

Sous la direction de **Stéphane Cardini**

Élisabeth Ehrhard | Annie Guérillot | Thierry Guillot

Bruno Morvan | Marie-Noëlle Sanz

PHYSIQUE

PSI/PSI*

TOUT-EN-UN

7^e édition

DUNOD

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

Retrouvez nos ouvrages pour les prépas scientifiques ici



<http://dunod.link/prepassc>

Les auteurs



Stéphane Cardini

Ancien élève de l'ENS (Paris-Saclay, ex-Cachan), agrégé de sciences physiques, Professeur de Chaire supérieure. Depuis plus de 25 ans, il enseigne en PSI à Saint-Cyr et participe à des jurys de concours, tant à l'écrit qu'à l'oral. Il a dirigé les Tout-en-un de MPSI-MP2I, PCSI et PTSI. Il est chevalier des Palmes académiques et président honoraire de la Société des agrégés de l'Université.



Élisabeth Ehrhard

Ancienne élève de l'ENS (Paris-Saclay, ex-Cachan), agrégée de sciences physiques, Professeur de Chaire supérieure. Elle enseigne au lycée Saint-Louis à Paris, en classe de PSI. Elle a participé aux jurys de plusieurs concours, aussi bien à l'écrit qu'à l'oral.



Annie Guérillot

Ancienne élève de l'ENS (Paris-Saclay, ex-Cachan), agrégée de sciences physiques, Professeur de Chaire supérieure. Elle enseigne en seconde année de CPGE depuis 35 ans et depuis 15 ans en PSI* au lycée Janson de Sailly. Elle participe à des jurys de concours, tant à l'écrit qu'à l'oral.



Thierry Guillot

Ancien élève de l'ENS (Paris-Saclay, ex-Cachan), agrégé de sciences physiques, Professeur de Chaire supérieure. Après un doctorat en électromagnétisme à Paris VI, puis deux années de recherche à l'ONERA, il a choisi d'enseigner en CPGE au lycée Victor Hugo de Besançon, en PCSI puis PSI. Il a été membre de jury du CAPES, de l'agrégation, des TIPE. En tant que président académique de l'Union des professeurs de physique et chimie (UdPPC), il a eu la responsabilité de l'organisation du congrès du centenaire de l'association, qui s'est tenu à Besançon.



Bruno Morvan

Ancien élève de l'ENS (Paris-Saclay, ex-Cachan), agrégé de sciences physiques, option physique appliquée, Professeur de Chaire supérieure. Il est actuellement professeur de sciences informatiques au lycée Henri Wallon de Valenciennes. Membre du concours Centrale-Supélec depuis 1996, il intervient en informatique et en physique, tant à l'écrit qu'à l'oral.

Préface de la 6^e édition

« Quand les mouettes ont pied, il est temps de virer ! »

EN mer, l'officier de marine s'appuie sur tout ce qui peut lui être utile pour naviguer en eaux saines. Au premier chef, il se fie à l'observation de ce qui l'entoure : l'état de la mer, la force et la direction du vent, la nébulosité du ciel, la hauteur des astres, la faune et la flore marines – mouettes comprises ! Si l'observation est le fondement des plus anciens travaux d'ordre scientifique, elle ne suffit évidemment pas à la conduite d'une opération navale. En effet, la mer, milieu naturellement hostile, permet la libre circulation de nombreuses menaces d'origine humaine qui imposent aux marins d'employer des moyens techniques nécessaires à la survie de l'équipage et à l'accomplissement de la mission. Pour les utiliser efficacement, il faut en comprendre le fonctionnement et faire preuve d'agilité intellectuelle.

Le pilote de Rafale Marine, après avoir décollé du porte-avions par nuit noire, use de sa capacité de division d'attention pour, en même temps, conduire son avion de chasse en sécurité à plus de 1000 km/h au-dessus d'un territoire hostile, gérer sa consommation de carburant avant le ravitaillement en vol, commander son équipier qui vole en patrouille serrée à quelques mètres de son aile, et préparer le largage de sa bombe à guidée laser selon une balistique ajustée qui permettra à son camarade commando marine, pris à partie au sol, de se dégager du feu de l'ennemi.

Ce membre des forces spéciales est arrivé sur le lieu de la libération d'otage après avoir construit la cinématique de son insertion sous voile nocturne, en prenant en compte la finesse de son parachute, les calculs statistiques des vents qu'il va traverser et la vitesse de l'avion qui le largue à 8000 m de hauteur, sous oxygène. Pendant le vol, avant de sauter, il a subi une dénitrogénéation qui lui permet d'éviter les pathologies résultant de la toxicité des gaz de l'atmosphère aux pressions partielles que ses tissus vont subir.

Le sous-marinier, qui navigue à l'immersion périscopique pour apporter du renseignement côtier à l'ensemble des forces impliquées dans l'opération, met à profit ses connaissances en matière de propagation des ondes acoustiques. Elles lui assurent la discrétion dont il a besoin pour échapper à la frégate anti-sous-marine lancée à sa poursuite : en faisant le meilleur emploi de la bathycélérimétrie qu'il a mesurée dans la couche d'eau, il est indétectable. Il se tient prêt à tirer, s'il le faut, un missile de croisière qui sortira des tubes lance-torpilles avant d'aller frapper un objectif au sol à plusieurs centaines de kilomètres, après avoir suivi une trajectoire de suivi de terrain, programmée peu de temps avant le tir.

Enfin, l'officier de surface, embarqué sur la frégate de défense aérienne qui protège le porte-avions des menaces missiles, a les yeux rivés sur les écrans de ses radars actifs, prêt à lancer des leurres électromagnétiques et infrarouges et tirer une arme anti-aérienne qui vole à plus de Mach 3 pour détruire un missile ennemi. Il n'aura que quelques secondes pour le détecter et réagir avant qu'il ne soit trop tard.

La quasi-totalité des officiers de Marine de carrière sont ingénieurs de l'École navale. Ils l'ont intégrée après avoir passé de nombreuses heures sur les bancs de leur école préparatoire civile ou militaire, à noircir des feuilles de brouillon couvertes d'intégrales triples échevelées, de surprenantes matrices nilpotentes, ou de torseurs cinématiques tordus, sans trop comprendre leur utilité sur le moment. Pourtant, comme on l'a compris, le marin fait appel quotidiennement aux connaissances scientifiques qu'il a acquises au cours de la prépa et de l'École navale. Et cela sera toujours vrai dans un monde où le progrès technique est de plus en plus rapide.

Il en a besoin en opération pour mettre en œuvre les équipements de pointe qui sont mis à sa disposition, mais aussi plus tard en coopération avec les industriels de défense et les ingénieurs de l'armement, lorsqu'il participe à la définition, au suivi de la conception et aux essais des navires, avions et armements qui remplaceront ceux qu'il a lui-même employés.

Mais ce n'est pas tout. D'une façon plus générale, le développement de la capacité de raisonnement logique assuré par les études scientifiques des écoles préparatoires est le fondement sur lequel les cadres militaires, comme civils, s'appuient tout au long de leur carrière, pour apporter les réponses aux multiples problèmes qu'ils rencontrent, dans les domaines aussi bien techniques qu'humains, d'organisation ou de stratégie.

Au cours d'une simple navigation ou d'une opération de combat, il est toujours des situations complexes qui semblent inextricables. Le commandant militaire doit savoir apporter la réponse à un problème qu'aucun autre ne voudrait avoir à résoudre, puisqu'il engage la vie des hommes et des femmes placés sous sa responsabilité, voire le sort d'une nation tout entière, lorsqu'il s'agit de mettre en œuvre les instruments de la dissuasion nucléaire française.

Cet ouvrage, tant plébiscité par les classes de seconde année de CPGE depuis plusieurs années, fournit une remarquable matière aux étudiants qui se préparent à affronter des coups de tabac, en mer ou en entreprise. En particulier, son chapitre « résolution de problèmes » offre des cas concrets suscitant l'imagination, la curiosité, la capacité de modéliser et de faire appel à ses ressources propres sans qu'aucune indication n'oriente le candidat. Dans le brouillard de la guerre, c'est précisément la responsabilité du chef : trouver la voie, avec détermination et inventivité.

Bon courage à vous !

Amiral Pierre VANDIER

Chef d'état-major de la Marine

Préface des 4^e et 5^e éditions

C'EST un plaisir et un grand honneur pour moi que de préfacier cet ouvrage remarquable de clarté, présentant de façon simple, progressive et rigoureuse, les savoirs fondamentaux qui accompagneront les futurs ingénieurs tout au long de leur carrière professionnelle.

Dans un rapport de 2014 (« Examens de l'OCDE des politiques d'innovation : France »), l'OCDE souligne que l'enjeu de dynamiser l'innovation en France est plus que jamais important ; il note aussi parmi les forces du système français sa capacité à former « des ingénieurs de grande qualité, polyvalents et innovants pour l'industrie ». Or c'est bien par le biais d'une démarche pédagogique telle que celle de ce livre que se pérennise cette force !

Les savoirs et les technologies évoluent aujourd'hui à un rythme particulièrement soutenu, ce que j'illustrerai par le fait qu'environ 1,5 million d'articles scientifiques sont publiés chaque année dans le monde.

Ces savoirs et technologies sont de plus en plus complexes :

- un processeur compte de l'ordre de 2 milliards de transistors ;
- un calculateur haute performance, nécessaire pour la conception des avions et des voitures, pour la génomique, pour la simulation des évolutions du climat... compte plusieurs centaines de milliers de ces processeurs.

Paradoxalement, la technologie est de moins en moins « apparente », les interfaces d'utilisation se doivent en effet d'être parfaitement intuitives, ce qui d'ailleurs augmente la complexité des solutions techniques à mettre en place. Tout ceci concourt à renforcer l'importance pour l'ingénieur de maîtriser les bases de culture générale scientifiques et techniques, condition *sine qua non* du maintien dans la durée de sa pertinence technique et de sa capacité d'innovation.

Il s'agira aussi pour l'ingénieur de rester en permanence curieux et ouvert aux évolutions. Ce livre l'y prépare par les exemples donnés, à la fois simples et judicieux, et les mises en perspective, qui, dans une démarche indispensable de mon point de vue, permettent à l'étudiant de comprendre la portée des concepts mis en équations.

J'y ajouterai un conseil pour les étudiants, futurs ingénieurs, qui liront ce livre : « prévoyez dès maintenant de préparer une thèse de doctorat : d'une part le doctorat est le standard mondial pour les acteurs innovants de la technologie, et d'autre part la démarche de la recherche, en construisant de nouveaux savoirs, complète tout naturellement les savoirs consolidés que vous pourrez acquérir durant votre future formation d'ingénieur ».

Jean-Philippe BOURGOIN

Agrégé de Sciences physiques

Ancien Directeur de la stratégie et des programmes du CEA

Conseiller auprès de la Ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation

Avant-propos

La 7^e édition du *Tout-en-un* reprend les fondamentaux qui ont assuré, édition après édition, le succès de l'ouvrage, tout en évoluant pour rester le plus proche des attentes des jurys de concours. Le livre s'enrichit d'un chapitre, d'un point de méthodologie et d'une trentaine d'exercices.

Les préparateurs trouveront dans chaque chapitre :

- un **COURS COMPLET** qui respecte les programmes officiels ;
- une **MÉTHODOLOGIE SYSTÉMATIQUE**, qui souligne les méthodes classiques, indispensables pour comprendre comment appréhender un problème de physique, puis le résoudre au mieux ;
- le **PROGRAMME OFFICIEL** et le **SOMMAIRE DES EXERCICES** ;
- de **TRÈS NOMBREUX EXERCICES DE NIVEAUX VARIÉS**, certains issus de problèmes de concours, souvent très récents, et de sujets d'oraux. La longue expérience au sein de jurys de concours des auteurs a permis de sélectionner les exercices et problèmes les plus formateurs, dont le niveau de difficulté est signalé :
 - ★ exercices de cours, dont la maîtrise est indispensable, repérés par un triangle noir ► dans le sommaire, pour être guidé dans l'apprentissage le cours ;
 - ★★ exercices simples et formateurs, de niveau e3a-Polytech et CCINP, repérés par un triangle blanc ▷ dans le sommaire ;
 - ★★★ exercices de niveau ambitieux, pour préparer les concours de Centrale-Supélec, des Mines, de l'École navale, aussi repérés par ▷ ;
 - ★★★★ exercices de niveau très élevé, pour se préparer aux concours les plus exigeants, X-ENS par exemple, encore repérés par ▷.

