für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Induktionsschritt: Wir zeigen nun die Behauptung für $n + 1$. Dazu schreiben wir

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)^n (a + b).$$

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

Mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$(a+b)^{n+1} = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) (a+b).$$

Ausmultiplizieren liefert

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}.$$

Im zweiten Summanden führen wir den Indexwechsel $k \mapsto k-1$ durch:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k.$$

Damit erhalten wir

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}.$$

Mit der Pascal'schen Rekursionsformel folgt für $1 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Außerdem gilt

$$a^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 \quad \text{und} \quad b^{n+1} = \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1}.$$

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

Also ist

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

Damit ist auch der Induktionsschritt gezeigt.

Also gilt die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung 22. *Der binomische Lehrsatz erklärt zugleich, warum die Binomialkoeffizienten im Pascal'schen Dreieck genau die richtigen Koeffizienten für die Entwicklung von $(a + b)^n$ sind. Die Struktur des Dreiecks spiegelt also unmittelbar die Algebra der Potenzentwicklung wider.*

2.5.1 Folgerungen aus dem binomischen Lehrsatz

Aus dem binomischen Lehrsatz lassen sich durch geschickte Wahl der Parameter sofort wichtige Identitäten für Binomialkoeffizienten ableiten. Zwei besonders bekannte Formeln entstehen, wenn man a und b gleich 1 bzw. 1 und -1 setzt. Dabei zeigt sich zugleich, wie eng Algebra und Kombinatorik miteinander verbunden sind.

Der binomische Lehrsatz liefert nicht nur eine Formel zur Entwicklung von $(a + b)^n$, sondern auch sofort einige wichtige Identitäten für Binomialkoeffizienten. Besonders elegant werden diese sichtbar, wenn man für a und b spezielle Werte einsetzt. Im Zusammenspiel mit der kombinatorischen Deutung der Binomialkoeffizienten ergeben sich so zwei grundlegende Summenformeln.

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

Theorem 23. *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt außerdem

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Beweis. Wir wenden den binomischen Lehrsatz an.

Setzt man in

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

die Werte $a = 1$ und $b = 1$ ein, so erhält man

$$(1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k.$$

Da $1^{n-k} = 1$ und $1^k = 1$ gilt, folgt

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

Damit ist die erste Behauptung bewiesen.

Setzt man nun $a = 1$ und $b = -1$, so folgt

$$(1 + (-1))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k.$$

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

Also ist

$$0^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist $0^n = 0$, also

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Damit ist auch die zweite Behauptung gezeigt. $\square$

Bemerkung 24 (Kombinatorische Deutung der ersten Identität). *Die Gleichung*

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

lässt sich auch direkt kombinatorisch verstehen. Nach dem Satz über die Anzahl der k -elementigen Teilmengen gibt $\binom{n}{k}$ an, wie viele Teilmengen mit genau k Elementen eine n -elementige Menge besitzt. Summiert man über alle möglichen Werte von k , so zählt man alle Teilmengen einer n -elementigen Menge.

Da jeder der n Elemente entweder in einer Teilmenge enthalten ist oder nicht, gibt es für jedes Element genau zwei Möglichkeiten. Insgesamt besitzt eine n -elementige Menge daher genau

$$2^n$$

Teilmengen. Somit ist

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

auch aus kombinatorischer Sicht unmittelbar einleuchtend.

2.6 Die geometrische Reihe

Ein besonders wichtiger Spezialfall von Summen entsteht, wenn die Summanden durch wiederholtes Multiplizieren mit derselben Zahl erzeugt werden. Solche Reihen heißen *geometrische Reihen*. Sie treten in vielen Bereichen der Mathematik auf, etwa bei Abschätzungen, bei Grenzwertbetrachtungen, in der Zinsrechnung und später auch bei Potenzreihen.

Theorem 25 (Formel der geometrischen Reihe). *Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 1$ und sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion über n .

Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist

$$\sum_{k=0}^0 a^k = a^0 = 1.$$

Andererseits gilt

$$\frac{1 - a^{0+1}}{1 - a} = \frac{1 - a}{1 - a} = 1.$$

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

Die Aussage ist also für $n = 0$ richtig.

Induktionsvoraussetzung: Es gelte für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ bereits

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Induktionsschritt: Wir zeigen nun die Formel für $n + 1$. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^n a^k + a^{n+1}.$$

Mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} + a^{n+1}.$$

Wir bringen auf einen gemeinsamen Nenner:

$$\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} + a^{n+1} = \frac{1 - a^{n+1} + a^{n+1}(1 - a)}{1 - a}.$$

Nach Ausmultiplizieren erhält man

$$\frac{1 - a^{n+1} + a^{n+1} - a^{n+2}}{1 - a} = \frac{1 - a^{n+2}}{1 - a}.$$

Damit gilt

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \frac{1 - a^{n+2}}{1 - a}.$$

Also ist die Aussage auch für $n + 1$ gezeigt.

