

MOISÉS DÍAZ

CONTRASTES de HIPÓTESIS PARAMÉTRICOS

Problemas **RESUELTOS** y **COMENTADOS** para
estudiantes de **ADE** y **ECONOMÍA**



CONTRASTES DE HIPÓTESIS PARAMÉTRICOS

MOISÉS DÍAZ

CONTRASTES DE HIPÓTESIS PARAMÉTRICOS

Problemas RESUELTOS y COMENTADOS
para estudiantes de ADE y ECONOMÍA



Madrid • Buenos Aires • México • Bogotá

© Moisés Díaz Cabrera, 2022

Reservados todos los derechos. «No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.»

Ediciones Díaz de Santos

Internet: <http://www.editdiazdesantos.com>

E-mail: ediciones@editdiazdesantos.com

e-ISBN: 978-84-9052-464-0 (ebook)

ISBN: 978-84-9052-462-6 (Papel)

Fotocomposición y diseño de cubiertas: P55 Servicios Culturales

Índice general

Prólogo	9
1. Contrastes de hipótesis para dos grupos independientes . . .	13
2. Contrastes de hipótesis para dos grupos relacionados	53
3. ANOVA de un factor para grupos independientes	83
4. ANOVA de un factor para grupos relacionados	123
5. ANOVA de dos factores para grupos independientes	141
Bibliografía	163

Prólogo

El presente libro está adaptado a las enseñanzas del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) para una asignatura de Estadística II de 60 créditos ECTS. A grandes rasgos, la asignatura de Estadística II recoge contenidos como la estimación puntual o por intervalos, los contrastes de hipótesis y los análisis de regresión. Dichos contenidos, de acuerdo con el panorama de la enseñanza universitaria en España para los grados de ADE y Economía, pueden encontrarse en otras asignaturas como Métodos Cuantitativos o Estadística III, entre otras.

En particular, este libro recoge una amplia colección de situaciones prácticas en las que aparecen comparaciones de dos o más grupos. Siguiendo el orden del Plan de Estudios, se ha intentado que estas estén ambientadas en asignaturas previas a Estadística II. Además, se ha tratado que las situaciones se enmarquen en un contexto práctico y real, de interés para cualquier estudiante de ADE u otra rama económica.

La obra se desarrolla con una metodología común en todos los capítulos con el fin de facilitar la resolución de las situaciones y mejorar así el proceso de aprendizaje y de enseñanza de los contrastes de hipótesis paramétricos entre grupos. El objetivo es, primeramente, que el estudiante realice un esfuerzo inicial para entender el contexto de las situaciones y el asunto de lo que se desea comparar. Una vez se supere esta primera dificultad, la metodología propuesta consiste en guiar al estudiante hacia la resolución de las cuestiones que plantean las situaciones prácticas: el primer paso consiste en la definición de las hipótesis; y posteriormente, se deberá concluir con la aceptación o el rechazo de la hipótesis alternativa. Finalmente, el estudiante

responderá a varias preguntas tipo test, culminando así la resolución de las situaciones.

En el primer capítulo encontramos situaciones en las que comparamos dos muestras distintas. Se trabaja con tres tipos de comparaciones: la media, la proporción o la varianza de dos grupos. Las situaciones prácticas de este capítulo pretenden que el alumno use todas las ecuaciones de este tipo de comparaciones, las cuales se encontrarán disponibles en el formulario. Asimismo, en este capítulo se discutirán cuestiones como el cálculo de los intervalos de confianza, el valor crítico o el tamaño del efecto, entre otros.

El segundo capítulo se centra en situaciones donde se propondrá resolver dos comparaciones longitudinales, obtenidas de un grupo que ha realizado dos experimentos en dos periodos distintos. Estas situaciones darán lugar a nuevos planteamientos que compararán la media o la proporción de dicho grupo. Este capítulo sigue una metodología similar al capítulo anterior con el fin de facilitar la mecánica de resolución de las situaciones. Debido a ello, en este capítulo se deberá llegar a una serie de conclusiones, nuevamente, mediante la comparación del estadístico de contraste *vs.* el valor crítico, del nivel de significación *vs.* el nivel crítico o mediante intervalos de confianza.

El tercer capítulo está dedicado a los ANOVA de grupos independientes donde se discute un único factor. Se ven, por ejemplo, comparaciones o contraste de hipótesis de más de dos grupos con muestras independientes. Como ya hemos reiterado y de modo similar a los anteriores capítulos, la resolución de las situaciones seguirá una metodología común en este capítulo, intentando mejorar la didáctica de este tipo de ANOVA. Se pretende finalmente que, a través de las situaciones expuestas en este apartado, el estudiante sea capaz de construir una tabla ANOVA e interpretarla.