Mais cette répartition par niveau n'est pas absolue ! Certains thèmes peuvent sembler plus abordables que d'autres, plus compréhensibles ; certains exercices ★★ pourraient sembler plus ardues que des ★★★ ; c'est normal, nous ne sommes pas égaux face à un même sujet.

De plus, préparer un concours particulier n'empêche en rien de s'exercer à un niveau plus élevé, ou alors plus facile pour s'assurer de la bonne maîtrise des fondamentaux.

Un **TRÈS LARGE CHOIX D'EXERCICES** est proposé, afin que les 5/2 trouvent aussi à s'exercer efficacement. Les 3/2 n'auront donc **PAS LE TEMPS PENDANT LEUR ANNÉE DE TOUS LES TRAITER**, ce qui n'est évidemment pas rédhibitoire pour une belle intégration.

Un large choix de **RÉSOLUTIONS DE PROBLÈMES** se trouve en fin d'ouvrage, afin de travailler ce type de question non guidée.

Puisse ce livre être un compagnon qui vous aidera à vous épanouir dans votre travail et à apprécier cette introduction au noble travail d'ingénieur !

Mode d'emploi

Une introduction présente le sujet traité et le plan suivi.

Diffusion thermique

11

LES phénomènes de conduction thermique décrivent les échanges d'énergie qu'on appelle, dans le langage commun, la chaleur. On en propose dans ce chapitre une mise en équation, pour aboutir à des applications concrètes comme la thermique des bâtiments.

Les définitions importantes sont placées dans un encadré gris, les remarques et les exemples comportent un filet vertical sur la gauche.

- δg représente une **quantité infinitésimale** ;
- df représente une **variation infinitésimale**.

Remarque

Ce bilan d'énergie massique est la forme du premier principe de la thermodynamique la plus adaptée à l'étude des machines thermiques en fonctionnement stationnaire ; c'est la raison pour laquelle on le qualifie de « **premier principe industriel** ».

Exemple

L'espace étant repéré par le système de coordonnées cartésiennes $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, on considère par exemple le champ $\vec{E}(M)$ défini par $\vec{E}(x) = E_0 \vec{u}_x$, en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{dE_0}{dx} = 0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \rho = 0.$$

Suivent différentes questions de méthodologie, entièrement traitées.

MÉTHODOLOGIE

Comment reconnaître un oscillateur à relaxation ?

▷ C'est un montage sans entrée ni sortie imposée, avec un comparateur à hystérésis (ALI bouclé par deux résistances sur sa borne non inverseuse $\oplus$).

Le programme officiel et le sommaire des exercices sont proposés à la fin de chaque cours.

PROGRAMME OFFICIEL ET SOMMAIRE DES EXERCICES

NOTIONS ET CONTENUS

CAPACITÉS EXIGIBLES

Fonction de transfert d'un système entrée-sortie linéaire continu et invariant.

► **1.C3**

▷ **1.2 1.3**

Transposer la fonction de transfert opérationnelle dans les domaines fréquentiel (fonction de transfert harmonique) ou temporel (équation différentielle).

De nombreux exercices, dont la difficulté est traduite par des étoiles, sont proposés dans chaque chapitre. On distinguera :

- les exercices de cours, qui reprennent les capacités exigibles du programme, classés d'une étoile, repérés par un triangle noir dans le sommaire et dont le numéro est précédé d'un C ;

EXERCICES ★ (LE COURS)

20.C1 Équation locale de conservation de la charge La citer puis la démontrer.

- d'autres exercices allant de 2 à 4 étoiles, repérés par un triangle blanc dans le sommaire.

EXERCICES ★★★★★

34.11 Rayonnement d'un fil

Un fil électrique, qui coïncide avec l'axe (Oz), rayonne dans le vide, de manière isotrope, un champ électrique de la forme $\vec{E}(r, t) = A(r) \exp(j(\omega t - kr)) \vec{u}_z$.

En calculant la puissance émise par le fil, montrer que $A(r)$ est proportionnel à $1/\sqrt{r}$.

Tous les exercices sont entièrement corrigés.

CORRIGÉS

[...]

2.1 Dérivateur idéal

La loi des nœuds à l'entrée inverseuse, $I_C = I_R + I^-$, mène à $Cp(E - V^-) = \frac{1}{R}(V^- - S)$ car $I^- = 0$.

Attendu que $V^- = V^+ = 0$ (ALI idéal et non saturé) : $S(p) = -RCpE(p)$, soit $s(t) = -RC \frac{de}{dt}$.

Table des matières

Présentation des auteurs	III
Préface de la 6^e édition	V
Préface des 4^e et 5^e éditions	VII
Avant-propos	IX
Mode d'emploi	X

ÉLECTRONIQUE

1 Stabilité des systèmes linéaires	1
1 Systèmes linéaires, continus et invariants	1
2 Description d'un système électronique	2
3 Stabilité	5
Méthodologie	9
Programme officiel et sommaire des exercices	9
Exercices	10
Corrigés	11
2 Amplificateur linéaire intégré	13
1 Amplificateur linéaire intégré	13
2 Étude d'un montage à rétroaction négative : l'amplificateur non inverseur . .	17
3 Étude d'un montage à rétroaction positive : le comparateur à hystérésis	22
4 ALI idéal : limite du gain infini (régime linéaire)	23
Méthodologie	31
Programme officiel et sommaire des exercices	35

Exercices	36
Corrigés	45
3 Oscillateurs quasi sinusoïdaux	60
1 Présentation d'un oscillateur quasi sinusoïdal	60
2 Conditions théoriques d'auto-oscillation	62
3 Condition de démarrage des oscillations	63
Méthodologie	68
Programme officiel et sommaire des exercices	69
Exercices	70
Corrigés	74
4 Oscillateurs à relaxation	82
1 Amplificateur opérationnel de gain infini en régime saturé	82
2 Comparateurs à hystérésis	84
3 Générateur de signaux	87
Méthodologie	90
Programme officiel et sommaire des exercices	92
Exercices	93
Corrigés	98
5 Électronique numérique	108
1 Échantillonnage	108
2 Spectre d'un signal échantillonné	109
3 Analyse spectrale expérimentale	112
4 Filtrage numérique	114
Méthodologie	118
Programme officiel et sommaire des exercices	119
Exercices	120
Corrigés	124
6 Modulation - démodulation	126
1 Modulation	126
2 Modulation d'amplitude	127
3 Démodulation	130
Méthodologie	132
Programme officiel et sommaire des exercices	133
Exercices	134
Corrigés	138

THERMODYNAMIQUE

7	Écriture infinitésimale des principes de la thermodynamique	142
1	Calcul infinitésimal : notations d et δ	142
2	Intégration	144
3	Écriture des principes de la thermodynamique sous forme infinitésimale . . .	144
	Méthodologie	147
	Programme officiel	148
8	Bilans d'énergie et d'entropie en présence d'écoulement	149
1	Systèmes fermés en écoulement	149
2	Bilans thermodynamiques d'énergie et d'entropie	150
	Méthodologie	154
	Programme officiel et sommaire des exercices	154
	Exercices	155
	Corrigés	158
9	Diagramme des frigorisistes	163
1	Exemple de réfrigérateur	163
2	Pourquoi des changements d'état ?	164
3	Le premier principe industriel	164
4	Diagramme des frigorisistes	165
	Méthodologie	170
	Programme officiel et sommaire des exercices	172
	Exercices	173
	Corrigés	179
10	Diffusion de particules	185
1	Mouvement de particules	185
2	Vecteur densité de courant de particules de diffusion	186
3	Loi de Fick	187
4	Équations de continuité et de diffusion	189
5	Remarques générales	196
6	Vecteur densité de courant de particules de convection	197
7	Du microscopique au mésoscopique	198
	Méthodologie	200
	Programme officiel et sommaire des exercices	201
	Exercices	202
	Corrigés	208

11 Diffusion thermique	215
1 Mise en évidence expérimentale	215
2 Flux d'énergie	216
3 Équilibre thermodynamique local	217
4 Équation de la diffusion thermique	218
5 Conditions aux limites	225
6 Régime stationnaire (sans terme source)	228
Méthodologie	236
Programme officiel et sommaire des exercices	237
Exercices	239
Corrigés	253

MÉCANIQUE DES FLUIDES

12 Statique des fluides	273
1 Introduction	273
2 Forces dans un fluide au repos	275
3 Relation fondamentale de la statique des fluides	279
4 Évolution de la pression au sein d'un fluide incompressible dans un champ de pesanteur uniforme	280
5 Évolution de la pression au sein d'un gaz parfait isotherme dans un champ de pesanteur uniforme	281
6 Poussée d'Archimède	282
Méthodologie	284
Programme officiel et sommaire des exercices	286
Exercices	287
Corrigés	291
13 Débits et lois de conservation	299
1 Vitesse microscopique et vitesse mésoscopique	299
2 Descriptions lagrangienne (complément) et eulérienne	299
3 Dérivée particulaire du vecteur vitesse	302
4 Vecteur densité de courant de masse	305
5 Débit massique	306
6 Conservation de la masse	307
7 Débit volumique	309
8 Écoulements particuliers	310
Méthodologie	315

Programme officiel et sommaire des exercices	316
Exercices	317
Corrigés	319
14 Écoulements parfaits : théorème de Bernoulli	321
1 Modèle de l'écoulement parfait	321
2 Lien entre énergie interne massique et enthalpie massique	321
3 Relation de Bernoulli pour les écoulements parfaits stationnaires homogènes et incompressibles	321
4 Applications de la relation de Bernoulli	323
5 Bilan macroscopique d'énergie mécanique en écoulement stationnaire	328
Méthodologie	330
Programme officiel et sommaire des exercices	332
Exercices	333
Corrigés	338
15 Écoulements parfaits : bilans	345
1 Bilans de quantité de mouvement	345
2 Bilans de moment cinétique	349
Méthodologie	351
Programme officiel et sommaire des exercices	352
Exercices	353
Corrigés	359
16 Actions de contact sur un fluide en écoulement	373
1 Forces de surface normales et tangentielles	373
2 Force normale de pression	373
3 Force tangentielle de viscosité	374
4 Profils de vitesses d'écoulements parallèles	376
Méthodologie	379
Programme officiel et sommaire des exercices	379
Exercices	380
Corrigés	383
17 Écoulements homogènes et incompressibles dans une conduite cylindrique	388
1 Vitesse débitante	388
2 Écoulements laminaires et turbulents	389
3 Nombre de Reynolds	393
4 Chute de pression dans une conduite horizontale à faible nombre de Reynolds	396

5	Chute de pression dans une conduite horizontale pour un nombre de Reynolds quelconque	399
	Méthodologie	404
	Programme officiel et sommaire des exercices	406
	Exercices	407
	Corrigés	415
18	Écoulement externe homogène et incompressible autour d'un obstacle	424
1	Couche limite en écoulement externe	424
2	Force de traînée subie par une sphère	425
3	Force de traînée subie par des objets de formes diverses	429
4	Traînée et portance d'une aile d'avion à haut nombre de Reynolds	431
	Méthodologie	437
	Programme officiel et sommaire des exercices	438
	Exercices	439
	Corrigés	450

ÉLECTROMAGNÉTISME

19	Électromagnétisme en régime statique : le champ électrique	463
1	Charges électriques	463
2	Force électrique, définition du champ électrique	467
3	Théorème de Gauss	470
4	Équations locales de l'électrostatique	472
5	Symétries du champ électrique	477
6	Invariances de la distribution de charges par des transformations géométriques	481
7	Propriétés topographiques du champ électrique et du potentiel	482
8	Calculs de champs électriques ou de gravitation créés par des distributions de symétrie élevée	486
9	Exploitation du théorème de superposition	491
	Méthodologie	492
	Programme officiel et sommaire des exercices	494
	Exercices	495
	Corrigés	502
20	Courant électrique - Conducteur métallique	519
1	Courant électrique	519
2	Équation de conservation de la charge	520

