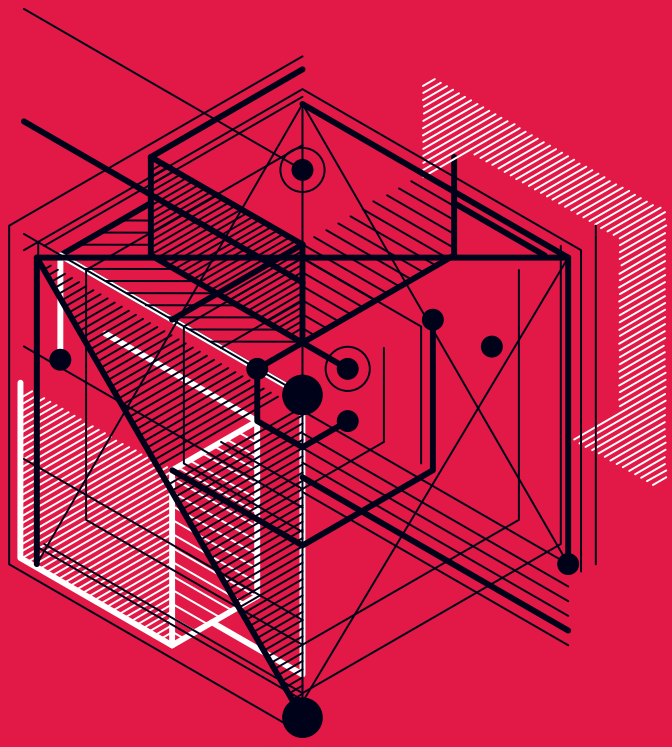


INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

ECOE EDICIONES

José Alfredo Collazos Sánchez
Carlos Alberto Ramírez Vanegas
Óscar Danilo Montoya Giraldo

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

Primera edición

José Alfredo Collazos Sánchez

Carlos Alberto Ramírez Vanegas

Óscar Danilo Montoya Giraldo

Catalogación en la publicación - Biblioteca Nacional de Colombia

Collazos Sánchez, José Alfredo, autor
Introducción al álgebra lineal / José Alfredo Collazos Sánchez, Carlos Alberto Ramírez Vanegas, Oscar Danilo Montoya Giraldo. -- Primera edición. -- Bogotá : Ecoe Ediciones, 2024
224 páginas. – (Matemáticas y ciencias. Álgebra)

Incluye datos biográficos de los autores -- Incluye índice alfabético -- Incluye referencias bibliográficas al final de la obra.

ISBN 978-958-508-265-6 (impreso) -- 978-958-508-266-3 (PDF) -- 978-958-508-267-0 (ePUB)

1. Algebras lineales - Fundamentos - Problemas, ejercicios, etc. 2. Matrices (Matemáticas) - Fundamentos - Problemas, ejercicios, etc. 3. Análisis vectorial - Fundamentos - Problemas, ejercicios, etc. I. Ramírez Vanegas, Carlos Alberto, autor II. Montoya Giraldo, Oscar Danilo, autor

CDD: 512.5 ed. 23 CO-BoBN– a1137262

Área: *Matemáticas y ciencias*
Subárea: *Álgebra*

ECOE
EDICIONES

© José Alfredo Collazos Sánchez
© Carlos Alberto Ramírez Vanegas
© Óscar Danilo Montoya Giraldo

© Ecoe Ediciones S.A.S.
info@ecoeediciones.com
www.ecoeediciones.com
Carrera 19 # 63 C 32
Teléfono: (+57) 321 226 46 09
Bogotá, Colombia

- Cita sugerida:
Collazos Sánchez J. A., Ramírez Vanegas C. A. y Montoya Giraldo O. D. (2024). *Introducción al álgebra lineal.* Ecoe Ediciones.

Primera edición: Bogotá, abril del 2024

ISBN: 978-958-508-265-6
e-ISBN (PDF): 978-958-508-266-3
e-ISBN (ePub): 978-958-508-267-0

Coordinadora editorial: Ana María Rueda G.
Coordinadora de producción editorial: Alejandra Rondón Forero
Editora de adquisiciones: Alejandra Cely R.
Carátula: Wilson Marulanda Muñoz
Impresión: Carvajal Soluciones de Comunicación S.A.S.
Carrera 69 #15-24

Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.

Impreso y hecho en Colombia - Todos los derechos reservados

Agradecimientos

Este libro ha sido desarrollado con el apoyo de la Facultad de Ciencias Básicas y su Departamento de Matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira, así como de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, y se concibe como un texto académico para pregrado universitario.