El cuarto capítulo enfoca su atención en estudios longitudinales de ANOVA con un solo factor, esto es, que las situaciones tienen en cuenta casos de más de dos grupos emparejados o relacionados. Mediante las fórmulas y tablas del formulario, se espera que el estudiante aprenda a objetivar la evidencia de aceptación o rechazo de la hipótesis nula en este tipo de contraste de hipótesis.

En el quinto y último capítulo se considera un caso más complejo de ANOVA, donde grupos independientes y dos factores son analizados al

mismo tiempo. En este caso tendremos que contrastar las hipótesis de cada factor y de la interacción de ambos factores. Así pues, la interacción marcará el estudio posterior de los efectos simples de cada factor.

Una parte importante implicada en el desarrollo de esta colección de situaciones prácticas han sido los estudiantes de segundo curso de ADE de la Universidad del Atlántico Medio. Sus trabajos de Estadística II en el curso 2020-2021 han aportado nuevas y actuales ideas para las situaciones descritas a lo largo de nuestra obra. Asimismo, los comentarios y discusiones de D. Jaime León González-Vélez, titular de universidad del departamento de Educación de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, y las correcciones de Dña. Anabel García Vera y D. Daniel Galindo, graduados en Filología, han sido de gran ayuda para el desarrollo final del libro. Agradezco a todos ellos su colaboración.

Me gustaría, para finalizar, dirigirme humildemente al lector para agradecerle su interés y pedir disculpas por los posibles errores no intencionados que pudiera encontrar.

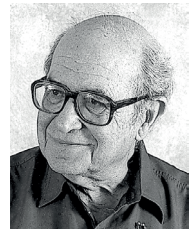
Las Palmas de Gran Canaria, 2022

MOISÉS DÍAZ

Contrastes de hipótesis para dos grupos independientes

Como he señalado, disponemos de un conjunto de técnicas estadísticas que, utilizadas de forma inteligente, pueden facilitar nuestros esfuerzos.

Jacob Cohen,
Estados Unidos (†75 años).



CONTENIDO

Situaciones 1-8 comentadas y resueltas

SITUACIÓN 1.

Un estudiante de tercer curso de ADE realiza un estudio para conocer los efectos de la publicidad sobre la captación del mensaje.

Para ello, dispone de veintidós participantes que divide en dos grupos de once sujetos cada uno de manera aleatoria. Al grupo A lo somete a una prueba de captación observando imágenes de un anuncio sin sonido y, al grupo B, a la misma prueba escuchando el anuncio sin ver ninguna imagen. Con el fin de probar la eficiencia de la primera prueba, los sujetos responden un test de recuerdo después de realizar el experimento, el cual estima la eficiencia de la publicidad según el recuerdo generado.

La puntuación media del grupo A es de 50 puntos con una cuasi varianza igual a 100, mientras que el grupo B obtuvo una puntuación media de 43 puntos y una cuasi varianza de 82. Asumiendo varianzas poblacionales desconocidas pero iguales en ambos grupos y un nivel de confianza del 99 %, responda las siguientes cuestiones:

- (a) Indica la hipótesis alternativa correcta: A) $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$; B) $H_0 : \mu_1 < \mu_2$; C) $H_1 : \mu_1 > \mu_2$.
- (b) ¿Qué distribución siguen los datos proporcionados? A) normal; B) binomial; C) t de Student.
- (c) ¿Cuál es el valor del estadístico de contraste aproximadamente? A) 1.72; B) 3; C) 0.5.
- (d) ¿Cuáles son los grados de libertad? A) 24; B) 20; C) 22.

1. Contrastes de hipótesis para dos grupos independientes

- (e) El valor crítico para un nivel de confianza del 99 % es igual a: A) 0.5; B) 1.72; C) 2.528.
- (f) El nivel crítico p es, aproximadamente: A) 0.005; B) 0.01; C) 0.05.
- (g) Aceptamos la hipótesis nula porque: A) el nivel de significación es mayor que el nivel crítico; B) el estadístico de contraste es mayor que el valor crítico; C) el valor crítico es mayor que el estadístico de contraste.
- (h) ¿Cuál es el tamaño del efecto? A) 1.22; B) 0.05; C) 0.734.

SOLUCIÓN 1.

Para realizar el ejercicio seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1: Hipótesis.

Debido a que el estudiante está interesado en probar la eficacia de la primera prueba, la hipótesis alternativa será que la primera prueba es más eficaz en promedio que la segunda:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$$

Paso 2: Distribución que siguen las muestras.

Debido a que la varianza es desconocida pero igual en ambos grupos, la distribución que siguen las muestras es la t de Student.

Paso 3: Estadístico de contraste.