3	Courant dans un métal : modèle de Drüde	523
	Méthodologie	528
	Programme officiel et sommaire des exercices	529
	Exercices	530
	Corrigés	532
21	Condensateurs	535
1	Propriétés d'un conducteur en équilibre statique	535
2	Phénomène d'influence électrique	535
3	Champ électrique créé dans un condensateur	536
4	Capacité du condensateur plan, énergie électrique	538
	Méthodologie	539
	Programme officiel et sommaire des exercices	540
	Exercices	541
	Corrigés	543
22	Champ magnétique en régime stationnaire	545
1	Définition du champ magnétique	545
2	Distribution de courants	546
3	Le champ magnétique est à flux conservatif	547
4	Théorème d'Ampère	548
5	Équations de Maxwell de la magnétostatique	549
6	Propriétés de symétrie du champ magnétostatique	550
7	Calculs de champs magnétostatiques à l'aide du théorème d'Ampère	550
8	Force de Laplace exercée sur des conducteurs parcourus par des courants	560
	Méthodologie	561
	Programme officiel et sommaire des exercices	563
	Exercices	564
	Corrigés	569
23	Équations de Maxwell	579
1	Les équations de Maxwell en régime variable	579
2	Propriétés de symétrie	583
3	Définition et continuité des champs	584
4	Énergie cédée aux porteurs de charge	586
5	Densité d'énergie électromagnétique et énergie transportée	587
	Méthodologie	590
	Programme officiel et sommaire des exercices	591

Exercices	592
Corrigés	595
24 Approximation des régimes quasi stationnaires	601
1 Échelles spatiale et temporelle	601
2 Hypothèses de l'ARQS magnétique	603
3 Induction électromagnétique dans un conducteur massif	605
4 Induction électromagnétique dans un circuit électrique filiforme	608
5 Énergie magnétique	609
Méthodologie	611
Programme officiel et sommaire des exercices	612
Exercices	613
Corrigés	617

CONVERSION DE PUISSANCE

25 Puissance électrique en régime sinusoïdal	626
1 Définitions générales	626
2 Puissance reçue par un dipôle	627
3 Régime sinusoïdal	629
Méthodologie	633
Programme officiel et sommaire des exercices	636
Exercices	637
Corrigés	640
26 Ferromagnétisme et transformateur	647
1 Moment magnétique d'un aimant permanent	647
2 Équations de Maxwell dans un milieu magnétique, dans l'ARQS	651
3 Milieu ferromagnétique	654
4 Circuit magnétique	658
5 Transformateur	665
Méthodologie	672
Programme officiel et sommaire des exercices	673
Exercices	675
Corrigés	686

27	Introduction à la conversion électro-magnéto-mécanique	699
1	Description d'un contacteur électromagnétique	699
2	Force électromagnétique	700
3	Application au contacteur	700
4	Complément : établissement de la formule de la force	702
	Méthodologie	703
	Programme officiel et sommaire des exercices	704
	Exercices	705
	Corrigés	710
28	Machine synchrone	717
1	Architecture	717
2	Champs glissants	719
3	Couple électromagnétique	725
4	Schéma électrique équivalent	729
5	Utilisations	741
	Méthodologie	742
	Programme officiel et sommaire des exercices	743
	Exercices	745
	Corrigés	757
29	Machine à courant continu	771
1	Organisation de la machine à courant continu	771
2	Étude du circuit statorique	772
3	Étude du circuit rotorique	773
4	Couple électromagnétique	776
5	Force contre-électromotrice	777
6	Schéma électrique de la machine	780
7	Complément : rendement de la machine à courant continu	781
8	Moteur à courant continu en régime transitoire	784
	Méthodologie	787
	Programme officiel et sommaire des exercices	788
	Exercices	789
	Corrigés	794

30 Conversion électronique de puissance	801
1 Les différentes présentations de l'énergie électrique	801
2 Généralités sur les convertisseurs électroniques statiques de puissance	803
3 Source de tension ou de courant	806
4 Règles d'association des sources et structure du convertisseur à deux inter- rupteurs	809
5 Les interrupteurs électroniques	810
6 Hacheur série ou hacheur dévolteur	813
7 Onduleur	820
Méthodologie	825
Programme officiel et sommaire des exercices	827
Exercices	829
Corrigés	839

PHYSIQUE DES ONDES

31 Équation de d'Alembert unidimensionnelle	855
1 La corde vibrante	855
2 Solutions progressives de l'équation de d'Alembert	857
3 Solutions stationnaires de l'équation de d'Alembert	862
4 Équivalence entre ondes progressives harmoniques et ondes stationnaires harmoniques	869
Méthodologie	870
Programme officiel et sommaire des exercices	871
Exercices	872
Corrigés	879
32 Ondes dans un câble coaxial sans perte	888
1 Présentation	888
2 Mise en équation	888
3 Impédance caractéristique	890
4 Réflexion en amplitude sur une impédance terminale	891
Méthodologie	896
Programme officiel et sommaire des exercices	896
Exercices	897
Corrigés	902

33 Ondes sonores dans les fluides	914
1 Le son	914
2 Approximation acoustique	915
3 Équation de propagation	917
4 Étude énergétique	919
5 Ondes planes progressives harmoniques (OPPH)	922
6 Ondes sphériques progressives harmoniques	926
7 Réflexion et transmission sur une interface plane	928
8 Mesure de vitesse par effet Doppler	931
Méthodologie	934
Programme officiel et sommaire des exercices	936
Exercices	938
Corrigés	947
34 Ondes électromagnétiques dans le vide	960
1 Domaines de fréquence et de longueurs d'ondes des ondes électromagnétiques	960
2 Équations de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide	960
3 Onde électromagnétique progressive harmonique dans le vide	962
4 Structure des ondes électromagnétiques planes progressives et harmoniques dans le vide	963
5 Réflexion d'une OEPPH sur un plan conducteur parfait en incidence normale	969
Méthodologie	976
Programme officiel et sommaire des exercices	978
Exercices	979
Corrigés	986
35 Onde thermique. Dispersion absorption	999
1 Exemple introductif : onde thermique en géométrie unidirectionnelle	999
2 Dispersion et absorption dans les milieux régis par une équation de propaga- tion linéaire	1003
3 Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif non absorbant	1006
Méthodologie	1012
Programme officiel et sommaire des exercices	1013
Exercices	1014
Corrigés	1021
36 Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs	1031
1 Propagation d'une onde plane harmonique dans un conducteur ohmique	1031
2 Onde électromagnétique dans un plasma	1037

Méthodologie	1043
Programme officiel et sommaire des exercices	1045
Exercices	1046
Corrigés	1054

RÉSOLUTIONS DE PROBLÈMES

37 Résolutions de problèmes	1063
Données numériques	1064
Énoncés	1068
Indications	1075
Corrigés	1077
Index	1107

Stabilité des systèmes linéaires

1

Un système est décrit de manière équivalente par son équation différentielle ou sa fonction de transfert. Ce point, déjà abordé en première année, est ici affirmé. On cherche ensuite un critère de stabilité.

1 Systèmes linéaires, continus et invariants

1.1 Notion générale de système

Un système est un dispositif qui traite un ou plusieurs signaux d'entrée afin de réaliser la fonction voulue par son concepteur ; le système produit ainsi à son tour un ou plusieurs signaux de sortie. Par exemple, un téléphone portable est une suite de systèmes qui accomplissent successivement la transformation d'un signal sonore, la voix, en un signal électrique ; la conversion du signal électrique en un autre signal électrique constitué de niveaux logiques ; sa modulation puis finalement son émission, c'est-à-dire la transformation du signal électrique codé en un signal électromagnétique.

Un système associe finalement à un signal d'entrée e un signal de sortie s .

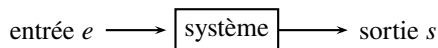


Figure 1.1 – Représentation symbolique d'un système monoentrée et monosortie.

La notion de système est très générale. Ce peut être une vanne, dont l'entrée est l'angle d'un robinet et la sortie un débit ; un moteur électrique, dont l'entrée est une tension de commande et la sortie une vitesse de rotation ; une puce électronique, dont l'entrée et la sortie sont deux tensions électriques...

Remarque

Un système n'est pas nécessairement monovariable, il peut fort bien manipuler plusieurs entrées et produire plusieurs sorties.

1.2 Systèmes continus

Il existe deux classes de systèmes : les systèmes continus et les systèmes numériques.

Dans un **système continu**, les signaux d'entrée et de sortie sont définis à chaque instant, on les note $e(t)$ et $s(t)$ et on les qualifie de continus ou d'analogiques. Dans le cas de signaux électriques, on peut les afficher sur un oscilloscope.

Remarque

Un signal continu est décrit par une fonction mathématique continue.

Un **système numérique** manipule et produit des signaux numériques, suites binaires de niveaux logiques 0 et 1. Ce sont typiquement des puces électroniques qu'on trouve dans tous les ordinateurs, téléphones, tablettes... Les signaux numériques sont transformés en signaux continus avec un convertisseur numérique-analogique, connu sous l'acronyme **CNA** ; l'opération inverse, qui convertit un signal continu en un signal numérique, est assurée par un convertisseur analogique-numérique, ou **CAN**.

1.3 Systèmes linéaires

Les systèmes étudiés sont des **systèmes linéaires** : la réponse à une combinaison linéaire d'entrées est la combinaison linéaire identique des sorties associées à chaque entrée. Par exemple, si une personne A parle dans un téléphone, le récepteur entend A . Il entend de même B si B parle dans le même téléphone. Et si A et B sont côte à côte et parlent tous les deux en même temps, alors le récepteur entend les voix de A et de B . Ceci se formalise ci-dessus.

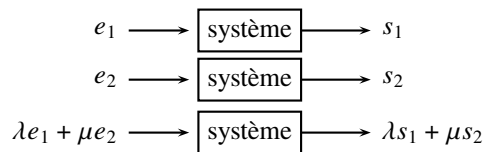


Figure 1.2 – Linéarité d'un système.

1.4 Systèmes invariants

Les systèmes étudiés sont des **systèmes invariants dans le temps** : leurs propriétés ne changent pas au cours du temps. Ce n'est vrai qu'approximativement, car tous les systèmes vieillissent et doivent être remplacés lorsque leurs propriétés se sont dégradées. Ils restent toutefois invariants pendant leur durée de vie.

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps sont souvent indiqués par leur acronyme anglais **LTI systems**, pour *linear time-invariant systems*.

Les systèmes étudiés dans le cadre de ce cours sont linéaires, temporellement invariants et manipulent des signaux continus.

2 Description d'un système électronique

2.1 Représentation par équation différentielle

La loi entrée-sortie est sous la forme d'une équation différentielle. Par exemple pour le système électrique de la figure 1.3.

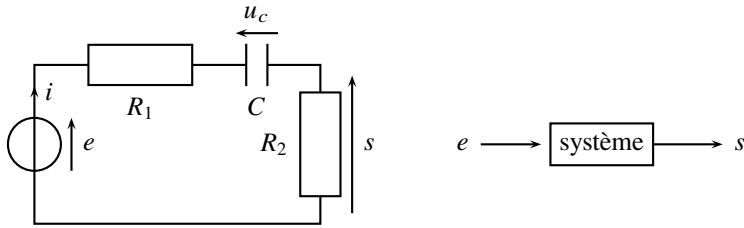


Figure 1.3 – Système étudié : schéma du montage et schéma-bloc.

Les tensions s et u_c sont en convention récepteur. Attendu que le courant est le même dans les deux dipôles :

$$s = R_2 i \quad \text{et} \quad i = C \frac{du_c}{dt}.$$

La loi des mailles mène à :

$$e = R_2 i + u_c + R_1 i \quad \text{soit} \quad \frac{de}{dt} = (R_1 + R_2) \frac{di}{dt} + \frac{du_c}{dt}.$$

En remplaçant i et u_c par leur expression en fonction de s :

$$\frac{de}{dt} = (R_1 + R_2) \frac{1}{R_2} \frac{ds}{dt} + \frac{s}{R_2 C}.$$

On écrit finalement l'équation différentielle qui régit l'évolution du système sous forme canonique :

$$(R_1 + R_2) C \frac{ds}{dt} + s(t) = R_2 C \frac{de}{dt}.$$

Remarque

Tous les systèmes ne sont pas décrits par une équation différentielle. Par exemple, un retard pur de τ est modélisé par $s(t) = e(t - \tau)$, qui n'est pas une équation différentielle.