Sobre los autores

J. A. Collazos-Sánchez, (Espinal, Tolima, Colombia, 1962) Especialista en Docencia de las Matemáticas y la Física de la Universidad La Gran Colombia, Magister en Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira. Profesor auxiliar del Departamento de Matemáticas adscrito a la Facultad de Ciencias Básicas de la Universidad Tecnológica de Pereira. Investigador y miembro del equipo departamental de la Expedición Pedagógica Nacional y miembro del equipo de Rediseño Curricular de la Secretaría de Educación de Pereira. joalcos1@utp.edu.co

C. A. Ramírez-Vanegas, (Líbano, Tolima, Colombia, 1984) Magister en Ingeniería Eléctrica de la Universidad Tecnológica de Pereira, Magister en Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira. Profesor transitorio y director del Departamento de Matemáticas adscrito a la Facultad de Ciencias Básicas de la Universidad Tecnológica de Pereira. Investigador Asociado en Minciencias y miembro del grupo de investigación Matemática Aplicada y Educación reconocido por Minciencias. caramirez@utp.edu.co

Ó. D. Montoya Giraldo, (Obando, Valle del Cauca, Colombia, 1989) Doctor en Ingeniería de la Universidad Tecnológica de Pereira, Magister en Ingeniería Eléctrica de la Universidad Tecnológica de Pereira e Ingeniero Electricista Universidad Tecnológica de Pereira. Actualmente es profesor asistente adscrito al Proyecto Curricular de Ingeniería Eléctrica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Ha publicado más de trescientos artículos en revistas y conferencias registradas en las bases de datos Scopus y WoS. Investigador Asociado en Minciencias, Miembro Senior el Instituto de Ingenieros Electricistas y Electrónicos de Estados Unidos (IEEE, USA) y miembro del grupo de Investigación en Compatibilidad e Interferencia Electromagnética (GCEM) adscrito a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas con clasificación A1 en Minciencias. odmontoyag@udistrital.edu.co

Índice general

Lista de figuras vi
Prólogo 1

1. MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2
1.1. Matrices 2
1.1.1. Tipos especiales de matrices 4
1.1.2. Operaciones con matrices 5
1.2. Sistemas de ecuaciones lineales 14
1.2.1. Tipos de sistemas de ecuaciones lineales 16
1.2.2. Método de eliminación de Gauss 17
1.2.3. Forma matricial de un sistema 23
1.3. Matrices inversas 32
1.3.1. Matriz elemental y matriz inversa 36
1.4. Ejercicios 38

2. DETERMINANTES 45
2.1. Introducción a los determinantes 45
2.2. Menores y cofactores 47
2.3. Propiedades de los determinantes 49
2.4. Cálculo de la matriz inversa 53
2.5. Regla de Cramer para la solución de sistemas 54
2.6. Ejercicios 56

3. ÁLGEBRA VECTORIAL 58
3.1. Coordenadas cartesianas rectangulares en $\mathbb{R}^n$ 58
3.1.1. Coordenadas en la recta 59
3.1.2. Coordenadas en el plano 60
3.1.3. Coordenadas en el espacio 62
3.1.4. Coordenadas cartesianas rectangulares en $\mathbb{R}^n$ 64
3.2. Vectores 65
3.2.1. Vectores en $\mathbb{R}^2$ 67
3.2.2. Vectores en $\mathbb{R}^3$ 68
3.2.3. Vectores en $\mathbb{R}^n$ 69
3.2.4. Operaciones básicas con vectores 70
3.2.5. Magnitud y dirección de un vector 75
3.2.6. Vectores canónicos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ 79
3.2.7. Producto escalar o producto punto 81
3.2.8. Ángulo entre vectores 83

3.2.9. Proyección ortogonal 89
3.2.10. Producto vectorial o producto cruz 91
3.2.11. Propiedades del producto vectorial 92
3.2.12. Producto triple escalar 95
3.3. Rectas 97
3.3.1. Rectas paralelas y perpendiculares 101
3.3.2. Distancia entre dos rectas de $\mathbb{R}^3$ 105
3.3.3. Distancia de un punto a una recta 105
3.4. Planos 106
3.4.1. Ángulo entre planos 111
3.4.2. Planos paralelos y perpendiculares 112
3.4.3. Intersección de planos 114
3.4.4. Relación entre rectas y planos 115
3.4.5. Intersección entre una recta y un plano 117
3.4.6. Distancia de un punto a un plano 118
3.4.7. Aplicaciones 119
3.5. Ejercicios 126

