

NAÏLA HAYEK
JEAN-PIERRE LECA

Maths pour l' éco- nomie

▼
É
C
O
S
U
P
▲

7^E ÉDITION

DUNOD

Éditorial : Guillaume Clapeau et Sandrine Paniel

Couverture : Studio Dunod

Fabrication : Anissa Marzouk

Mise en pages : Lumina Datamatics

© Dunod, 2024

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-087336-4



Table des matières

Introduction	1
Chapitre 1 Langage mathématique, mode d'emploi	3
1. Connecteurs logiques ET, OU, NON, $\Rightarrow$	3
1.1. Le vrai et le faux	3
1.2. ET, OU, NON	5
1.3. $\Rightarrow$; Si... , Alors...	7
1.4. $\Leftrightarrow$, Bi-implication	9
2. Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$	10
2.1. Règles d'utilisation	10
2.2. Exemples	12
3. Application : opérations sur les ensembles	13
3.1. Ensemble, élément, inclusion	13
3.2. Union, intersection, complémentaire, produit	14
3.3. Fonction, application, injection, surjection, bijection	16
Exercices	22
Chapitre 2 Les ensembles numériques $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$	26
1. Les entiers naturels $\mathbb{N}$	27
1.1. Propriétés de l'addition et de la multiplication	27
1.2. Le raisonnement par récurrence	28
1.3. Le signe $\sum$	30
1.4. Les nombres C_n^k	33
2. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels	36
2.1. Insuffisance des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$	37
2.2. Concept nouveau : borne supérieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$	40
2.3. L'ensemble $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, \text{ABS})$	43
Exercices	48
Chapitre 3 Suites et séries numériques	53
1. Notations et définitions	53
1.1. Illustrations	53
1.2. Définitions	55
1.3. Quelques exemples de suites	56

2. La notion de limite et son langage de définition	58
2.1. Suites convergentes	58
2.2. Suites divergentes	60
2.3. Récapitulation	61
3. Propriétés des limites	61
4. Premiers critères de convergence	65
4.1. Suites monotones bornées	65
4.2. Suites adjacentes	65
5. Exemples	66
5.1. Suite définie par une relation explicite	66
5.2. Suite définie par une relation (ou équation) de récurrence	67
5.3. Suites particulières	69
6. Séries numériques	74
6.1. Définitions	74
6.2. Propriétés	75
Exercices	79

Chapitre 4 Fonctions réelles d'une variable réelle	87
1. Limite d'une fonction	87
1.1. Limite en un point	87
1.2. Limite à gauche, limite à droite	88
1.3. Limite infinie en un point	90
1.4. Limite à l'infini	91
1.5. Propriétés des limites	92
1.6. Cas d'une fonction monotone	93
1.7. Quelques limites classiques, utiles... incontournables	94
2. Fonctions équivalentes	95
2.1. Fonctions équivalentes quand x tend vers a	95
2.2. Propriétés des fonctions équivalentes quand x tend vers a ou vers $\pm\infty$	97
3. Continuité	97
3.1. La notion de continuité	97
3.2. Propriétés des fonctions continues	100
3.3. Les fonctions continues usuelles	101
3.4. Théorèmes fondamentaux	101
3.5. Applications	103
3.6. Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle	105
Exercices	106

Chapitre 5	Dérivation	111
1.	La notion de dérivée	111
1.1.	Nombre dérivé	111
1.2.	Dérivabilité sur un intervalle	114
1.3.	Fonction dérivée	115
1.4.	Propriétés des fonctions dérivables	115
1.5.	Dérivées des fonctions usuelles	118
1.6.	Élasticité	118
1.7.	Différentielle	119
2.	Théorème des accroissements finis et applications	120
2.1.	Théorèmes	120
2.2.	Applications	123
3.	Recherche d'extrema, convexité	129
3.1.	Extrema d'une fonction	129
3.2.	Convexité	135
3.3.	Récapitulation des conditions d'optimalité	138
	Exercices	140
Chapitre 6	Intégration	148
1.	Primitive	148
2.	Intégrale définie	150
2.1.	Étude d'un exemple	151
2.2.	Fonction Riemann-intégrable sur un intervalle $[a, b]$	152
2.3.	Méthodes de calculs	160
3.	Intégrale généralisée	163
3.1.	Cas où l'une des bornes de l'intervalle d'intégration est infinie	163
3.2.	Cas où la fonction devient infinie sur l'intervalle d'intégration	168
	Exercices	172
Chapitre 7	Algèbre linéaire 1	177
1.	La structure d'espace vectoriel	177
1.1.	Définitions	178
1.2.	Exemples	179
1.3.	Propriétés du calcul dans un $\mathbb{R}$ e.v.	182
1.4.	Combinaison linéaire de vecteurs	183
2.	Sous-espace vectoriel, système générateur, système libres	184
2.1.	Définitions, propositions, exemples	184