2.2 Représentation par fonction de transfert

En régime sinusoïdal, on note :

$$\underline{s}(t) = S_0 \exp(j(\omega t + \varphi)) = S_0 \exp(j\varphi) \exp(j\omega t) = \underline{S} \exp(j\omega t),$$

la représentation complexe du signal $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

La **fonction de transfert harmonique**, ou **transmittance harmonique**, d'un système, est le lien entre le signal de sortie $\underline{s}(t)$ et celui d'entrée $\underline{e}(t)$, en régime permanent sinusoïdal à la pulsation ω , imposée par l'entrée :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}.$$

On définit, dans le cours de Sciences industrielles pour l'Ingénieur, une fonction de transfert, issue d'une transformée intégrale de Laplace. Cette opération ne relève pas du présent cours,

mais l'identité des résultats avec le régime harmonique doit être soulignée. La variable p de Laplace correspond au terme $j\omega$ du régime harmonique à la pulsation ω :

$$p \longleftrightarrow j\omega \quad \text{et} \quad p^2 \longleftrightarrow (j\omega)^2.$$

Ainsi :

La **fonction de transfert de Laplace**, ou **transmittance de Laplace**, d'un système, est le lien entre la transformée de Laplace du signal de sortie $S(p)$ et celle d'entrée $E(p)$, quel que soit le régime (harmonique ou autre) :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}.$$

Afin de simplifier le lien avec le cours de Sciences industrielles pour l'Ingénieur, la notation $H(p)$ sera utilisée et nommée fonction de transfert ou transmittance, sans autre référence.

On propose un exemple de fonction de transfert pour le système de la figure 1.3. La formule du diviseur de tension mène à :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{Z_{R2}}{Z_{R1} + Z_C + Z_{R2}} = \frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{Cp} + R_2} = \frac{R_2 Cp}{R_1 Cp + 1 + R_2 Cp}.$$

Finalement :

$$H(p) = \frac{R_2 Cp}{1 + (R_1 + R_2) Cp}.$$

Remarque

Le remplacement de $j\omega$ par p simplifie aussi l'écriture des impédances : pour un condensateur de capacité C , $Z_C = \frac{1}{Cp}$ et pour une bobine d'inductance L , $Z_L = Lp$.

2.3 Lien entre l'équation différentielle et la transmittance

L'écriture de la fonction de transfert sous la forme d'un rapport de deux polynômes en p permet une identification immédiate. On utilise les équivalences :

$$p \longleftrightarrow j\omega \longleftrightarrow \frac{d}{dt} \quad \text{et} \quad p^2 \longleftrightarrow (j\omega)^2 \longleftrightarrow \frac{d^2}{dt^2}$$

sur l'exemple précédent :

$$\begin{aligned} \frac{S(p)}{E(p)} &= \frac{R_2 Cp}{1 + (R_1 + R_2) Cp} & \text{donc} & \quad ((R_1 + R_2) Cp + 1) S(p) = R_2 Cp E(p) \\ & & \text{donc} & \quad (R_1 + R_2) C \frac{ds}{dt} + s(t) = R_2 C \frac{de}{dt}. \end{aligned}$$

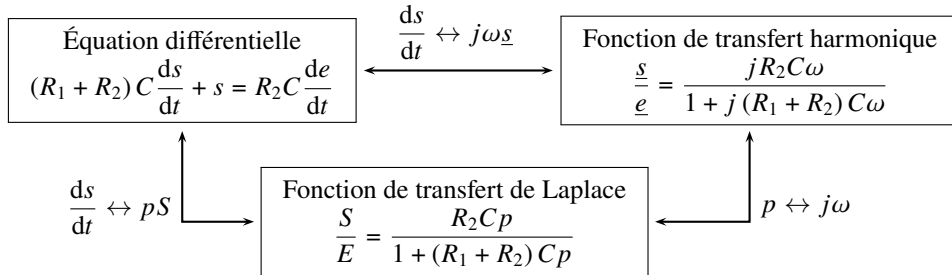


Figure 1.4 – Liens entre équation différentielle, transmittance harmonique et transmittance de Laplace.

Remarque

L'équivalence entre la dérivée et la transformée de Laplace est $\frac{ds}{dt} \leftrightarrow pS(p) - s(0^+)$. La transmittance est toutefois toujours écrite en supposant les conditions initiales nulles.

3 Stabilité

3.1 Définition

Qu'est-ce qu'un système stable en électronique ? C'est un système dont la sortie reste limitée, ne s'accroît pas indéfiniment. On propose donc une définition intuitive de la **stabilité d'un système linéaire**.

Un système linéaire est stable si, et seulement si, pour une entrée bornée, la sortie reste bornée.

Aucun système physique ne peut toutefois présenter de sortie infiniment divergente. Par exemple l'intensité sonore d'un système audio est-elle limitée, tout comme la température de l'eau d'un système de chauffage. Un système qui atteint sa valeur maximale et y reste, quelle que soit la valeur de l'entrée, est **saturé**. Un système instable ne diverge donc pas en pratique ; l'amplitude de la sortie augmente jusqu'à la saturation, le système ne fonctionne plus linéairement.

3.2 Système du premier ordre

Soit un système passe-bas du premier ordre, décrit par sa fonction de transfert, qui n'est pas écrite sous forme canonique pour les besoins de la démonstration :

$$E(p) \longrightarrow \boxed{H(p) = \frac{H_0}{a + bp}} \longrightarrow S(p)$$

Figure 1.5 – Système passe-bas du premier ordre.

L'équation différentielle, qui modélise le comportement temporel du système, est issue de la fonction de transfert :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_0}{a + bp} \quad \text{donc} \quad (bp + a)S(p) = H_0E(p) \quad \text{puis} \quad b \frac{ds}{dt} + as = H_0e.$$

La sortie $s(t)$, associée à l'entrée $e(t)$, est la somme de deux termes :

- la **solution particulière**, notée $s_p(t)$ (indice p pour « particulière »), cherchée sous la même forme que l'entrée (constante dans le cas d'un échelon, harmonique dans le cas d'une entrée harmonique). Cette solution représente physiquement le régime établi ;
- la **solution homogène**, notée $s_h(t)$ (indice h pour « homogène »), solution de l'équation homogène $b \frac{ds_h}{dt} + as_h = 0$:

$$s_h(t) = \lambda \exp\left(-\frac{at}{b}\right),$$

où λ est une constante d'intégration trouvée avec les conditions initiales. Cette solution représente physiquement le régime libre, obtenu dans le cas où $e = 0$.

Ainsi, $s(t) = \lambda \exp\left(-\frac{at}{b}\right) + s_p(t)$. Avec une entrée bornée, la **solution particulière** est aussi bornée, car elle est de la même forme que l'entrée ; son amplitude reste limitée. Les cas classiques de l'entrée en forme d'échelon et l'entrée harmonique illustrent ce point :

- $s_p(t) = \frac{H_0E_0}{a}$ si $e(t) = E_0$;
- $s_p(t) = \frac{H_0E_0}{\sqrt{a^2 + (b\omega)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan \frac{b\omega}{a}\right)$ si $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ et $a > 0$.

Tel n'est pas toujours le cas pour la **solution homogène**, qui tend vers zéro quand $t \rightarrow \infty$ si $\frac{a}{b} > 0$, mais qui diverge si $\frac{a}{b} < 0$. Le système est donc stable si et seulement si les coefficients du dénominateur de la fonction de transfert, a et b , pour les termes en p^0 et p^1 , sont de même signe.

Et si le filtre ne présentait pas de caractère passe-bas ? Le résultat serait le même. En effet, par exemple pour un passe-haut, la fonction de transfert et l'équation différentielle à laquelle obéit le circuit sont :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = H_0 \frac{\tau p}{a + bp} \quad \text{donc} \quad (bp + a)S(p) = H_0 \tau p E(p) \quad \text{puis} \quad b \frac{ds}{dt} + as = H_0 \tau \frac{de}{dt}.$$

La solution particulière reste bornée si l'entrée est bornée. La stabilité est uniquement due à la solution homogène, solution de l'équation homogène $b \frac{ds_h}{dt} + as_h = 0$, qui reste inchangée par rapport au cas précédent. La conclusion quant à la stabilité est donc identique.

Les termes différentiels caractéristiques de l'entrée, nuls dans l'équation homogène, ne jouent aucun rôle dans la stabilité. Ils proviennent du numérateur de la fonction de transfert.

Le numérateur de la fonction de transfert ne joue aucun rôle dans la stabilité d'un système linéaire.

3.3 Système du deuxième ordre

Soit un système passe-bas du deuxième ordre, décrit par sa fonction de transfert, qui n'est pas écrite sous forme canonique pour les besoins de la démonstration :

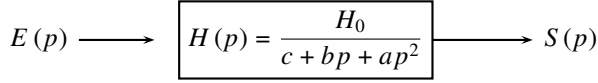


Figure 1.6 – Système passe-bas du deuxième ordre.

L'équation différentielle, qui modélise le comportement temporel du système, est :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_0}{c + bp + ap^2} \quad \text{donc} \quad (ap^2 + bp + c) S(p) = H_0 E(p)$$

$$\text{puis} \quad a \frac{d^2 s}{dt^2} + b \frac{ds}{dt} + cs = H_0 e.$$

Comme pour un système du premier ordre, la solution particulière, cherchée sous la même forme que l'entrée, demeure bornée car l'entrée est bornée. Ce point reste acquis, quel que soit le numérateur de la fonction de transfert, et donc le caractère passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande...

La stabilité n'est liée qu'à la solution homogène, solution de l'équation homogène :

$$a \frac{d^2 s}{dt^2} + b \frac{ds}{dt} + cs = 0,$$

qui admet trois solutions suivant le signe du discriminant Δ de l'équation caractéristique associée $ar^2 + br + c = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta < 0$, alors les racines sont complexes $r = \frac{-b \pm j\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ et :

$$s_h(t) = \exp\left(-\frac{b}{2a}t\right) \left(s_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}t\right) + s_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}t\right) \right),$$

qui reste borné dès que l'exponentielle ne diverge pas, c'est-à-dire si $\frac{b}{2a} > 0$, et donc si a et b sont de même signe. De plus, attendu que $\Delta < 0$, $0 < b^2 < 4ac$ et ainsi a et c sont de même signe. La solution homogène reste donc bornée si a , b et c sont de même signe.

Si $\Delta = 0$, alors $r = -\frac{b}{2a}$ est racine double et :

$$s_h(t) = (s_0 + \mu t) \exp\left(-\frac{b}{2a}t\right),$$

et la conclusion de stabilité est la même que précédemment.

Si $\Delta > 0$ alors les racines sont réelles $r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et :

$$s_h(t) = s_1 \exp(r_1 t) + s_2 \exp(r_2 t),$$

qui reste borné si $r_1 < 0$ et $r_2 < 0$, ce qui est équivalent à :

- leur somme est négative : $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} < 0$, soit $\frac{b}{a} > 0$;
- leur produit est positif : $r_1 r_2 = \frac{c}{a} > 0$.

On en déduit donc que la solution homogène reste bornée si a , b et c sont de même signe.

3.4 Critère de stabilité d'un système du premier ou du deuxième ordre

On conclut des paragraphes précédents :

Un système est stable temporellement si, et seulement si, sa solution homogène, c'est-à-dire physiquement son régime libre, s'annule quand $t \rightarrow \infty$.

Ainsi, un système stable s'amortit en absence d'entrée. Il existe de plus un critère opérationnel de stabilité très simple.

Un système du premier ou du deuxième ordre est temporellement stable si et seulement si tous les coefficients de l'équation différentielle homogène ou du dénominateur de la fonction de transfert sont de même signe.



Ce critère n'est plus suffisant pour un système d'ordre trois ou plus.

3.5 Lien avec la stabilité mécanique

La définition de la stabilité, utilisée en mécanique, semble *a priori* différente. On lit ainsi dans le Dictionnaire de l'Académie française, huitième édition, que le lecteur trouvera en ligne sur internet, la définition de la stabilité :

En termes de mécanique, il désigne la propriété qu'un corps, écarté de son état d'équilibre, a de revenir à cet état.

Quel est donc le lien avec la sortie bornée associée à une entrée bornée ? La réponse à cette question passe par une autre interrogation : que signifie, pour un système électrique, être écarté de son état d'équilibre ?