4. ESPACIOS VECTORIALES 129
4.1. Espacio vectorial 129
4.2. Subespacios 132
4.3. Combinación lineal 135
4.4. Dependencia e independencia lineal 138
4.5. Base de un espacio vectorial 140
4.6. Dimensión 144
4.7. Coordenadas y cambio de base 146
4.8. Matriz de transición 148
4.9. Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt 150
4.10. Ejercicios 152

5. TRANSFORMACIONES LINEALES 159
5.1. Transformaciones 159
5.2. Transformación lineal 159
5.3. Núcleo e imagen 165
5.4. Transformaciones lineales biyectivas 172
5.5. Matriz asociada a una transformación lineal 177
5.6. Transformación compuesta 184
5.7. Transformación inversa 185
5.8. Cambio de base 187
5.9. Ejercicios 189

6. VALORES PROPIOS Y VECTORES PROPIOS 191
6.1. Valores propios y vectores propios 191
6.2. Matrices diagonalizables 198
6.3. Formas cuadráticas 201
6.3.1. Cambio de variables 202

6.3.2. Diagonalización de formas cuadráticas 203
6.4. Ejercicios 204
Bibliografía 207
Índice alfabético 209

Índice de figuras

3.1. Recta metrizada 59
3.2. Coordenadas en la recta 59
3.3. Distancia entre dos puntos de la recta 59
3.4. Representación del punto $P(x, y)$ en el plano 60
3.5. Definición de los cuadrantes en un plano 61
3.6. Puntos en el plano 62
3.7. Representación del punto $P(a, b, c)$ en el espacio 63
3.8. Puntos en el espacio 64
3.9. Vector geométrico 66
3.10. Vectores localizados en el origen 66
3.11. Vector $P = (x, y)$ 67
3.12. vector $P = (2, 3)$ 68
3.13. Representación del vector $P = (x, y, z)$ en $\mathbb{R}^3$ 69
3.14. Vectores en el espacio $\mathbb{R}^3$ 69
3.15. Suma de vectores 71
3.16. Producto entre un vector y un escalar en el espacio 71
3.17. Producto de entre vector y un escalar en el plano 72
3.18. Resta de vectores 72
3.19. Propiedad asociativa 74
3.20. Norma del vector $P = (x, y, z)$ en el espacio 76
3.21. Norma del vector $A = (2, 3)$ 76
3.22. Dirección de un vector 77
3.23. Ángulos directores de un vector 79
3.24. $(2, 3) = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ 80
3.25. $(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 81
3.26. Ángulo entre Vectores 84
3.27. Ángulos del triángulo 86
3.28. Vectores ortogonales 87
3.29. Proyección ortogonal 90
3.30. Producto cruz 92
3.31. Área del paralelogramo 94
3.32. Producto triple escalar 96
3.33. Volumen del paralelepípedo 96
3.34. Recta en el plano 97
3.35. Recta en el espacio 98
3.36. Recta $(1, 2, 1) + t\,(1, 1, 1)$ 100
3.37. Rectas paralelas 101
3.38. Rectas perpendiculares 101

3.39. Ángulos entre rectas 102
3.40. Intersección de rectas 103
3.41. Distancia de un punto a una recta 106
3.42. Ecuación del plano 107
3.43. Plano $12x + 10y + 15z = 120$ 109
3.44. Planos $x = 4$, $y = 5$ y $z = 4$ 110
3.45. Ángulo entre planos 111
3.46. Planos paralelos 112
3.47. Planos perpendiculares 113
3.48. Intersección de planos 114
3.49. Recta paralela a un plano 115
3.50. Intersección entre una recta y un plano 117
3.51. Distancia de un punto a un plano 118
5.1. Imagen bajo L de los puntos que están en el segmento de recta 163
5.2. Imagen bajo L de los puntos que están en el cuadrado 164
5.3. Imagen bajo L de los puntos que están en el círculo 165

Prólogo

Este libro pretende ser un punto de referencia que ayude a planificar el curso de álgebra lineal en los programas de las ingenierías y de la licenciatura en matemáticas y física, facilitando el esfuerzo que cada profesor debe hacer al iniciar el curso. También pretende aportar fundamentos y orientaciones que ayuden a elaborar la programación de la intervención en el aula y a organizar la enseñanza del álgebra lineal manejando problemas de los contextos profesionales hacia los que se orientan los estudiantes.