2.2.	Système générateur, espace vectoriel engendré par un système de vecteurs	187
2.3.	Système libre, système lié	189
2.4.	Base d'un espace vectoriel	192
3.	Application linéaire	201
3.1.	Définitions	201
3.2.	Exemples	203
3.3.	Espaces vectoriels isomorphes	205
3.4.	Propriétés	206
3.5.	Noyau et image d'une application linéaire	209
4.	Matrice d'une application linéaire	212
4.1.	Écriture matricielle	212
4.2.	Étude d'exemples	214
4.3.	Algèbre des matrices	215
4.4.	Matrices et applications linéaires	226
	Exercices	234
Chapitre 8	L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes	244
1.	Généralités	245
1.1.	Forme algébrique d'un nombre complexe	245
1.2.	Conjugué d'un nombre complexe	246
1.3.	Le plan complexe	247
1.4.	Forme trigonométrique d'un nombre complexe	248
2.	Équations dans $\mathbb{C}$	251
2.1.	Le Théorème de d'Alembert-Gauss	251
2.2.	Équation du second degré à coefficients réels	251
2.3.	Équation du second degré à coefficients complexes	251
3.	Espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$	252
	Exercices	253
Chapitre 9	Algèbre linéaire 2	255
1.	Déterminants	255
1.1.	Déterminant d'une matrice $(2, 2)$	255
1.2.	Déterminant d'une matrice (n, n)	259
1.3.	Applications	262
1.4.	Déterminant d'un système de n vecteurs	265
2.	Diagonalisation d'une matrice	268
2.1.	Valeurs propres	268
2.2.	Diagonalisation	271
3.	Formes quadratiques	275
	Exercices	280

Chapitre 10	Fonctions réelles de plusieurs variables réelles	289
1.	Normes et distances sur $\mathbb{R}^2$	289
1.1.	L'ensemble $\mathbb{R}^2$	289
1.2.	Produit scalaire, normes et distances	290
1.3.	Généralisation à $\mathbb{R}^n$	295
2.	Fonctions de deux variables et généralisation aux fonctions de n variables	297
2.1.	Définitions, exemples, graphes	297
2.2.	Limite, continuité	299
2.3.	Dérivées partielles, élasticités partielles	302
2.4.	Différentielle	306
2.5.	Dérivées partielles secondes	310
3.	Théorème des accroissements finis et applications	312
3.1.	Théorème des accroissements finis	312
3.2.	Dérivées de fonctions composées (dérivation en chaîne)	313
3.3.	Fonctions positivement homogènes	316
3.4.	Théorème des fonctions implicites	317
3.5.	Formule de Taylor	319
	Exercices	322
Chapitre 11	Recherche d'extrema, convexité	328
1.	Présentation des problèmes	328
2.	Extrema d'une fonction sans contraintes	330
2.1.	Conditions nécessaires	330
2.2.	Conditions suffisantes	332
3.	Convexité	334
3.1.	Sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$	334
3.2.	Fonction convexe sur un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$	334
3.3.	Fonction concave sur un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$	337
4.	Récapitulation des conditions	339
5.	Extrema sous contraintes : théorème d'existence	340
6.	Extrema d'une fonction sous contraintes d'égalité : conditions nécessaires, conditions suffisantes	342
7.	Extrema d'une fonction sous contraintes d'égalité et d'inégalité : conditions nécessaires, conditions suffisantes	353
	Exercices	358

Chapitre 12	Équations de récurrence	372
1.	Équations de récurrence linéaires d'ordre 1 à coefficients constants	372
1.1.	Définitions	372
1.2.	Existence et unicité de la solution	373
1.3.	Recherche de la solution	373
1.4.	Équilibre	377
2.	Équations de récurrence linéaires d'ordre 2 à coefficients constants	378
2.1.	Définitions	378
2.2.	Existence et unicité	379
2.3.	Recherche de la solution	379
3.	Équations de récurrence d'ordre 1 : le cas général	386
	Exercices	392
Chapitre 13	Équations différentielles linéaires	398
1.	Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants	398
1.1.	Définition	398
1.2.	Existence et unicité	399
1.3.	Recherche de la solution	400
1.4.	Équilibre	404
1.5.	Méthode de variation de la constante lorsque φ est quelconque	405
2.	Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients non constants	405
2.1.	Définition	405
2.2.	Existence et unicité	405
2.3.	Recherche de la solution	406
2.4.	Méthode de variation de la constante	406
3.	Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants	408
3.1.	Définitions	408
3.2.	Existence et unicité	409
3.3.	Recherche de la solution	409
	Exercices	417
	Pour aller plus loin : Problèmes	425
	Index	440

Introduction

Les modèles mathématiques ont un succès inouï dans le domaine de la physique par leur capacité à prédire les phénomènes auxquels ils s'appliquent : mécanique classique, mécanique quantique, électromagnétisme, physique des particules, astrophysique, etc. En un siècle, les mystères de la physique ont réduit comme peau de chagrin.