On étudie par exemple le circuit électrique de la figure 1.3. Sans alimentation, c'est-à-dire pour une entrée nulle, la sortie est nulle, ce qui constitue son état d'équilibre. Pour écarter le système de cette position d'équilibre, on lui impose une tension E_0 en entrée. Puis l'entrée est remise à la masse et le système évolue en décrivant son régime libre. Le régime libre, pour lequel l'entrée est nulle, est modélisé par l'équation différentielle homogène. Si celle-ci tend vers zéro quand $t \rightarrow \infty$, alors le système est stable et revient à son état d'équilibre de tension nulle.

Si les termes employés sont différents, la définition « mécanique » de la stabilité est équivalente à celle énoncée dans le paragraphe 3.1.

MÉTHODOLOGIE

Quelles sont les unités de p ?

▷ $p = j\omega$ donc p est en rad.s^{-1} , comme ω .

Sous quelle forme écrire une fonction de transfert ?

▷ $H(p) = \frac{\text{polynôme en } p \text{ au numérateur}}{\text{polynôme en } p \text{ en dénominateur}}$ afin de conclure directement quant à la stabilité.

Doit-on utiliser la notation p ou $j\omega$?

▷ p dans le cas général ; $j\omega$ dans le cas sinusoïdal.

Rapport du jury (ENS Paris-Saclay) : « le jury regrette à nouveau l'utilisation quasi systématique de la notation complexe pour l'étude des circuits simples [...], surtout lorsque le régime n'est pas sinusoïdal. »

La notation complexe $j\omega$ implique que les signaux soient harmoniques, de pulsation ω (la même que dans $j\omega$). Dans le cas général, où les signaux sont de forme quelconque, on privilégie donc la variable de Laplace p et les impédances de Laplace $Z_C = \frac{1}{Cp}$ et $Z_L = Lp$.

Comment savoir si un système est stable ?

▷ Pour un système du 1^{er} ou du 2^e ordre, tous les coefficients des termes en p^0 , p^1 et p^2 sont identiques.

Comment passer de l'équation différentielle à la fonction de transfert et vice versa ?

▷ Utiliser les équivalences $p \leftrightarrow \frac{d}{dt}$ et $p^2 \leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2}$.

Quand les méthodes vues en SII, comme le théorème de la valeur initiale, sont-elles utilisables en physique ?

▷ Dès qu'on est dans les mêmes conditions qu'en SII, concrètement lorsqu'on étudie la réponse d'un système à un échelon (la rampe n'est pas utilisée en physique).

PROGRAMME OFFICIEL ET SOMMAIRE DES EXERCICES

NOTIONS ET CONTENUS

CAPACITÉS EXIGIBLES

Fonction de transfert d'un système entrée-sortie linéaire continu et invariant. ► 1.C3 ▷ 1.2 1.3	Transposer la fonction de transfert opérationnelle dans les domaines fréquentiel (fonction de transfert harmonique) ou temporel (équation différentielle).
Stabilité. ► 1.C1 1.C2 ▷ 1.1 1.2	Étudier la stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2 à partir des signes des coefficients de l'équation différentielle ou de la fonction de transfert.

EXERCICES ★ (LE COURS)

1.C1 Stabilité (1) Les systèmes suivants, décrits par leurs fonctions de transfert, sont-ils stables ou pas ? $H_1(p) = \frac{1}{2+p}$, $H_2(p) = \frac{1}{2-p}$, $H_3(p) = \frac{1}{-1-2p}$, $H_4(p) = \frac{p}{-1+p}$.

1.C2 Stabilité (2) Les systèmes suivants, décrits par leurs fonctions de transfert, sont-ils stables ou pas ? $H_5(p) = \frac{1-p}{1+3p+4p^2}$, $H_6(p) = \frac{1+p}{1-3p+4p^2}$ et $H_7(p) = \frac{1-p+2p^2}{-4-p-p^2}$, $H_8(p) = \frac{1-p+2p^2}{4+p-p^2}$.

1.C3 Fonction de transfert Établir la fonction de transfert qui décrit le système mécanique dont l'équation différentielle est $m \frac{d^2x}{dt^2}(t) = -\alpha \frac{dx}{dt}(t) - kx(t) + f(t)$.

EXERCICES ★★

1.1 Passe-bande

Soit le système décrit par sa fonction de transfert harmonique $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$.

- 1) Ce système est-il stable ?
- 2) Quelle est l'équation différentielle qui modélise son comportement ?

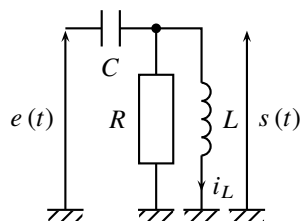
1.2 Stabilité conditionnelle

À quelle condition le système décrit par $\tau^2 \frac{d^2s}{dt^2}(t) + \tau(1-k) \frac{ds}{dt}(t) + s(t) = \tau \frac{de}{dt}(t) - e(t)$ est-il stable ?

EXERCICES ★★★

1.3 Résonances dans un circuit RLC

- 1) Établir l'équation différentielle entre $e(t)$ et $s(t)$ qui régit l'évolution du circuit ci-contre.
- 2) À quelle condition y a-t-il résonance sur la tension s ?
- 3) À quelle condition y a-t-il résonance sur l'intensité i_L du courant dans l'inductance ?



CORRIGÉS

1.C1 H_1 et H_3 stables ; H_2 et H_4 instables.

1.C2 H_5 et H_7 stables (le numérateur ne joue aucun rôle dans la stabilité) ; H_6 et H_8 instables.

1.C3 On prend la TL de l'équation différentielle : $mp^2 X(p) = -\alpha p X(p) - k X(p) + F(p)$,
 puis $(mp^2 + \alpha p + k) X(p) = F(p)$ donc $H(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{1}{mp^2 + \alpha p + k}$.

1.1 Passe-bande

Quelle horrible écriture de la fonction de transfert ! ω est séparé de son j , et donc la variable p n'apparaît pas facilement. L'étude de la stabilité débute par l'écriture correcte et normalisée de la fonction de transfert, polynôme en $j\omega = p$ au numérateur, polynôme en $j\omega = p$ au dénominateur.

$$1) \underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + Q \left(\frac{j\omega}{\omega_0} - j \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{H_0}{1 + Q \left(\frac{j\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{j\omega} \right)} = \frac{H_0 j\omega}{j\omega + \frac{Q}{\omega_0} (j\omega)^2 + Q\omega_0} \text{ et avec la}$$

variable p : $H(p) = \frac{H_0 p}{Q\omega_0 + p + \frac{Q}{\omega_0} p^2}$ et le système est stable dès que $Q > 0$ et $\omega_0 > 0$, ce qui est implicitement le cas.

2) On peut écrire H sous forme canonique en divisant par $Q\omega_0$:

$$H(p) = H_0 \frac{\frac{1}{Q} \frac{p}{\omega_0}}{1 + \frac{1}{Q} \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0} \right)^2} = \frac{S(p)}{E(p)} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{Q} \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0} \right)^2 \right) S(p) = \frac{H_0}{Q} \frac{p}{\omega_0} E(p),$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s}{dt^2}(t) + \frac{1}{Q\omega_0} \frac{ds}{dt}(t) + s(t) = H_0 \frac{1}{Q\omega_0} \frac{de}{dt}(t).$$

Remarque : en identifiant avec le dénominateur canonique d'une 2^e ordre, on obtient $Q = \frac{1}{2\xi}$.

1.2 Stabilité conditionnelle

Le système est du 2^e ordre, on examine les signes des coefficients du dénominateur de la fonction de transfert, qui se retrouvent sur les dérivées de s (les coefficients du numérateur se retrouvent sur les dérivées de e). Le système est stable dès que $1 - k > 0$, soit $k < 1$.

1.3 Résonances dans un circuit RLC

1) La méthode la plus aisée est d'utiliser les impédances de Laplace et la loi des nœuds, beaucoup plus rapide que le calcul d'une quelconque impédance équivalente d'un montage en parallèle. L'intensité qui traverse C vers la droite, vaut celles qui descendent dans R et L :

$$Cp(E - S) = \frac{S - 0}{R} + \frac{S - 0}{Lp},$$

puis en multipliant par RLp , afin de tout écrire sur une seule ligne :

$$RLCp^2E - RLCp^2S = LpS + RS \Rightarrow RLCp^2E = S(R + Lp + RLCp^2),$$

puis on divise par R pour mettre sous forme canonique $(1 + \dots)$:

$$LCp^2E = \left(1 + \frac{L}{R}p + LCp^2\right)S \Rightarrow LC \frac{d^2s}{dt^2}(t) + \frac{L}{R} \frac{ds}{dt}(t) + s(t) = LC \frac{d^2e}{dt^2}(t).$$

2) Le système est un passe-haut de fonction de transfert, $H(p) = \frac{LCp^2}{1 + \frac{L}{R}p + LCp^2}$, qui, d'après son diagramme de Bode, admet une résonance dès que le facteur d'amortissement ξ vérifie $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$. On identifie ξ et ω_0 avec la forme canonique :

$$H(p) = H_0 \frac{\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}.$$

On a donc $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$ et $\frac{L}{R} = \frac{2\xi}{\omega_0}$, soit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\xi = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}}$. Il y a donc résonance en tension dès que $\frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit $\frac{L}{R} < 2RC$.

3) En notation de Laplace, $S = Lp \times I_L$, d'où :

$$LCp^2E = \left(1 + \frac{L}{R}p + LCp^2\right)LpI_s \Rightarrow CpE = \left(1 + \frac{L}{R}p + LCp^2\right)I_s.$$

On reconnaît un passe-bande, $\frac{I_s}{E} = \frac{Cp}{1 + \frac{L}{R}p + LCp^2}$, qui admet toujours une résonance, ici en courant à la pulsation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, d'après le diagramme de Bode.

Amplificateur linéaire intégré

2

LA rétroaction est couramment utilisée dans les circuits électroniques. Son étude théorique relève du cours de Sciences industrielles pour l'Ingénieur ; elle est ici menée en pratique sur l'exemple de l'amplificateur linéaire intégré, plus connu sous le nom d'amplificateur opérationnel. Ce chapitre présente une première approche des circuits électroniques.

1 Amplificateur linéaire intégré

Un **amplificateur linéaire intégré**, plus connu sous le nom d'**amplificateur opérationnel**, se présente sous la forme d'une puce électronique, de surface $11\text{ mm} \times 6,6\text{ mm}$, représentée sur le document constructeur, *datasheet* en anglais, de la figure 2.2, page 15. L'amplificateur opérationnel utilisé en travaux pratiques est celui du haut, emballé dans un boîtier *DIP*, pour *dual in-line package*. Il comporte 8 pattes et une encoche semi-circulaire, qui permet de les distinguer.

Il existe des centaines de types d'amplificateurs opérationnels. On présente leurs caractéristiques communes à travers un exemple.

1.1 Visite guidée d'une *datasheet*

Tout d'abord, figurent en haut le nom du fabricant, ici STMicroelectronics, et la référence du circuit, ici TL081. Tous les constructeurs utilisent la même référence pour une même fonction. Puis vient la fonction réalisée, ici amplificateur opérationnel, *operational amplifier* ou *Op Amp* en anglais ; la technologie utilisée peut être précisée, ici J-FET, elle ne relève pas du présent cours.

Les caractéristiques essentielles suivent, elles seront introduites au fur et à mesure, et finalement le **brochage** des pattes, *pin connections* en anglais.

Ce brochage est très important, il permet de savoir comment brancher la puce sur un circuit. On repère d'abord la position de l'encoche semi-circulaire, qui permet d'identifier les pattes. Dans l'ordre de numérotation du constructeur :

1. *Offset null 1* permet de compenser les petits défauts en tension, dus à la construction. Il ne sera pas utilisé dans ce cours ;
2. *Inverting input* est l'**entrée inverseuse**, repérée sur les schémas par le signe $\ominus$;
3. *Non inverting input* est l'**entrée non inverseuse**, repérée par le signe $\oplus$;

4. V_{CC-} est la tension d'alimentation négative de la puce, en général -15 V . Cette valeur est précisée en haut de la caractéristique électrique, sur la figure 2.3 ;
5. *Offset null 2* est identique à la patte 1 ;
6. *Output* est la **sortie** ;
7. V_{CC+} est la tension d'alimentation positive de la puce, en général $+15\text{ V}$.
8. *NC* signifie non connecté. Cette patte ne sert à rien.

On en déduit que l'amplificateur opérationnel, comme toutes les puces électroniques, doit être alimenté pour fonctionner. C'est un composant actif. L'alimentation est la première chose à brancher sur un montage électronique, avant les signaux d'entrée.