Se brinda específicamente a los profesores y estudiantes un marco conceptual sobre la teoría de matrices, los sistemas de ecuaciones lineales, los espacios vectoriales, las transformaciones lineales y los valores y vectores propios de una matriz. También se presenta una amplia gama de ejemplos, tanto teóricos como prácticos.

El libro está organizado en seis capítulos. En el primer capítulo se estudian las matrices y se aplican a la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

El capítulo dos se dedica al estudio de los determinantes, presentándose algunas aplicaciones del método de cofactores y la regla de cramer en la determinación de la matriz inversa y la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

En el capítulo tres se hace un estudio gráfico y analítico de la teoría de vectores, presentándose algunas aplicaciones de la geometría vectorial con el estudio de rectas y planos.

En el cuarto capítulo se desarrolla la teoría de los espacios vectoriales, estudiando los conceptos de espacio vectorial y subespacio vectorial, combinación lineal, dependencia e independencia lineal, generadores y bases.

El capítulo quinto se dedica al estudio de las transformaciones lineales, analizando los conceptos de núcleo e imagen, matriz asociada a una transformación, cambios de bases, transformaciones compuestas e inversas.

Finalmente en el sexto capítulo se estudian los conceptos de valores propios y vectores propios de una matriz, la diagonalización de una matriz simétrica y las formas cuadráticas.

Esperamos que este texto contribuya decididamente a la enseñanza de las matemáticas.

1 MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Las matrices son herramientas matemáticas que se usan en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Se estudiarán en este capítulo los métodos de eliminación de Gauss y Gauss-Jordan para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

1.1 Matrices

Definición 1.1.1 Sean m y n dos enteros ≥ 1. Una matriz es un arreglo rectangular de números (reales o complejos) de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A esta matriz se le llama una matriz de **tamaño** $m \times n$. Los elementos de la matriz pueden ser números reales o complejos, pero aquí trataremos matrices de números reales únicamente.

Ejemplo 1.1.1 La matriz $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ es una matriz de números reales

La matriz $\begin{pmatrix} -3-4i & 3 & 5-i \\ 2 & -3i & 1+i \\ 1-2i & -3i & 2+5i \end{pmatrix}$ es una matriz de números complejos

Se puede abreviar la notación de una matriz expresándola como (a_{ij}), $i = 1, \cdots, m$ y $j = 1, \cdots, n$. Se dice que a_{ij}, es la entrada ij o la componente ij de la matriz. Cuando expresamos una matriz en la forma (a_{ij}), i denota la fila y j la columna.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

j cuenta las columnas de izquierda a derecha

i cuenta las filas de arriba a abajo

De esta manera, para la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ tenemos, $\quad a_{13} = 5 \;\; a_{21} = 2$

En general a las matrices se les designará por una letra mayúscula A, B, C, ..., y sus elementos con las correspondientes letras minúsculas. Se usan paréntesis redondos ( ) o rectangulares [ ] para representar las matrices.

Ejemplo 1.1.2 $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ es una matriz de tamaño 2×2

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz de tamaño 2×4

$\begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3, x_4 \end{pmatrix}$ es una matriz de tamaño 1×4

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ es una matriz de tamaño 4×1

Definición 1.1.2 La diagonal principal de una matriz $A = (a_{ij})$, de tamaño $m \times n$ es $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{kk})$, donde k es el mínimo entre m y n .

Ejemplo 1.1.3 La diagonal principal de la matriz $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ es $(-1, -2)$ y la de $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ es $(-3, 1)$.

Definición 1.1.3 Sea $A = (a_{ij})$, una matriz de tamaño $m \times n$. Si $m = n$ entonces se dice que es una matriz **cuadrada** de tamaño n.

Ejemplo 1.1.4 $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Son matrices cuadradas.

En una matriz cuadrada A los elementos (a_{ii}) se denominan elementos diagonales.

La diagonal principal es el conjunto ordenado de elementos diagonales y se denota por $diag\, A$.

$$Si\ A = (a_{ij})_{m \times n}\ entonces\ \ diag\, A = (a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}).$$

En una matriz cuadrada A, se define la traza de A, por

$$Tr\ A = \Sigma\ a_{ii}$$

Ejemplo 1.1.5 Si $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $diag\, A = (-1, -3)$ y $\ Tr\ A = -1 + (-3) = -4$.

Si $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ \frac{-3}{4} & \frac{2}{7} & 1 \\ 4 & \frac{2}{7} & 1 \end{pmatrix}$, $diag\, B = (-1, \frac{2}{7}, 1)$ y $Tr\ B = -1 + \frac{2}{7} + 1 = \frac{2}{7}$.