Ce succès, en soi fascinant, peut-il, fut-ce de manière beaucoup plus modeste, se reproduire dans le domaine de l'économie¹ ? La question est ouverte, elle est l'objet d'un débat : *l'utilisation des modèles mathématiques en économie*.

Pour participer à ce débat, il est indispensable de comprendre les modèles formalisés de l'économie. Il ne serait pas raisonnable de ne pouvoir accéder à ces modèles par peur ou méconnaissance des outils mathématiques de base.

Loin de nous l'idée que ces outils mathématiques de base sont à portée facile d'intellect : on affirme seulement qu'il faut savoir s'y prendre et ce, de manière pragmatique. Aussi, dans ce livre, quatre étapes jalonnent le chemin de la compréhension.

1. *L'écriture*, le sens des mots, la définition rigoureuse des objets mathématiques. L'expérience nous a appris qu'un étudiant qui sait et qui se trompe, est un étudiant qui, à un endroit de sa copie, n'a plus géré son écriture ou a négligé le sens des mots. Ce n'est pas l'étudiant qui déraile, c'est son écriture qui ne tient plus la route.
2. *Le raisonnement* et son catalogue de règles du jeu logique, expliquées ou démontrées (en partie) au chapitre 1 ; l'étudiant les appliquera « sans état d'intellect » tel un automobiliste le code de la route.
3. *La démonstration* pour décoder le chemin du labyrinthe qui mène au théorème ; grâce à elle, ce qui paraissait « magique » devient « vrai ». Chaque fois que la généralité n'en est pas compromise, afin de ne pas alourdir inutilement l'écriture, on traite sur des exemples simples la démarche de démonstration qui conduit au résultat. Ne pas comprendre en première lecture une démonstration n'est pas gênant du tout ; par contre, faire le choix d'ignorer la démonstration, c'est décider de rester dans la magie des mots du théorème incompris. Manipuler les idées, les concepts, sans les comprendre est strictement interdit car dangereux pour l'intelligence.
4. *Le calcul*, les exercices qui rassurent et indiquent la position de l'étudiant sur le chemin de la compréhension. Pour cela, nous vous proposons des points méthode. L'intérêt d'un exercice est le questionnement qu'il amène, les idées, les initiatives qu'il nécessite d'où, parfois, l'obligation de revoir le cours mais sans la démonstration bien sûr.

À la fin de chaque chapitre se trouvent des exercices suivis de leurs corrigés détaillés.

1. Le mot « économie » a pour racine grecque « *oikonomia* » : règle de vie domestique, gestion de la maison.

L'étudiant mesurera son assurance et son savoir-faire à l'envie qu'il a de regarder la solution avant d'avoir fini l'exercice.

De par notre expérience de l'enseignement des notions introduites dans ce livre, pour cette 7^e édition, nous l'affirmons haut et fort :

Parler à tous avec simplicité tout en restant ambitieux sur le sujet.

Quelques indications :

- En début de chapitre, on désigne par « mots clés » des mots nouveaux importants que l'on va définir et qu'il est indispensable de connaître.
- Au sein d'un même chapitre, les définitions, propositions, théorèmes sont numérotés dans l'ordre d'arrivée.
- *Mutatis mutandis* signifie « en changeant ce qu'il faut changer ». On emploie cette expression pour dire que les arguments du raisonnement restent les mêmes, seuls changent les objets auxquels ils s'appliquent.

Langage mathématique, mode d'emploi

Introduction

En mathématiques, *démontrer c'est convaincre* avec des arguments autorisés, répertoriés, codés, indépendants du langage parlé qui les exprime. « La logique est parfaitement intelligible, néanmoins totalement inexplicable dans ses fondements » (S. Kleene, mathématicien américain, dans son livre *Logique mathématiques*, 1966, Armand Colin). Dans ce chapitre, on code les règles de la logique et de ses signes « ET, OU, $\neg$, $\Rightarrow$, $\forall$, $\exists$ ». Il s'agit d'apprendre à mieux cerner *ce que démontrer veut dire*.

Objectifs

Mettre en place un nouvel outil, qui définit et démontre : le langage mathématique.

Baliser le chemin qui va du bon sens à l'abstrait.

Introduire un modèle : le langage des ensembles

Mots clés

Proposition

Ensemble

Fonction

1 Connecteurs logiques ET, OU, NON, $\Rightarrow$

1.1 Le vrai et le faux

DÉFINITION 1

On appelle *proposition* tout assemblage de lettres et de signes qui vérifie les trois conditions suivantes :

- cet assemblage a une syntaxe correcte (En d'autres termes, le lecteur sait le « lire ».);
- cet assemblage a une sémantique correcte (En d'autres termes, le lecteur « comprend » ce qu'il lit.);
- cet assemblage a une seule valeur de vérité : la valeur vrai ou bien la valeur faux.

COMMENTAIRE Dans le langage mathématique, les lettres peuvent être d'alphabets différents (latins ou grec) et les signes vont de la parenthèse, virgule, +, ., =, etc. aux chiffres arabes (0, 1, 2, ..., 9) ainsi que romains (I, V, X, L, C, D, M) en passant par des dessins plus ou moins parlants ($\sum$, $\int$, $\nearrow$, $\searrow$, etc.) que les mathématiciens ont l'art d'inventer au fil de leurs théories.