Somit gilt die Formel für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

□

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

Bemerkung 26. Für $a = 1$ ist die Formel in dieser Form nicht definiert. In diesem Fall gilt jedoch unmittelbar

$$\sum_{k=0}^n 1^k = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1.$$

Die allgemeine Formel zeigt besonders schön, wie aus einer einfachen wiederholten Struktur eine geschlossene Darstellung entsteht.

Später wird die geometrische Reihe unter anderem für Grenzwerte, Reihen und Abschätzungen wichtig sein. Sie gehört daher zu den grundlegenden Werkzeugen der Analysis.

Die geometrische Reihe bildet einen passenden Abschluss dieses Kapitels. An ihr zeigt sich noch einmal, wie wirkungsvoll die vollständige Induktion als Beweisprinzip ist und wie eng sie mit dem Zählen, dem Summieren und der algebraischen Struktur natürlicher Zahlen verbunden ist. Damit sind die wesentlichen Grundlagen gelegt, auf denen die weitere Analysis aufbaut.

2.7 Aufgaben und Lösungen

Die folgenden Aufgaben greifen die zentralen Inhalte dieses Kapitels noch einmal auf. Zu jeder Untersektion gibt es genau eine Aufgabe mit einer direkt anschließenden Lösung. Auf diese Weise lassen sich die Begriffe und Beweisideen Schritt für Schritt wiederholen.

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

1.1 Beweis durch vollständige Induktion

Übung 27. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Lösung 28. Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion über n .

Für $n = 1$ ist

$$1 = 1^2.$$

Die Behauptung ist also für den Anfangswert richtig.

Nun nehmen wir an, die Aussage gelte für ein festes $n \in \mathbb{N}$, also

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Dann folgt für den nächsten Fall:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1).$$

Da

$$n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

gilt, erhalten wir

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Damit ist die Behauptung für $n + 1$ gezeigt. Also gilt die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$.

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

1.2 Summenzeichen

Übung 29. *Schreiben Sie die Summe*

$$\sum_{k=1}^4 (2k - 1)$$

ausgeschrieben hin und berechnen Sie ihren Wert.

Lösung 30. *Das Summenzeichen bedeutet, dass die Terme für $k = 1, 2, 3, 4$ addiert werden:*

$$\sum_{k=1}^4 (2k - 1) = 1 + 3 + 5 + 7.$$

Addiert man diese Zahlen, so erhält man

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16.$$

Also gilt

$$\sum_{k=1}^4 (2k - 1) = 16.$$

Das passt auch zur allgemeinen Formel

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2,$$

denn für $n = 4$ ist $4^2 = 16$.

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

1.3 Produktzeichen und Fakultät

Übung 31. *Berechnen Sie*

$$\prod_{k=1}^5 k$$

und erklären Sie den Zusammenhang mit der Fakultät.

Lösung 32. *Das Produktzeichen bedeutet, dass die Faktoren für $k = 1, 2, 3, 4, 5$ multipliziert werden:*

$$\prod_{k=1}^5 k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Genau dieser Ausdruck ist per Definition die Fakultät von 5:

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Somit gilt

$$\prod_{k=1}^5 k = 5!.$$

1.4 Der Binomialkoeffizient

Übung 33. *Berechnen Sie*

$$\binom{5}{2}.$$

Erklären Sie anschließend kurz die kombinatorische Bedeutung des Ergebnisses.

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

Lösung 34. *Mit der Definition des Binomialkoeffizienten erhalten wir*

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!}.$$

Nun ist

$$5! = 120, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6,$$

also

$$\binom{5}{2} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10.$$

Das bedeutet: Aus einer 5-elementigen Menge kann man genau 10 verschiedene 2-elementige Teilmengen auswählen, wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt.

1.5 Der binomische Lehrsatz

Übung 35. *Entwickeln Sie $(x + y)^3$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes.*

Lösung 36. *Der binomische Lehrsatz lautet für $n = 3$:*

$$(x + y)^3 = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} x^{3-k} y^k.$$

Die Binomialkoeffizienten sind

$$\binom{3}{0} = 1, \quad \binom{3}{1} = 3, \quad \binom{3}{2} = 3, \quad \binom{3}{3} = 1.$$

Daher ergibt sich

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Dies ist die vollständige Entwicklung von $(x + y)^3$.

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

1.5.1 Folgerungen aus dem binomischen Lehrsatz

Übung 37. *Zeigen Sie:*

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Lösung 38. *Wir setzen im binomischen Lehrsatz $a = 1$ und $b = 1$ ein. Dann gilt*

$$(1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k.$$

Da jede Potenz von 1 wieder 1 ist, vereinfacht sich die rechte Seite zu

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

Links steht

$$(1 + 1)^n = 2^n.$$

Also folgt

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Diese Formel hat auch eine schöne kombinatorische Bedeutung: Sie zählt alle Teilmengen einer n -elementigen Menge.