Un amplificateur opérationnel doit être alimenté en -15 V , $+15\text{ V}$.

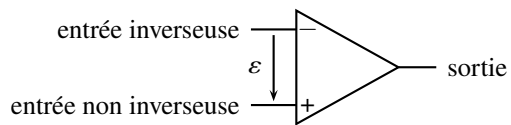


Figure 2.1 – Schéma d'un amplificateur opérationnel.

L'alimentation n'est toutefois pas représentée sur les schémas électriques, qui symbolisent l'amplificateur opérationnel par un triangle, avec deux entrées et une sortie.

1.2 Propriétés essentielles

Fonction de transfert La fonction de transfert de l'amplificateur opérationnel relie l'entrée différentielle, notée ε , et la sortie, notée s . L'entrée différentielle est la différence entre les potentiels des entrées non inverseuse et inverseuse, notés respectivement v^+ et v^- :

$$\varepsilon = v^+ - v^-.$$

La fonction de transfert, aussi appelée gain différentiel car il opère sur la différence $v^+ - v^-$, est, en première approche, un passe-bas du premier ordre :

$$A_d(p) = \frac{S(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{A_0}{1 + \tau p} \quad \text{où} \quad \begin{cases} A_0 \simeq 2 \cdot 10^5 \\ \tau \simeq 10^{-2} \text{ s.} \end{cases}$$

Les valeurs numériques sont précisées dans les caractéristiques électriques de la *datasheet*, figure 2.3. A_0 est le *large signal voltage gain*, de 200 V/mV : quand on présente une tension de $5 \cdot 10^{-2}\text{ mV}$ en entrée, l'amplificateur présente une sortie de 10 V , soit une multiplication par $2 \cdot 10^5$. La valeur de τ est calculée dans l'exercice **2.18**.

Saturations La tension maximale que délivre l'amplificateur opérationnel en sortie reste limitée ; elle ne peut pas dépasser en valeur absolue la tension d'alimentation V_{CC} . Cette tension maximale en sortie est communément appelée **tension de saturation**, notée V_{sat} . Elle est légèrement inférieure à la tension d'alimentation : $V_{sat} \lesssim V_{CC} = 15\text{ V}$; on pourra l'approximer à 15 V .

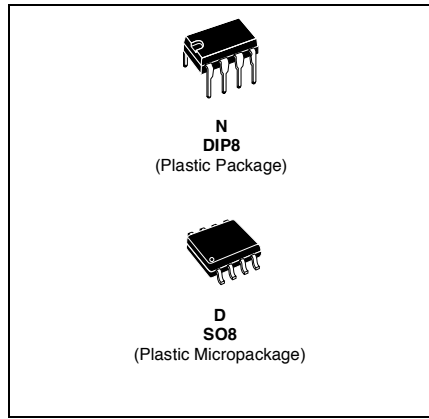
La tension de sortie est limitée à l'intervalle $[-V_{sat}, +V_{sat}]$, avec $V_{sat} = 15\text{ V}$.



TL081 TL081A - TL081B

GENERAL PURPOSE J-FET SINGLE OPERATIONAL AMPLIFIERS

- WIDE COMMON-MODE (UP TO V_{CC}^{+}) AND DIFFERENTIAL VOLTAGE RANGE
- LOW INPUT BIAS AND OFFSET CURRENT
- OUTPUT SHORT-CIRCUIT PROTECTION
- HIGH INPUT IMPEDANCE J-FET INPUT STAGE
- INTERNAL FREQUENCY COMPENSATION
- LATCH UP FREE OPERATION
- HIGH SLEW RATE : $16V/\mu s$ (typ)

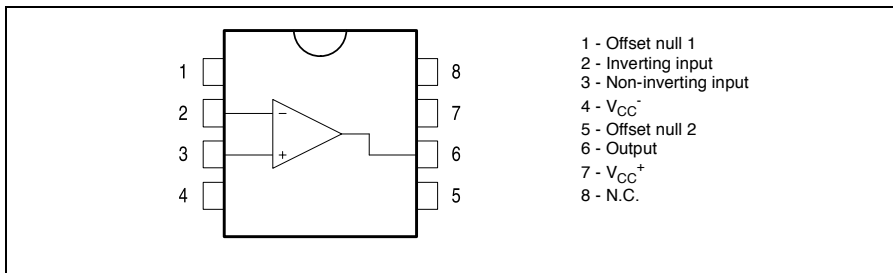


DESCRIPTION

The TL081, TL081A and TL081B are high speed J-FET input single operational amplifiers incorporating well matched, high voltage J-FET and bipolar transistors in a monolithic integrated circuit.

The devices feature high slew rates, low input bias and offset currents, and low offset voltage temperature coefficient.

PIN CONNECTIONS (top view)



ORDER CODE

Part Number	Temperature Range	Package	
		N	D
TL081M/AM/BM	-55°C, +125°C	•	•
TL081I/AI/BI	-40°C, +105°C	•	•
TL081C/AC/BC	0°C, +70°C	•	•

Example : TL081CD, TL081IN

N = Dual in Line Package (DIP)
D = Small Outline Package (SO) - also available in Tape & Reel (DT)

Figure 2.2 – Extrait de *datasheet* d'amplificateur opérationnel.

ELECTRICAL CHARACTERISTICS

 $V_{CC} = \pm 15V$, $T_{amb} = +25^{\circ}C$ (unless otherwise specified)

Symbol	Parameter	TL081,M,AC,AI,AM, BC,BI,BM			TL081C			Unit
		Min.	Typ.	Max.	Min.	Typ.	Max.	
V_{io}	Input Offset Voltage ($R_S = 50\Omega$) $T_{amb} = +25^{\circ}C$ $T_{min} \leq T_{amb} \leq T_{max}$ TL081 TL081A TL081B TL081 TL081A TL081B		3 3 1	10 6 3 13 7 5		3	10 13	mV
DV_{io}	Input Offset Voltage Drift		10			10		$\mu V/^{\circ}C$
I_{io}	Input Offset Current - note 1) $T_{amb} = +25^{\circ}C$ $T_{min} \leq T_{amb} \leq T_{max}$		5	100 4		5	100 10	pA nA
I_{ib}	Input Bias Current -note 1 $T_{amb} = +25^{\circ}C$ $T_{min} \leq T_{amb} \leq T_{max}$		20	200 20		20	400 20	nA
A_{vd}	Large Signal Voltage Gain ($R_L = 2k\Omega$, $V_O = \pm 10V$) $T_{amb} = +25^{\circ}C$ $T_{min} \leq T_{amb} \leq T_{max}$	50 25	200		25 15	200		V/mV
SVR	Supply Voltage Rejection Ratio ($R_S = 50\Omega$) $T_{amb} = +25^{\circ}C$ $T_{min} \leq T_{amb} \leq T_{max}$	80 80	86		70 70	86		dB
I_{CC}	Supply Current, no load $T_{amb} = +25^{\circ}C$ $T_{min} \leq T_{amb} \leq T_{max}$		1.4	2.5 2.5		1.4	2.5 2.5	mA
V_{icm}	Input Common Mode Voltage Range	± 11	+15 -12		± 11	+15 -12		V
CMR	Common Mode Rejection Ratio ($R_S = 50\Omega$) $T_{amb} = +25^{\circ}C$ $T_{min} \leq T_{amb} \leq T_{max}$	80 80	86		70 70	86		dB
I_{os}	Output Short-circuit Current $T_{amb} = +25^{\circ}C$ $T_{min} \leq T_{amb} \leq T_{max}$	10 10	40	60 60	10 10	40	60 60	mA
$\pm V_{opp}$	Output Voltage Swing $T_{amb} = +25^{\circ}C$ $T_{min} \leq T_{amb} \leq T_{max}$ $R_L = 2k\Omega$ $R_L = 10k\Omega$ $R_L = 2k\Omega$ $R_L = 10k\Omega$	10 12 10 12	12 13.5		10 12 10 12	12 13.5		V
SR	Slew Rate ($T_{amb} = +25^{\circ}C$) $V_{in} = 10V$, $R_L = 2k\Omega$, $C_L = 100pF$, unity gain	8	16		8	16		V/ μs
t_r	Rise Time ($T_{amb} = +25^{\circ}C$) $V_{in} = 20mV$, $R_L = 2k\Omega$, $C_L = 100pF$, unity gain		0.1			0.1		μs
K_{ov}	Overshoot ($T_{amb} = +25^{\circ}C$) $V_{in} = 20mV$, $R_L = 2k\Omega$, $C_L = 100pF$, unity gain		10			10		%
GBP	Gain Bandwidth Product ($T_{amb} = +25^{\circ}C$) $V_{in} = 10mV$, $R_L = 2k\Omega$, $C_L = 100pF$, $f = 100kHz$	2.5	4		2.5	4		MHz
R_i	Input Resistance		10^{12}			10^{12}		Ω



Figure 2.3 – Extrait de *datasheet* d'amplificateur opérationnel.
Les cadres gris sont ajoutés par l'auteur.

L'intensité du courant délivré en sortie est, elle aussi, limitée. On lit sa valeur de 40 mA sur la *datasheet*, au milieu de la figure 2.3 ; on la nomme *output short-circuit current* en anglais, elle est expérimentalement obtenue en court-circuitant la sortie avec un ampèremètre, afin de faire débiter une intensité maximale qu'on mesure.

Résistance d'entrée La résistance que présentent les deux entrées de l'amplificateur opérationnel, non inverseuse et inverseuse, est de $10^{12} \Omega$, soit 1 T Ω , prononcé *un téra ohm*. Cette valeur est lue sur la *datasheet*, en bas de la figure 2.3 ; on la nomme *input resistance* en anglais. On en déduit que l'intensité des courants d'entrée est quasi nulle, quels que soient les potentiels des entrées.

Les intensités des courants d'entrée d'un amplificateur opérationnel sont nuls :

$$i^+ = i^- = 0.$$

Résistance de sortie On explique, au paragraphe 4.6, qu'un amplificateur opérationnel présente une résistance de sortie négligeable par construction.

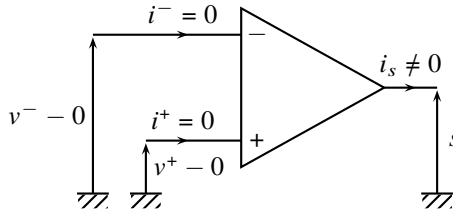


Figure 2.4 – Nullité de l'intensité d'entrée d'un amplificateur opérationnel.

Vitesse de balayage ou slew rate Un amplificateur opérationnel, comme toute autre puce électronique, admet une limitation non linéaire, nommée **vitesse limite de balayage**, plus connue sous l'appellation anglaise de *slew rate*. Son importance pratique explique la présence de sa valeur numérique parmi les caractéristiques essentielles, présentées en première page d'une *datasheet*, sur la figure 2.2, ici $16 \text{ V} \cdot \mu\text{s}^{-1}$, et rappelée dans les caractéristiques électriques, sur la figure 2.3.

Les unités du *slew rate* expliquent sa signification. Il représente la variation maximale de la tension de sortie de l'amplificateur opérationnel en $1 \mu\text{s}$. Par exemple, la durée minimale pour que la sortie varie de 12 V est de $0,75 \mu\text{s}$. Le *slew rate* représente donc la valeur maximale de $\frac{ds}{dt}$: c'est la vitesse maximale à laquelle la tension de sortie balaie l'ensemble des valeurs de l'intervalle $[-V_{sat}, +V_{sat}]$, d'où le terme de vitesse de balayage.

Un exemple expérimental est présenté dans le chapitre 4, à la page 88.

2 Étude d'un montage à rétroaction négative : l'amplificateur non inverseur

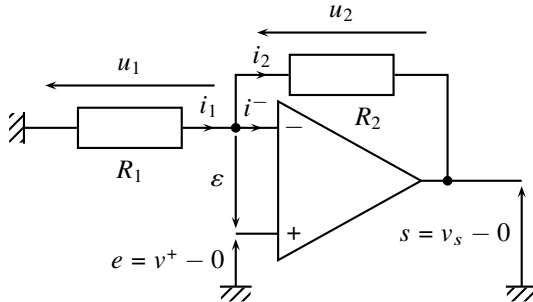
2.1 Présentation et schéma-bloc

Le montage **amplificateur non inverseur** est conçu afin d'amplifier la tension d'entrée. L'amplificateur opérationnel est rétroactionné sur sa borne inverseuse.