Exemples

Considérons les assemblages suivants :

- $P_1 = (\sum + \text{oui} ! \nearrow =)$
Ce n'est pas une proposition car la syntaxe est incorrecte.
- $P_2 = (\text{La racine carrée de Napoléon n'est pas carrée.})$
Ce n'est pas une proposition : on la lit très bien mais on ne comprend pas. La sémantique est incorrecte.
- $P_3 = (12 \times 14 = 168)$
C'est une proposition, on sait à partir du cours moyen qu'elle a la valeur vrai.
- $P_4 = (\text{XII} \times \text{XIV} = \text{CLXVIII})$
C'est une proposition, la même que P_3 à l'écriture près. On remarquera que s'il est courant de multiplier en chiffres arabes, cela l'est beaucoup moins avec les chiffres romains. Pour faire de l'arithmétique, il fallait faire le bon choix de l'écriture et de ses signes !
- $P_5 = (\text{Dans un triangle quelconque, la somme des angles est un angle plat.})$
C'est une proposition, on sait depuis le collège qu'elle a la valeur vrai.
- $P_6 = (a \text{ et } b \text{ deux nombres réels quelconques, } \left| |a| - |b| \right| \leq |a - b|)$
C'est une proposition, vraie pour un lycéen.
- $P_7 = (\text{Si } \alpha < 0 \text{ et } f \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ alors } \alpha f \searrow \text{ sur } \mathbb{R.})$
C'est une proposition, vraie pour un bachelier. On remarquera la variété des lettres et des signes.
- $P_8 = (\text{Tout entier pair supérieur à 4 est la somme de deux nombres premiers.})$
C'est une proposition qui date de 1742, appelée la conjecture¹ de Goldback. On ne connaît toujours pas sa valeur de vérité ; en effet, s'il est facile de vérifier que $8 = 5 + 3$, $10 = 7 + 3$, $24 = 11 + 13$, le cas général n'a toujours pas été démontré. On sait cependant que la propriété est vraie pour tout entier pair compris entre 6 et 33×10^6 .
- $P_9 = (\text{Il existe au moins un triplet } (x, y, z) \text{ d'entiers naturels strictement positifs tel que } x^2 + y^2 = z^2.)$
Il suffit de chercher un peu. On trouve : $3^2 + 4^2 = 5^2$. La proposition P_9 est donc vraie. Tel est le sens de « il existe au moins un... »

1. Une conjecture est une proposition que l'on subodore vraie quoique ni contredite ni démontrée.

On trouve aussi $5^2 + 12^2 = 13^2$, puis $99^2 + 4\,900^2 = 4\,901^2$, puis... Mais cela est sans importance pour P_9 , l'existence à lui seul du triplet (3, 4, 5) pour (x, y, z) assure la valeur de vérité Vrai à P_9 , qu'il y en ait d'autres, et combien, en nombre fini ou pas, est une tout autre question.

- P_{10} = (Pour $n \geq 3$, il n'existe pas d'entiers x, y, z non nuls tels que $x^n + y^n = z^n$.) Il s'agissait de la conjecture de Pierre Simon de Fermat (1601-1665) devenue un théorème en 1990 grâce au mathématicien anglais Andrew Wiles. Il aura donc fallu plus de trois siècles pour savoir P_{10} vraie !

1.2 ET, OU, NON

A. Définitions

DÉFINITION 2 : Connecteur NON

Soit A une proposition, on définit la nouvelle proposition notée NON A, ou encore $\neg A$ (lire non A), à l'aide de la table de vérité suivante (tableau 1.1).

Tableau 1.1 – V est l'abréviation de vrai ; F est l'abréviation de faux.

A	$\neg A$
V	F
F	V

DÉFINITION 3 : Connecteurs OU et ET

Soit A et B deux propositions, on définit les nouvelles propositions « A OU B » ainsi que « A ET B » à l'aide de la table de vérité suivante (tableau 1.2).

Tableau 1.2

A	B	A OU B	A ET B
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	F

COMMENTAIRE A et B sont deux propositions, chacune vraie ou bien fausse, il y a donc quatre cas possibles de valeur de vérité pour le couple (A, B).

La proposition « A ET B » a clairement le sens de « A et B » du langage français courant – appelé aussi langage de l'observateur – avec « et » conjonction de coordination.

La proposition « A OU B » a clairement le sens de « A ou B » avec « ou » conjonction de coordination du français dans son sens *inclusif* « ou bien A, ou bien B, ou bien les deux ». Par exemple : « crédit possible si majeur *ou* marié » (banquier *dixit*).

En français, il est un autre « ou », même phonétique, même écriture, conjonction de coordination lui aussi, mais avec le sens *exclusif* « ou bien A, ou bien B, mais pas les deux ». Exemples : « fromage *ou* dessert » (menu de restaurant *dixit*) ; « tout *ou* rien » ; « blanc *ou* noir ».