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

1.5.2 Die geometrische Reihe

Übung 39. Zeigen Sie für $a \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Lösung 40. Wir beweisen die Formel durch vollständige Induktion über n .

Für $n = 0$ ist

$$\sum_{k=0}^0 a^k = a^0 = 1.$$

Die rechte Seite liefert

$$\frac{1 - a^{0+1}}{1 - a} = \frac{1 - a}{1 - a} = 1.$$

Die Aussage ist also für $n = 0$ richtig.

Nun nehmen wir an, die Formel gelte für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$, also

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Dann gilt für $n + 1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^n a^k + a^{n+1}.$$

Mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} + a^{n+1}.$$

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND KOMBINATORIK

Auf gemeinsamen Nenner gebracht ergibt das

$$\frac{1 - a^{n+1} + a^{n+1}(1 - a)}{1 - a} = \frac{1 - a^{n+2}}{1 - a}.$$

Also gilt die Formel auch für $n + 1$. Damit ist sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$ bewiesen.

Die Formel ist wichtig, weil sie eine lange Summe in eine geschlossene Darstellung verwandelt. Später wird sie bei Grenzwerten, Reihen und Abschätzungen eine zentrale Rolle spielen.

Kapitel 3

Die Körperaxiome der reellen Zahlen

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir gesehen, wie sich mathematische Aussagen mit Hilfe logischer Methoden präzise formulieren und beweisen lassen. Nun wenden wir uns einer der zentralen Zahlmengen der Analysis zu, den reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Die reellen Zahlen bilden nicht nur eine Menge, auf der man addieren und multiplizieren kann, sondern sie besitzen auch eine Reihe grundlegender Eigenschaften, die diese Rechenoperationen in charakteristischer Weise beschreiben. Diese Eigenschaften werden als *Körperaxiome* bezeichnet.

Zunächst betrachten wir $\mathbb{R}$ als Menge mit zwei Verknüpfungen

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y,$$

KAPITEL 3. DIE KÖRPERAXIOME DER REELLEN ZAHLEN

und

$$\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y.$$

Die erste Sektion ist den Axiomen der Addition gewidmet.

3.1 Die Axiome der Addition

Die Addition auf den reellen Zahlen erfüllt die folgenden Eigenschaften:

1. **Assoziativgesetz:** Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

2. **Kommutativgesetz:** Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$x + y = y + x.$$

3. **Existenz eines neutralen Elements:** Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x + 0 = x.$$

4. **Existenz additiver Inverser:** Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein Element $-x \in \mathbb{R}$ mit

$$x + (-x) = 0.$$

Das neutrale Element der Addition wird als *Null* bezeichnet, das zu x gehörige inverse Element als *Gegenzahl* oder *additives Inverses* von x .

KAPITEL 3. DIE KÖRPERAXIOME DER REELLEN ZAHLEN

3.1.1 Folgerungen der Additionsaxiome

Aus den Additionsaxiomen lassen sich bereits einige grundlegende Eigenschaften ableiten, die im weiteren Verlauf der Analysis ständig verwendet werden. Viele spätere Rechnungen und Beweise beruhen auf diesen einfachen Folgerungen.

1.

Theorem 41. *Die Null ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien 0 und $0'$ zwei neutrale Elemente bezüglich der Addition. Dann gilt

$$0 = 0 + 0'$$

wegen der Neutralität von $0'$. Andererseits ist

$$0 + 0' = 0'$$

wegen der Neutralität von 0 . Also folgt $0 = 0'$. Damit ist das neutrale Element eindeutig bestimmt.

□

2.

Theorem 42. *Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ist das additive Inverse eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien y und z zwei additive Inverse von x . Dann gilt

$$x + y = 0 \quad \text{und} \quad x + z = 0.$$

KAPITEL 3. DIE KÖRPERAXIOME DER REELLEN ZAHLEN

Wir addieren zu der ersten Gleichung auf beiden Seiten z . Dann erhalten wir

$$(x + y) + z = 0 + z.$$

Mit Assoziativität und Kommutativität der Addition folgt

$$(x + z) + y = z.$$

Da $x + z = 0$ gilt, ist also $0 + y = z$, also $y = z$. $\square$

3.

Theorem 43. *Es gilt $-0 = 0$.*

Beweis. Nach Definition ist -0 ein additives Inverses von 0 . Da aber auch

$$0 + 0 = 0$$

gilt, ist 0 selbst ein additives Inverses von 0 . Wegen der Eindeutigkeit des additiven Inversen folgt

$$-0 = 0.$$

$\square$

4.

Theorem 44. *Die Gleichung $a + x = b$ besitzt genau eine Lösung, nämlich $x = b - a$.*