L'usage est d'utiliser les notations suivantes pour les *potentiels* :

- v^+ est le potentiel de l'entrée non inverseuse ;
- v^- est le potentiel de l'entrée inverseuse ;

- v_s est le potentiel de la sortie ;
- la masse est de potentiel nul.



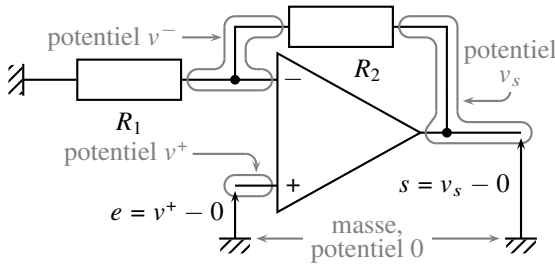
e représente la *tension* d'entrée et s la *tension* de sortie ; elles s'expriment en fonction des *potentiels*, par :

$$e = v^+ - 0 ;$$

$$s = v_s - 0.$$

Une tension est une différence de potentiel.

Figure 2.5 – Amplificateur non inverseur.



On rappelle qu'un fil garde le même potentiel tant qu'une impédance ou l'ALI n'impose pas une différence de potentiel à ses bornes. Ainsi, tous les fils entourés en gris sur le schéma ci-contre sont au même potentiel.

Figure 2.6 – Fils de potentiel uniforme.

On montre en méthodologie, page 33, que le schéma-bloc qui modélise le fonctionnement de ce montage électronique est ci-dessous.

Un montage à amplificateur opérationnel se met sous la forme d'un système bouclé, avec comparateur, chaîne directe et chaîne de retour.

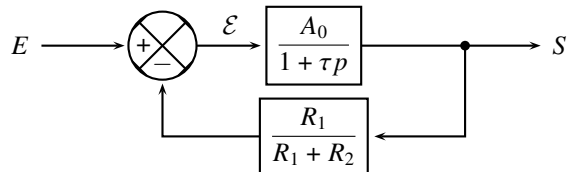


Figure 2.7 – Schéma-bloc associé à l'amplificateur non inverseur.

En effet, le $\ominus$ de $\mathcal{E}(p) = E(p) \ominus \frac{R_1}{R_1 + R_2} S(p)$, est obtenu grâce au signe dans le comparateur.

2.2 Fonction de transfert

L'expression de la fonction de transfert du montage s'opère :

- soit en éliminant $\mathcal{E}(p)$ dans les deux équations du montage ;
- soit en utilisant la formule vue dans le cours de Sciences industrielles pour l'Ingénieur :

$$H(p) = \frac{\text{chaîne directe}}{1 + \text{chaîne directe} \times \text{chaîne de retour}} = \frac{\frac{A_0}{1 + \tau p}}{1 + \frac{A_0}{1 + \tau p} \frac{R_1}{R_1 + R_2}}.$$

Par exemple avec la première méthode :

$$(1 + \tau p) S(p) = A_0 \mathcal{E}(p) = A_0 \left(E(p) - \frac{R_1}{R_1 + R_2} S(p) \right),$$

soit, en multipliant par $R_1 + R_2$:

$$(R_1 + R_2)(1 + \tau p) S(p) = A_0 ((R_1 + R_2) E(p) - R_1 S(p)),$$

au final :

$$\left(\underbrace{R_1 + A_0 R_1 + R_2}_{\text{à simplifier}} \right) + (R_1 + R_2) \tau p \ S(p) = A_0 (R_1 + R_2) E(p).$$

Ce résultat se simplifie grandement avec $A_0 \gg 1$. En effet : $R_1 + A_0 R_1 \simeq A_0 R_1$. De plus, R_1 et R_2 sont du même ordre de grandeur, ainsi $R_2 \ll A_0 R_1$. On trouve ainsi un passe-bas du premier ordre, écrit sous forme canonique en divisant par $A_0 R_1$:

$$(A_0 R_1 + (R_1 + R_2) \tau p) S(p) = A_0 (R_1 + R_2) E(p) \quad \text{soit} \quad \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{\tau}{A_0} p}.$$

La fonction de transfert d'un montage à amplificateur opérationnel, modélisé par un passe-bas du premier ordre, se simplifie toujours compte tenu de $A_0 \gg 1$.

2.3 Stabilité du montage bouclé

Le premier enseignement que l'on tire de cette fonction de transfert, est la stabilité du montage. En effet, les coefficients du dénominateur de la fonction de transfert sont de même signe : le système est donc stable.

La rétroaction sur la borne inverseuse, nommée **rétroaction négative**, est stabilisatrice.

2.4 Diagramme de Bode et fonction amplificatrice

On reconnaît la transmittance caractéristique d'un passe-bas du premier ordre :

$$H(p) = \frac{H_0}{1 + \tau_{BF} p} \quad \text{où} \quad H_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad \text{et} \quad \tau_{BF} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{\tau}{A_0}.$$

Avec les valeurs $R_1 = 10^3 \ \Omega$, $R_2 = 10^5 \ \Omega$, $A_0 = 2 \cdot 10^5$ et $\tau = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ s}$, dont on justifie la valeur numérique dans l'exercice 2.18, on vérifie $R_2 \ll A_0 R_1$. De plus, la constante de temps du système, notée « τ boucle fermée », vaut $\tau_{BF} = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ et son gain statique $H_0 \simeq 10^2$;

son diagramme de Bode, sur lequel on a placé la bande passante, introduite au paragraphe 2.5 suivant, est représenté ci-dessous.

Les asymptotes y sont interprétées en simplifiant le dénominateur, en fonction de la valeur de ω par rapport à $1/\tau_{BF}$.

Ce montage multiplie le signal d'entrée par $1 + \frac{R_1}{R_2} \simeq 10^2$ dans toute la zone de pulsation $\omega \ll 1/\tau_{BF} = 4.10^4 \text{ rad.s}^{-1}$, c'est-à-dire $\omega < 4.10^3 \text{ rad.s}^{-1}$, soit $f < 4.10^3/2\pi \text{ Hz}$, ou $f < 6,4.10^2 \text{ Hz}$.

Au delà de cette fréquence, le gain chute et le système intègre le signal d'entrée.

domaine de pulsations	$\omega \ll \frac{1}{\tau_{BF}}$	$\omega \gg \frac{1}{\tau_{BF}}$
dénominateur $\simeq$	1	$\tau_{BF} p$
$H(p) \simeq$	$1 + \frac{R_2}{R_1}$	$\frac{A_0}{\tau p}$
pente	nulle	-20 dB/décade
phase	0	$-\frac{\pi}{2}$

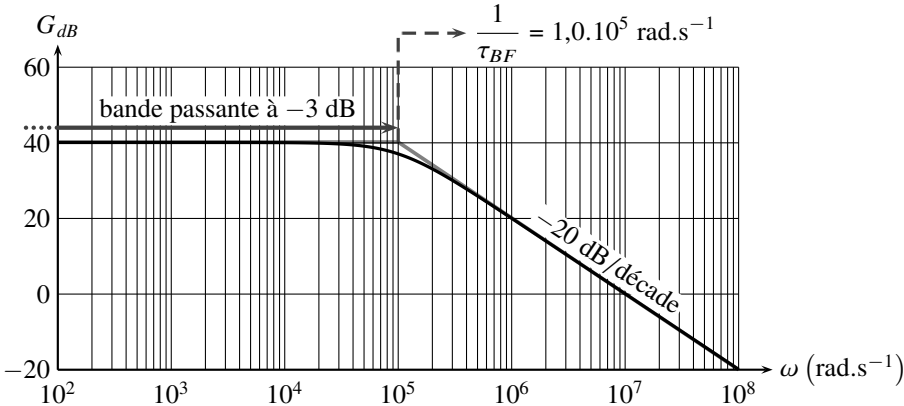


Figure 2.8 – Gain de l'amplificateur non inverseur (les asymptotes sont en gris).

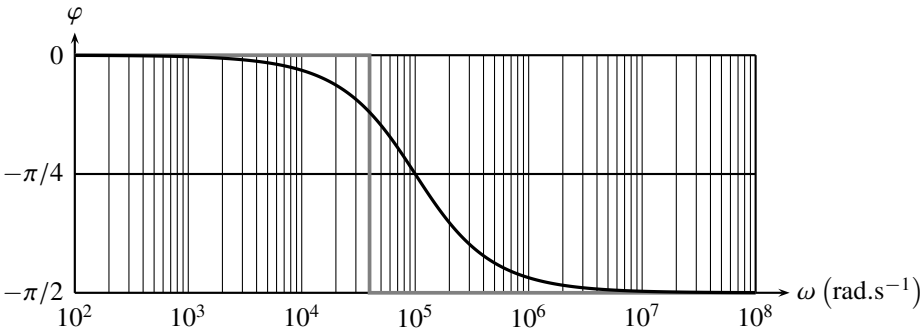


Figure 2.9 – Phase de l'amplificateur non inverseur (les asymptotes sont en gris).

Un système électronique ne réalise la fonction pour laquelle il a été conçu que dans une zone limitée de fréquence.

2.5 Produit gain-bande passante

Le montage précédent multiplie par 10^2 le signal d'entrée, soit un gain de 40 dB, sur un domaine restreint de fréquence. La contrainte sur la fréquence, $f < 6,4 \cdot 10^2$ Hz, paraît d'autant plus restrictive que les générateurs délivrent usuellement des signaux dont la fréquence atteint 10 MHz. Peut-on repousser cette limitation en fréquence ?

La pulsation au-delà de laquelle le montage sort de la zone amplificatrice est :

$$\omega_{lim} = \frac{1}{\tau_{BF}} = \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1}} \frac{A_0}{\tau}.$$

A_0 et τ , caractéristiques des amplificateurs opérationnels, sont ici considérés comme des constantes, ainsi ω_{lim} est d'autant plus élevé que $1 + \frac{R_2}{R_1}$ est faible, qui représente le facteur d'amplification du montage ! On est donc amené à transiger : plus l'amplification est forte, moins la gamme de fréquence utilisable est importante, et *vice versa*, moins l'amplification est forte, plus la gamme de fréquence est étendue.

Il faut donc arbitrer entre une forte amplification et une gamme étendue de fréquence, ce qui se traduit par un **produit gain-bande passante** constant. Dans cette expression, le gain doit être compris comme le gain statique.

La **bande-passante**, *bandwidth* en anglais, représente la plage de pulsations utiles, effectivement amplifiées par le montage, conformément à son cahier des charges. La bande passante à -3 dB (on rencontre aussi, bien que plus rarement, -6 dB) est définie par :

$$G_{dB}(\omega) > G_{dBmax} - 3 \text{ dB}.$$

Sachant que $\log(2) \simeq 0,30$:

$$20 \log \frac{H_0}{\sqrt{1 + (\tau_{BF}\omega)^2}} > 20 \log H_0 - 10 \log 2 = 20 \log \frac{H_0}{\sqrt{2}},$$

soit :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\tau_{BF}\omega)^2}} > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{d'où} \quad 2 > 1 + (\tau_{BF}\omega)^2 \quad \text{puis} \quad \omega < \frac{1}{\tau_{BF}}.$$

La bande passante à -3 dB est donc l'intervalle de pulsations $\left[0, \frac{1}{\tau_{BF}}\right]$, qu'on notera aussi $\Delta\omega = 1/\tau_{BF}$. Plus la bande passante est étendue, plus la gamme de pulsations effectivement amplifiées est large.

Le gain du montage est $H_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1}$. Le produit gain-bande passante vaut donc :

$$H_0 \times \Delta\omega = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{1}{\tau_{BF}} = \frac{A_0}{\tau} = \text{constante}.$$

La conservation du produit gain-bande passante est caractéristique de tout système analogue à l'amplificateur non inverseur, à savoir tout système du premier ordre, bouclé par une chaîne

directe de transmittance constante, comme le montre la figure 2.7.

Il faut donc consentir à un compromis entre importance du gain et largeur de la bande passante.

Le produit gain statique-bande passante, *Gain Bandwidth Product* en anglais, est constant pour un système du premier ordre, bouclé par un retour constant.

Remarque

Le choix de l'amplificateur opérationnel, donc de A_0 , de τ et de la valeur du produit gain-bande, est une étape importante dans la conception des circuits électroniques.