On coupe court à ces facéties polysémiques du « ou » en français en choisissant, pour « OU » du langage mathématique : celui *inclusif*. Exemple : tableau 1.2 *dixit*. L'ambiguïté n'est plus.

DÉFINITION 4 : $P = Q$
Si la proposition P et la proposition Q dépendent des mêmes propositions A, B, C..., et, sur chacune des lignes de leur table de vérité commune, ont la même valeur de vérité, alors on dit qu'elles sont égales et on écrit $P = Q$.

B. Propriétés du NON, ET, OU

Par le biais des tables de vérité, on obtient les propriétés des trois connecteurs définis plus haut.

a) $\neg\neg A = A$. On construit la table de vérité (tableau 1.3).

Tableau 1.3

A	$\neg A$	$\neg\neg A$
V	F	V
F	V	F

Les propositions A et $\neg\neg A$ (comprendre $\neg(\neg A)$ et lire NON NON A) ont les mêmes valeurs de vérité sur les mêmes lignes, donc $\neg\neg A = A$ d'après la définition 4.

COMMENTAIRE Dans le langage mathématique, deux négations ont valeur d'affirmation. Ce n'est pas le cas dans le langage courant : « Non, je ne viendrai pas lundi », ne signifie pas : « Je viendrai lundi. »

b) $\neg(A \text{ OU } B) = \neg A \text{ ET } \neg B$. On construit la table de vérité (tableau 1.4).

Tableau 1.4

A	B	$\neg A$	$\neg B$	A OU B	$\neg(A \text{ OU } B)$	$\neg A \text{ ET } \neg B$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Les propositions $\neg(A \text{ OU } B)$ et $\neg A \text{ ET } \neg B$ ont mêmes valeurs de vérité sur les mêmes lignes, d'après la définition 4 : $\neg(A \text{ OU } B) = \neg A \text{ ET } \neg B$.

c) $\neg(A \text{ ET } B) = \neg A \text{ OU } \neg B$. On procède comme dans b., *mutatis mutandis*.

COMMENTAIRE Les écritures ci-dessus sont ambiguës dans leur lecture ; on aurait dû écrire :

$[\neg(A \text{ OU } B)] = [\neg(A) \text{ ET } (\neg B)]$ pour b) et

$[\neg(A \text{ ET } B)] = [(\neg A) \text{ OU } (\neg B)]$ pour c).

On a implicitement (sans le dire !) décidé que « = » domine « ET » et « OU » qui eux-mêmes dominent « $\neg$ ». D'où la suppression des parenthèses et la simplification d'écriture. On continuera par la suite.

1.3 $\Rightarrow$; Si... , Alors...

DÉFINITION 5 : « $\Rightarrow$ » le connecteur *implication*

Soit A et B deux propositions, on définit la nouvelle proposition « $A \Rightarrow B$ » (lire « A implique B » ou bien « A entraîne B » ou encore « si A, alors B ») par $(A \Rightarrow B) = (\neg A \text{ OU } B)$. D'où la table de vérité de « $A \Rightarrow B$ » (tableau 1.5).

Tableau 1.5

A	B	$\neg A$	$\neg A \text{ OU } B$	$A \Rightarrow B$	
V	V	F	V	V	ligne 1
V	F	F	F	F	ligne 2
F	V	V	V	V	ligne 3
F	F	V	V	V	ligne 4

COMMENTAIRE On retiendra que la proposition $A \Rightarrow B$ est toujours vraie sauf dans le cas où A vrai et B faux (ligne 2).

On ne tentera pas de « donner du sens » à la proposition « $A \Rightarrow B$ » en l'interprétant par le « Si A, alors B » du langage de l'observateur. Ainsi dire à un ami : « Si demain il pleut, alors je viens te voir » sous-entend : « Si demain il ne pleut pas, alors je ne viens pas te voir »... et on n'est plus dans le cadre de la définition exprimée ligne 3 de la table de vérité de « $A \Rightarrow B$ ». On doit regarder la table de vérité sans réfléchir (sans réfléchir pour une fois !). Dans le langage mathématique, le seul sens d'une proposition est sa valeur de vérité, c'est-à-dire la propriété d'être vraie ou fausse.

On ne confondra pas « $A \Rightarrow B$ », proposition dont la valeur de vérité dépend de celles de A et de B avec « l'affirmation $A \Rightarrow B$ est vraie », souvent utilisée pour énoncer un théorème.

Dans $A \Rightarrow B$, A est appelée condition suffisante pour B, et B condition nécessaire pour A. En effet, dans le cas où $A \Rightarrow B$ est vraie (lignes 1, 3, 4 de sa table de vérité) :

- Il suffit d'avoir A vraie pour être assuré de B vraie.
- On ne peut avoir A vraie et B fausse, le vrai de B est donc nécessaire au vrai de A.