1.1.1 Tipos especiales de matrices

Definición 1.1.4 Una submatriz de una matriz A, es una matriz que se obtiene desde A al eliminar algunas filas y/o columnas. En particular la matriz A^i_j, es la submatriz que se obtiene a partir de A eliminando la fila i y la columna j.

Ejemplo 1.1.6 Para la matriz
$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
se tiene las submatrices:

$$A^2_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} A^3_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 9 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} A^1_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} A^3_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 1.1.5 Una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$, en la que los elementos no diagonales son todos cero, se denomina matriz diagonal.

Ejemplo 1.1.7 La matriz $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal.

Definición 1.1.6 Una matriz diagonal que tiene todos sus elementos diagonales iguales, se denomina matriz escalar.

Ejemplo 1.1.8 La matriz $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ es una matriz escalar.

Definición 1.1.7 La matriz cuyos elementos $a_{ij} = 1$ para todo i y para todo j, se denomina matriz de unos y se anota por $J = [1] \in M_{m\times n}$.

Definición 1.1.8 Una matriz cuadrada en la que todos los elementos por debajo de la diagonal principal son cero, se denomina matriz triangular superior.

$$A = (a_{ij})_{n\times n}\ es\ una\ matriz\ triangular\ superior\ si\ a_{ij} = 0\, para\ i > j$$

Definición 1.1.9 Una matriz cuadrada en la que todos los elementos por encima de la diagonal principal son cero, se denomina matriz triangular inferior.

$$A = (a_{ij})_{n\times n}\ es\ una\ matriz\ triangular\ inferior\ si\ a_{ij} = 0\, para\ i < j$$

Definición 1.1.10 Una matriz cuadrada es triangular, si es triangular superior o triangular inferior.

Ejemplo 1.1.9 La matriz $\begin{pmatrix} 12 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ es una matriz triangular superior.

La matriz $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 13 & 7 & 0 \\ -3 & 5 & -8 \end{pmatrix}$ es una matriz triangular inferior.

Definición 1.1.11 Una matriz en que todos sus elementos son cero se denomina matriz nula (o matriz cero) y se denota por $\mathbf{0}$

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.1.10 Son matrices nulas $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Definición 1.1.12 Una matriz cuadrada de tamaño n que tiene todos los elementos diagonales iguales a 1 y todos los demás componentes iguales a 0 se llama matriz identidad. Se denota por I_n o simplemente por I

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.1.11 $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz idéntica de tamaño 2×2

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz idéntica de tamaño 3×3.

1.1.2 Operaciones con matrices

Igualdad de matrices

Las matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{m\times n}$ (del mismo tamaño) son iguales si sus elementos respectivos son iguales; $(a_{ij}) = (b_{ij}) \iff a_{ij} = b_{ij}$ para todos los $i = 1, 2, \cdots, m$ y todos los

$j = 1, 2, \cdots, n.$

Si $\begin{pmatrix} 2x-3 & 3 \\ 3y+2 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5+2y & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$

entonces $2x-3=2 \qquad 3=3 \qquad 3y+2=5+2y \qquad z=\frac{2}{7}$

con lo cual se obtienen los valores de x, de y y de z que satisfacen $x=\frac{5}{2}, \quad y=3$ y $z=\frac{2}{7}$

Suma de matrices

Sean $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ matrices de tamaño $m \times n$. La suma de esas dos matrices es la matriz $C=(c_{ij})$ de tamaño $m \times n$, donde $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. Esto es, la suma de dos matrices del mismo tamaño es la matriz de ese mismo tamaño obtenida al sumar los correspondientes elementos.

Como ejemplo, considere la suma de las matrices

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & -3 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-1) & 3+4 \\ 4+(-5) & (-1)+(-3) \\ 0+8 & (-7)+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 5 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

La suma de las matrices $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -5 & -3 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ no está definida porque las matrices son

de tamaño diferente.

Si $A=(a_{ij})_{m\times n}$ y $0=(0)_{m\times n}$ se aprecia claramente que $A+\mathbf{0}=A$

Producto de una matriz por un escalar

Sean k un escalar (número) y $A=(a_{ij})_{m\times n}$ una matriz. Se define kA como la matriz cuya componente ij es $c\,a_{ij}$. Se escribe $kA=k\,(a_{ij})=(ka_{ij})$. Así pues, se multiplica cada componente de la matriz A por k.