La notion de bande passante est utile, car, comme on le montre dans l'exercice 2.10 :

Un système réagit d'autant plus rapidement que sa bande passante est large.

3 Étude d'un montage à rétroaction positive : le comparateur à hystérésis

Dans le montage **comparateur à hystérésis**, par rapport à l'amplificateur non inverseur, les bornes inverseuse et non inverseuse de l'amplificateur opérationnel sont interverties. La mise en équation de ce montage s'effectue donc comme au paragraphe 2.1, en échangeant les potentiels v^+ et v^- :

$$v^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s \quad \text{et} \quad v^- = e.$$

Ainsi, en notation de Laplace :

$$S(p) = \frac{A_0}{1 + \tau p} \mathcal{E}(p) = \frac{A_0}{1 + \tau p} \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} S(p) - E(p) \right).$$

La fonction de transfert se calcule comme au 2.2 pour aboutir, compte tenu que $A_0 \gg 1$ et que R_1 et R_2 sont choisies de telles manière que $R_2 \ll A_0 R_1$:

$$\frac{S(p)}{E(p)} = - \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{-1 + \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{\tau}{A_0} p}.$$

Attendu que les signes des coefficients du dénominateur ne sont pas identiques, le montage, bouclé sur l'entrée non inverseuse, est instable.

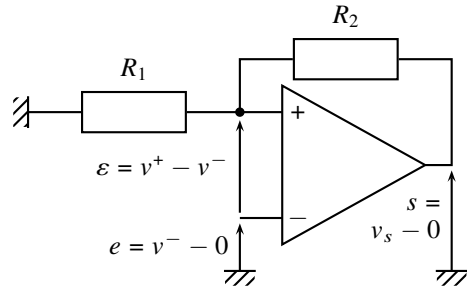


Figure 2.10 – Comparateur à hystérésis.

La rétroaction sur la borne non inverseuse, nommée **rétroaction positive**, est déstabilisatrice.

Que vaut alors la sortie ? Le système est instable, donc sa solution homogène diverge. La tension de sortie ne pouvant croître indéfiniment, elle augmente jusqu'à la tension de saturation $\pm V_{sat}$ et y reste, quel que soit le signal d'entrée.

On en déduit que le montage n'est pas linéaire. En effet, la sortie restant à $\pm V_{sat}$, elle n'est plus proportionnelle à l'entrée.

Un montage comparateur à hystérésis, montage instable, n'est pas un système linéaire.

Remarque

Attendu que la sortie n'est plus proportionnelle à l'entrée en régime permanent, on ne peut plus tracer son diagramme de Bode, qui suppose une proportionnalité entre l'entrée et la sortie, écrite en notation complexe.

L'utilisation du montage comparateur à hystérésis est étudiée dans le chapitre 4, à la page 84.

4 ALI idéal : limite du gain infini (régime linéaire)

4.1 Cadre de l'étude

Tous les montages étudiés sont ici stables, car les amplificateurs opérationnels utilisés sont uniquement rétroactionnés sur la borne inverseuse. On définit ainsi une fonction de transfert du montage. Le signal de sortie est alors proportionnel à celui d'entrée : le montage est linéaire.

4.2 Passage à la limite pour l'amplificateur non inverseur

La montage amplificateur non inverseur, présenté page 17, est conçu pour amplifier la tension d'entrée d'un facteur $1 + \frac{R_2}{R_1}$. Toutefois, l'analyse du montage, menée page 20, montre que

cette fonction n'est plus assurée dès qu'on dépasse une pulsation $\omega_{lim} = \frac{1}{\tau_{BF}} = \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1}} \frac{A_0}{\tau}$.

On observe que la fonction de transfert du montage tend vers $1 + \frac{R_2}{R_1}$, quand A_0 tend vers l'infini :

$$\lim_{A_0 \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{\tau}{A_0} p} = 1 + \frac{R_2}{R_1}.$$

Ce passage à la limite, légitimé par la valeur numérique de A_0 , $2 \cdot 10^5 \gg 1$, permet de retrouver très rapidement le comportement amplificateur attendu. Toutefois, la limite en fréquence disparaît.

Un **ALI idéal** est un amplificateur opérationnel dont le gain statique A_0 tend vers l'infini.

On rencontre parfois la représentation d'un amplificateur opérationnel idéal par un rectangle dans lequel figure le symbole $\triangleright \infty$, qui signifie que le gain statique A_0 tend vers l'infini.



Figure 2.11 – Amplificateur opérationnel idéal.

4.3 Règle de calcul simplifiée

Attendu que les montages à amplificateurs opérationnels (AO) se mettent sous la forme d'un système bouclé, dont le comparateur et la chaîne directe sont formés par l'AO, le passage à la limite $A_0 \rightarrow \infty$ simplifie la valeur de l'écart $\mathcal{E}(p)$. D'après le schéma-bloc de la figure 2.7, page 18 :

$$\mathcal{E}(p) = \frac{1}{1 + \frac{A_0}{1+\tau p} \frac{R_1}{R_1+R_2}} E(p) \rightarrow 0 \text{ quand } A_0 \rightarrow \infty.$$

Le résultat reste identique, quelle que soit l'expression de la chaîne de retour, ici $\frac{R_1}{R_1+R_2}$. On en déduit donc que l'égalité des potentiels des bornes inverseuse et non inverseuse de l'amplificateur opérationnel se substitue alors au lien entre la sortie et $\mathcal{E}$.

Dans le cas d'un amplificateur opérationnel de gain infini, en régime linéaire, l'équation $v^+ = v^-$ remplace la fonction de transfert de l'amplificateur opérationnel.



Ceci n'est valable que dans le cas d'un fonctionnement linéaire de l'amplificateur opérationnel, c'est-à-dire quand la rétroaction négative l'emporte et qu'il ne sature pas, afin d'utiliser $A_d(p)$.

Cette règle de calcul est maintenant utilisée afin d'établir les fonctions de transfert de montages classiques, tous bouclés sur la borne inverseuse de l'amplificateur opérationnel, afin d'assurer la stabilité du montage.

4.4 Suiveur

Pour ce montage très simple, $v^+(t) = e(t)$, $v^-(t) = s(t)$ et $v^+(t) = v^-(t)$ implique donc :

$$s(t) = e(t).$$

Sur la figure 2.13, on observe expérimentalement l'entrée et la sortie, dans le cas, à gauche, où la sortie ne dépasse pas la tension de saturation V_{sat} de l'amplificateur opérationnel, et dans celui, à droite, où elle est écrêtée par V_{sat} .

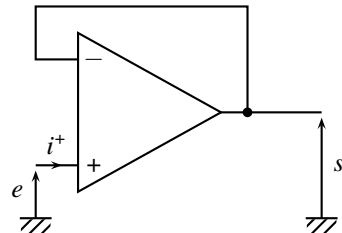


Figure 2.12 – Suiveur.

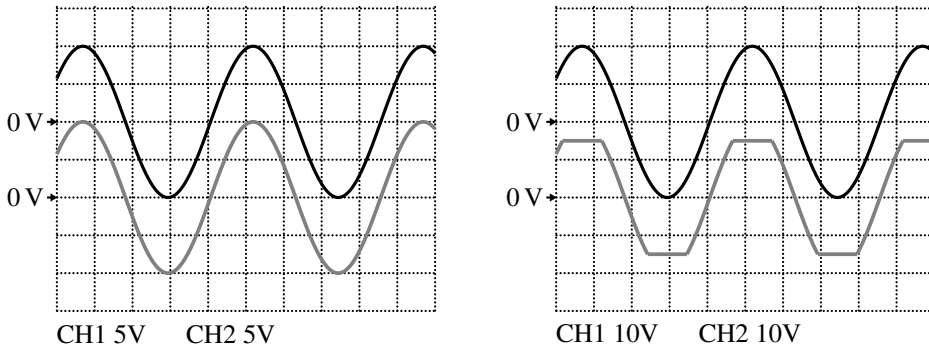


Figure 2.13 – Formes d'ondes des tensions d'entrée (voie 1 en noir) et de sortie (voie 2 en gris). Entrée d'amplitude 10 V à gauche, 20 V à droite. CH1 10V signifie 10 V par division sur la voie 1.

Ce montage **suiveur** sert à transmettre une tension sans prélever de courant. On explique au paragraphe 4.10 que la fonction de transfert d'un montage peut varier s'il débite un courant un sortie.

4.5 Impédance d'entrée

La notion d'impédance d'entrée recouvre le lien entre la tension d'entrée imposée à un montage et le courant qu'il appelle alors en amont.

L'**impédance d'entrée** Z_e d'un système est le rapport entre la tension d'entrée et l'intensité du courant d'entrée.

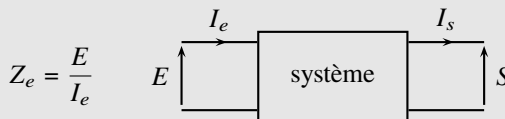


Figure 2.14 – Impédance d'entrée d'un système.

Dans le cas du suiveur, la tension d'entrée est e et le courant d'entrée est $i^+ = 0$. On en déduit que son impédance d'entrée est infinie.

4.6 Impédance de sortie

Un montage à amplificateur opérationnel n'est jamais utilisé seul ; un utilisateur prélève le signal de sortie et un générateur l'alimente. On modélise l'utilisateur par une résistance R_u , qui représente un oscilloscope ou un autre montage électronique, comme le montre la figure 2.15.

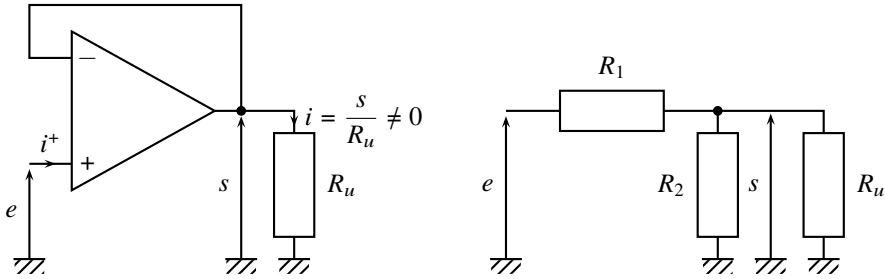


Figure 2.15 – Suiveur avec résistance d'utilisation (à gauche).
Diviseur de tension avec résistance d'utilisation (à droite).

La résistance R_u modifie-t-elle les propriétés du montage amont ?

Cette question est loin d'être anodine car, par exemple, la transmittance d'un pont diviseur de tension est modifiée par la présence de R_u . Sans R_u , la sortie vaut :

$$s(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e(t),$$

alors qu'en présence de R_u , avec la résistance $\frac{R_2 R_u}{R_2 + R_u}$, équivalente à R_u en parallèle de R_2 :

$$s(t) = \frac{\frac{R_2 R_u}{R_2 + R_u}}{R_1 + \frac{R_2 R_u}{R_2 + R_u}} e(t) = \frac{R_2 R_u}{R_1 R_2 + R_1 R_u + R_2 R_u} e(t) \neq \frac{R_2}{R_1 + R_2} e(t).$$

Pour le montage à amplificateur opérationnel, on mesure expérimentalement que, quelle que soit la valeur de R_u , la valeur de s reste inchangée, tant qu'on ne dépasse pas le courant limite de sortie, *output short-circuit current*, introduit à la page 17.

La tension de sortie d'un amplificateur opérationnel ne dépend pas de l'intensité du courant de sortie.

Cette observation est liée à l'**impédance de sortie** du montage. Vu de la sortie, un montage électronique est équivalent à un générateur de tension avec, en série, une impédance de sortie, comme le montre la figure 2.16, dans le cas simplifié où l'impédance est une résistance.

La formule du diviseur de tension mène à une tension de sortie du montage qui diminue à cause de la résistance d'utilisation R_u :

$$s = \frac{R_u}{R_u + R_s} s' < s'.$$

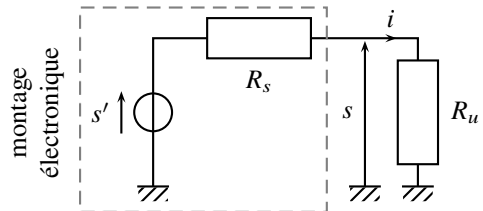


Figure 2.16 – Modèle d'un circuit électronique, vu de la sortie.