Exemple : soit p un entier naturel, A et B les propositions :

- $A = (p \text{ nombre premier strictement supérieur à } 2)$
- $B = (p \text{ nombre impair})$

Il est clair que $A \Rightarrow B$ est une proposition vraie, que A est suffisant (mais pas nécessaire) pour B , que B est nécessaire (mais pas suffisant) pour A .

A. Propriétés du connecteur $\Rightarrow$

a) Il est faux que : $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$. On le constate (ligne 3, tableau 1.6).

Tableau 1.6

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \Rightarrow \neg B$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

b) $(A \Rightarrow B) = (\neg B \Rightarrow \neg A)$. Propriété qui se démontre par la table de vérité suivante (tableau 1.7).

Tableau 1.7

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Ce résultat est très utile dans les démonstrations quand, pour montrer que $A \Rightarrow B$ est une proposition vraie, il est plus commode de montrer la valeur vraie de $\neg B \Rightarrow \neg A$, appelée l'implication *contraposée* de $A \Rightarrow B$. On énonce parfois ce résultat : L'implication « $A \Rightarrow B$ » est *équivalente* à « $\neg B \Rightarrow \neg A$ » sa contraposée. Nous donnerons plus loin un sens au mot « *équivalent* ».

c) $(\neg(A \Rightarrow B)) = (A \text{ ET } \neg B)$. On peut, pour démontrer ce résultat, soit construire la table de vérité *ad hoc*, soit utiliser les propriétés du NON, ET, OU vues précédemment. Ainsi :

$$\neg(A \Rightarrow B) = \neg(\neg A \text{ OU } B) = \neg\neg A \text{ ET } \neg B = A \text{ ET } \neg B$$

COMMENTAIRE La négation d'une implication n'est donc pas une implication.

d) L'implication est **transitive**. Propriété qui se traduit par :

$$Q = [(A \Rightarrow B) \Rightarrow [(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)]]$$

est une proposition toujours vraie (tableau 1.8).

Tableau 1.8

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow C$	$(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	Q
V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

COMMENTAIRE La proposition $(A \Rightarrow B) \Rightarrow [(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)]$ est toujours vraie quelle que soit la valeur de vérité de ses variables A, B, C. On dit qu'elle est *valide*.

De la même manière, *mutatis mutandis*, on montre que :

$[(A \Rightarrow B) \text{ ET } (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ est une proposition valide. Cette validité exprime, elle aussi, la transitivité du connecteur $\Rightarrow$.

Cette technique de preuve par table de vérité clôt toute discussion.

1.4 $\Leftrightarrow$, Bi-implication

DÉFINITION 6 : « $\Leftrightarrow$ » le connecteur *bi-implication*

Soit A et B deux propositions, on définit la nouvelle proposition « $A \Leftrightarrow B$ » (lire « A bi-implication B » ou encore « A si et seulement si B ») par :

$$(A \Leftrightarrow B) = (A \Rightarrow B) \text{ ET } (B \Rightarrow A)$$

La table de vérité de « $A \Leftrightarrow B$ » est la suivante (tableau 1.9).

Tableau 1.9

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

On constate, *via* la définition 4, que :

- si « $A \Leftrightarrow B$ est vrai », alors « $A = B$ » ; et réciproquement ;
- si « $A \Leftrightarrow B$ est vrai », on dit que « A équivaut logiquement à B », ou encore les propositions A et B sont *équivalentes*.

COMMENTAIRE Dans la suite du cours, pour énoncer un théorème, une propriété, on écrira $A \Leftrightarrow B$ pour dire « $A \Leftrightarrow B$ est une proposition vraie », c'est-à-dire $A = B$.
De même, on écrira $A \Rightarrow B$ pour dire « $A \Rightarrow B$ est une proposition vraie ».

2 Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$

$\forall$ se lit « quel que soit », « pour tout ».

$\exists$ se lit « il existe au moins un ».

Soit $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ une famille rangée (ou suite) de nombres réels, les indices n pris dans $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

On considère les propositions :

- A = les a_n sont tous nuls ;
- B = les a_n sont non tous nuls ;
- C = à partir d'un certain rang les a_n sont tous nuls.

Pour de telles propositions, l'emploi des signes $\forall$ et $\exists$, appelés *quantificateurs*, permet de rendre mécanique 1) l'écriture des contraires ; 2) la recherche de leur lien logique ; 3) la démonstration de leur valeur de vérité dans les cas où les a_n sont explicités.

2.1 Règles d'utilisation

A. Le quantificateur « $\forall$ »

La proposition A = les a_n sont tous nuls :

- s'écrit « $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$ » ;
- se lit « quel que soit n élément de $\mathbb{N}$, $a_n = 0$ » ;
- signifie « $a_0 = 0$ ET $a_1 = 0$ ET $a_2 = 0$ ET... etc. »

B. Le quantificateur « $\exists$ »

La proposition B = les a_n sont non tous nuls :

- s'écrit « $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$ » ;
- se lit « il existe au moins un élément $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$ » ;
- signifie « l'un au moins des a_n est non nul ».