Aplicamos la siguiente ecuación del estadístico de contraste para este caso como sigue:

$$T = \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)\hat{S}_1^2 + (n_2 - 1)\hat{S}_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} = \frac{50 - 43}{\sqrt{\frac{(11 - 1)100 + (11 - 1)82}{11 + 11 - 2} \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{11} \right)}} = 1.72$$

Paso 4: Valor crítico.

En la tabla de distribución t de Student con $n_1 + n_2 - 2 = 20$ grados de libertad buscamos el valor crítico para un nivel de confianza del 99 % sabiendo que estamos ante un contraste unilateral derecho, $P(T < t) = 0.99 \rightarrow t = 2.528$.

Paso 5: Nivel crítico.

El nivel crítico es la probabilidad al estadístico de contraste (1.72), es decir: $P(T \geq 1.72)$. Entrando en la tabla t de Student con 20 grados de libertad, encontramos que el nivel crítico es $P(T \geq 1.72) = 1 - P(T < 1.72) = 0.05$.

Paso 6: Conclusión.

Se acepta la H_0 debido a que el nivel crítico 0.05 es mayor que el nivel de significación 0.01, es decir, $p - \text{valor} > 0.01$. Por otro lado, se observa también que el estadístico de contraste, (1.72), es menor que el valor crítico, 2.528. Por lo que, para este contraste unilateral por la derecha, se rechaza la hipótesis alternativa. En el contexto del problema podemos decir que los datos sugieren que no es significativamente mayor el impacto del primer experimento en comparación con el segundo.

A continuación contestamos las preguntas del test:

- (a) Indica la hipótesis alternativa correcta: A) $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$; B) $H_0 : \mu_1 < \mu_2$; C) $H_1 : \mu_1 > \mu_2$
- (b) ¿Qué distribución siguen los datos proporcionados? A) normal; B) binomial; C) t de Student.
- (c) ¿Cuál es el valor del estadístico de contraste aproximadamente? A) 1.72; B) 3; C) 0.5.

1. Contrastes de hipótesis para dos grupos independientes

- (d) ¿Cuáles son los grados de libertad? A) 24; **B) 20**; C) 22.
- (e) El valor crítico para un nivel de confianza del 99 % es igual a: A) 0.5; B) 1.72; **C) 2.528**.
- (f) El nivel crítico p es, aproximadamente: A) 0.005; B) 0.01; **C) 0.05**.
- (g) Aceptamos la hipótesis nula porque: A) el nivel de significación es mayor que el nivel crítico; B) el estadístico de contraste es mayor que el valor crítico; **C) el valor crítico es mayor que el estadístico de contraste**.
- (h) ¿Cuál es el tamaño del efecto? A) 1.22; B) 0.05; **C) 0.734**.

Para responder a esta pregunta hemos de realizar la prueba de la d de Cohen, la cual nos informa de la importancia o relevancia práctica de las diferencias de las medias obtenidas por los sujetos.

$$d = \frac{|\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2|}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)\hat{S}_1^2 + (n_2 - 1)\hat{S}_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}} =$$
$$\frac{|50 - 43|}{\sqrt{\frac{(11 - 1)100 + (11 - 1)82}{11 + 11 - 2}}} = 0.734.$$

El valor obtenido nos sugiere que el efecto del experimento del grupo 1 y 2 es mediano-alto.

SITUACIÓN 2.

La dirección de recursos humanos desea conocer si existe diferencias entre las posibles maneras de incentivar al personal durante las vacaciones. Para ello ofrece incentivos y, posteriormente, compara la satisfacción del personal. Por un lado, a los quince empleados de una de sus franquicias les ofrece días extra de vacaciones en los meses de verano. Por otro lado, al mismo número de empleados de otra franquicia le ofrece disfrutar de una villa en el sur de Gran Canaria durante un fin de semana. En el grupo uno hay diez personas satisfechas con el incentivo, mientras que en el grupo dos, las personas satisfechas fueron siete. Con un nivel de confianza del 95 % responda las siguientes preguntas:

- (a) La hipótesis nula es: A) $H_0 : \pi_1 - \pi_2 \leq 0$; B) $H_0 : \pi_1 - \pi_2 = 0$; C) $H_0 : \pi_1 - \pi_2 > 0$
- (b) La distribución que siguen las muestras para el contraste sobre dos proporciones es: A) normal; B) t de Student; C) binomial.
- (c) El valor absoluto del estadístico contraste es: A) 4; B) 2.88; C) 1.12.
- (d) El valor crítico superior es: A) 1.96; B) 2; C) 2.96.
- (e) El p-valor es igual a: A) 0.1314; B) 0.2628; C) 0.8686.
- (f) Se rechaza hipótesis alternativa porque: A) el nivel crítico es mayor que el nivel de significación; B) el nivel crítico es menor que el nivel de significación; C) el estadístico de contraste se encuentra fuera de la zona de rechazo de la hipótesis nula.