C. Passage d'une proposition à son contraire

On remarque que A et B sont des propositions contraires (*i.e.* $A = \neg B$ et $B = \neg A$). Si on remplace la proposition ($a_n \neq 0$) par $\neg(a_n = 0)$, les écritures suivantes font apparaître les règles permettant de passer d'une proposition contenant des quantificateurs à sa proposition contraire.

$$\begin{array}{ccc}
A = \forall n \in \mathbb{N}, & & a_n = 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\neg A = \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \neg(a_n = 0) & & \\
B = \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \neg(a_n = 0) & & \\
\downarrow & & \downarrow \\
\neg B = \forall n \in \mathbb{N}, & & a_n = 0
\end{array}$$

MÉTHODE

Pour passer d'une proposition à son *contraire* :

- on remplace le signe $\forall$ par $\exists$;
- on remplace le signe $\exists$ par $\forall$;
- on remplace la proposition sur laquelle porte le signe $\forall$ par son contraire ;
- on remplace la proposition sur laquelle porte le signe $\exists$ par son contraire.

D. Propositions contenant deux quantificateurs

a) Considérons la proposition C = « à partir d'un certain rang les a_n sont tous nuls ».

C signifie : il existe au moins un rang $p \in \mathbb{N}$ tel que $a_p = 0$ ET $a_{p+1} = 0$ ET $a_{p+2} = 0$ ET, etc. La proposition $a_p = 0$ ET $a_{p+1} = 0$ ET $a_{p+2} = 0$ ET, etc. peut s'écrire :

$$\forall n \geq p, a_n = 0$$

ou encore, *via* la définition 5 de « $\Rightarrow$ » donnée plus haut :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow a_n = 0$$

C'est la deuxième écriture que l'on choisit.

COMMENTAIRE C = « à partir d'un certain rang les a_n sont tous nuls » :

- s'écrit $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow a_n = 0$;
- se lit « il existe au moins $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq p$ alors $a_n = 0$ ».

b) Considérons la proposition D = $\neg C$ et appliquons le point méthode ci-dessus pour l'écrire à l'aide des quantificateurs.

$$\begin{aligned}
C &= \exists p \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow a_n = 0 \\
\neg C &= \forall p \in \mathbb{N}, \neg(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow a_n = 0) \\
\neg C &= \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \neg(n \geq p \Rightarrow a_n = 0) \\
\neg C &= \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq p \text{ ET } \neg(a_n = 0)
\end{aligned}$$

ou encore

$$D = \neg C = \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \text{ tel que } n \geq p \text{ ET } a_n \neq 0.$$

On a utilisé la propriété de négation de l'implication vue plus haut, à savoir : $\neg(A \Rightarrow B) = A \text{ ET } \neg B$.

MÉTHODE

$P(n, p)$ étant une proposition qui dépend de n et p , la négation de la proposition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} \text{ tel que } P(n, p)$$

est :

$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p \in \mathbb{N}, \neg P(n, p)$$

2.2 Exemples

- Soit A la proposition suivante, où $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.

A = Il existe dans $\mathbb{N}$ un entier plus grand que tous les autres.

À l'aide des quantificateurs, A s'écrit,

$$(A) = \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{N} \quad k \leq n$$

d'où l'écriture mécanique de son contraire

$$\neg(A) = \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \neg(k \leq n)$$

$$\neg(A) = \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } k > n$$

La connaissance intuitive des entiers naturels permet d'affirmer que A est fausse. Quant à la démonstration de cette affirmation faisons-la en démontrant que $\neg A$ est vraie.

Soit n un entier quelconque, en considérant $k = n + 1$ on a bien $k \in \mathbb{N}$ et $k > n$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe (on l'a trouvé !) $k \in \mathbb{N}$ tel que $k > n$.

Donc « $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } k > n$ » est une proposition vraie.

Conclusion : $\neg A$ est vraie, donc A est fausse.

COMMENTAIRE Dans la proposition $\neg A$, l'existence de l'entier k une fois n choisi est tout à fait concrète. En effet on sait expliciter k en fonction de n : $k = n + 1$ dans notre cas.

Pour un n choisi, il n'y a pas d'unicité de l'entier k : $k = n + 2$, $k = n + 3$, etc., conviennent aussi.

Dans notre exemple, les entiers k qui conviennent dépendent toujours de n , mais il peut ne pas en être ainsi.

Pour déterminer la valeur de vérité de A , on a étudié $\neg A$.

- Soit H = l'ensemble des humains et C = l'ensemble des chaussures.

Considérons la proposition : A = « Tout le monde trouve chaussure à son pied. » À l'aide des quantificateurs, A s'écrit : $A = \forall h \in H \exists c \in C$ tel que la pointure de c convienne à h . Si on change l'ordre des quantificateurs dans la proposition A , la nouvelle proposition B s'écrit : $B = \exists c \in C$ tel que $\forall h \in H$, la pointure de c convient à h . La traduction de B dans le langage courant est : il existe une chaussure « taille unique » qui convient à tous.

On retiendra de cet exemple, la propriété générale suivante :

- on change le sens d'une proposition en changeant l'ordre des quantificateurs ;
- la proposition $B = (\exists c \in \mathbb{C} \text{ tel que } \forall h \in H \dots)$
implique la proposition $A = (\forall h \in H \exists c \in \mathbb{C} \text{ tel que } \dots)$.
Implication qui, dans notre exemple, se comprend aisément puisque la chaussure c dont B vrai assure l'existence, convient à tous les hommes h dans l'écriture de A .

3 Application : opérations sur les ensembles

3.1 Ensemble, élément, inclusion

On connaît les ensembles numériques :

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ = l'ensemble des entiers naturels,

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ = l'ensemble des entiers,

$$\mathbb{Q} = \left\{ r = \frac{p}{q} \text{ tel que } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

= l'ensemble des nombres rationnels,

$\mathbb{R}$ = l'ensemble des nombres réels,

$\mathbb{C}$ = l'ensemble des nombres complexes,

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a < x < b\}$$

appelé intervalle ouvert de bornes a et b , etc.

Plus généralement, on dit que A est un *ensemble* si on est capable de reconnaître tous ses *éléments* c'est-à-dire, si l'écriture « $a \in A$ » est une proposition (vraie ou fausse donc) pour tout objet a considéré.

« $a \in A$ » se lit « a est un élément de A » (on dit aussi « a appartient à A »). On écrit $a \notin A$ pour exprimer $\neg(a \in A)$.

COMMENTAIRE Les termes « *ensemble* », « *élément* » sont familiers dans le cadre du langage courant et nous avons le sentiment, voire la certitude, de comprendre leurs diverses relations. En fait cette notion d'ensemble est beaucoup moins naïve qu'elle n'en a l'air et les pièges ludiques de la contradiction, découverts au début du siècle, ne peuvent être désamorcés. À partir des années 1950, les logiciens – Kurt Gödel entre autres – ont précisé les limites incontournables des formalismes dans l'écriture mathématique. Quelques ambitions mathématico-intellectuelles du début du siècle ont dû être revues à la baisse.

On désigne par E un ensemble, dit *référentiel*, où sont puisés tous les éléments servant à définir les autres ensembles.

Tout ensemble A peut alors être défini :

- soit en énumérant ses éléments (quand c'est possible) ;
- soit en donnant la propriété notée $P(a)$ qui caractérise ses éléments a pris dans E .

Exemples

- $E = \mathbb{R}$ et $P(a) = \langle a^2 + a - 2 = 0 \rangle$ et $A = \{a \in \mathbb{R} \text{ tel que } P(a)\}$, c'est-à-dire : $a \in A \iff P(a)$.

Il est clair que $A = \{-2, 1\}$.

- $E = \mathbb{R}$ et $A = \{a \in \mathbb{R} \text{ tel que } -1 < a < +1\}$ où la propriété $P(a)$ qui caractérise les éléments a de A est $-1 < a < +1$. Cet ensemble appelé intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ se note $A =]-1, +1[$. Il est clair que dans ce cas, on ne peut pas énumérer tous les éléments de A .

- On désigne par $\emptyset = \{ \}$, lire « ensemble vide », l'ensemble qui ne possède aucun élément et pour lequel donc la proposition « $a \in \emptyset$ » est fausse quel que soit l'élément a .

DÉFINITION 7 : Inclusion de deux ensembles

On dit que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B si $\forall a, a \in A \Rightarrow a \in B$. On note alors $A \subset B$ et A est appelé *sous-ensemble* ou *partie* de B .

COMMENTAIRE $A \subset B$ signifie que tout élément de A est élément de B , et les propriétés de $\subset$ seront les conséquences directes des propriétés de l'implication « $\Rightarrow$ » et du quantificateur « $\forall$ ».

DÉFINITION 8 : Égalité de deux ensembles

On dit que l'ensemble A est égal à l'ensemble B si $A \subset B$ et $B \subset A$. On note alors $A = B$.

3.2 Union, intersection, complémentaire, produit

Les connecteurs OU, ET, NON, et les quantificateurs $\forall, \exists$ permettent de définir de nouveaux ensembles à partir d'ensembles donnés. Leurs propriétés sont les conséquences directes des propriétés des connecteurs et quantificateurs.

On désigne par E un ensemble dit référentiel, par $A, B, C, \dots$ des parties de E et par $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ une famille de parties de E .

DÉFINITION 9

a) **Union de deux ensembles.** À l'aide du « OU » on définit le nouvel ensemble $A \cup B$ (lire A union B) tel que :

$$A \cup B = \{x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ OU } x \in B\}$$

b) **Union dénombrable d'une famille d'ensembles.** À l'aide du « $\exists$ » on définit le nouvel ensemble $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, (lire union sur $n \in \mathbb{N}$ des A_n) tel que :