Por ejemplo $-3\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -12 \\ -2 & -3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

En términos más generales, se pueden multiplicar varias matrices del mismo tamaño por diferentes escalares y sumar el resultado:

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_kA_k$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son escalares y $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son matrices de tamaño $m \times n$. Este proceso es llamado **combinación lineal**.

Ejemplo 1.1.12 $2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}5\\2\\5\\2\end{pmatrix}}_{U}$

El vector U es combinación lineal de los vectores dados.

Definición 1.1.13 La matriz opuesta de la matriz $A=(a_{ij})$, es la matriz $-A=(-a_{ij})$.

Ejemplo 1.1.13 La matriz opuesta de $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&-2&1\\-3&0&1\end{pmatrix}$ es $-A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\-1&2&-1\\3&0&-1\end{pmatrix}$

Definición 1.1.14 Sean $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ matrices de tamaño $m\times n$. Se define la diferencia $A-B$ por $A-B=A+(-1)B$.

Por ejemplo

$$\begin{pmatrix}2&1\\-\frac{2}{3}&-7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&\frac{7}{4}\\-1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{4}\\\frac{1}{3}&-3\end{pmatrix}$$

Si $\mathbf{0}$ es la matriz nula, entonces para cualquier matriz A (del mismo tamaño de la matriz nula), tenemos que

$$\mathbf{0}+A=A+\mathbf{0}=A.$$

Ejemplo 1.1.14 $\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&3&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&3&-2\end{pmatrix}$

Se tiene que $(-1)A=-A$. La matriz $-A$ se conoce como la matriz inversa aditiva de A. Así, se obtiene la relación: $A+(-A)=\mathbf{0}$.

Teorema 1.1.15 Sean A,B,C matrices de tamaño $m\times n$ y k,t escalares, entonces:

1. $A+B=B+A$ Conmutatividad
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$ Asociatividad
3. $A+\mathbf{0}=A$ ($\mathbf{0}$ es la matriz nula)
4. $A+(-A)=\mathbf{0}$
5. $k(A+B)=kA+kB$
6. $(k+t)A=kA+tA$
7. $(kt)A=k(tA)$
8. $1\,A=A$

Estas propiedades se pueden comprobar de las definiciones.

Producto de matrices

Sean $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{jk})_{n\times p}$. El producto AB es otra matriz $C = (a_{ik})_{m\times p}$. Por lo tanto, si $C = AB$ entonces C tiene el mismo número de filas de A, y el mismo número de columnas de B y su coordenada ik se define:

$$c_{ik} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

A continuación se presenta un ejemplo que ilustra como se realiza el producto de matrices:

Considere las matrices A y B.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -10 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -8 \\ 4 & 8 & -5 & 9 \\ 5 & 0 & -2 & -12 \end{bmatrix}$$

Primero hacemos

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -10 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -8 \\ 4 & 8 & -5 & 9 \\ 5 & 0 & -2 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\boxed{2}\ 0\ -1 \quad \boxed{3}\ 4\ 5}_{a_{11}b_{11}} + \underbrace{2\ \boxed{0}\ -1 \quad 3\ \boxed{4}\ 5}_{a_{12}b_{21}} + \underbrace{2\ 0\ \boxed{-1} \quad 3\ 4\ \boxed{5}}_{a_{13}b_{31}}$$

$$(2)(3) + (0)(4) + (-1)(5)$$

Después multiplicamos esa fila por las otras columnas. Luego tomamos la segunda fila de la primera matriz y la vamos multiplicando por cada una de las columnas de la segunda matriz. Aquí presentamos los resultados que se obtendrían al hacerlo con la columna tres

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -10 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -8 \\ 4 & 8 & -5 & 9 \\ 5 & 0 & -2 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\boxed{-10}\ 3\ 5 \quad \boxed{2}\ -5\ -2}_{a_{21}b_{13} = (-10)(2) = -20} + \underbrace{-10\ \boxed{3}\ 5 \quad 2\ \boxed{-5}\ -2}_{a_{22}b_{23} = (3)(-5) = -15} + \underbrace{-10\ 3\ \boxed{5} \quad 2\ -5\ \boxed{-2}}_{a_{23}b_{33} = (5)(-2) = -10}$$

Ejemplo 1.1.15

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}}_{2\times 3}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2-2+9 & -4-4+3 \\ 1+6-6 & -2+12-2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}}_{2\times 2}$$

Ejemplo 1.1.16

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{2\times 2}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{2\times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2-1 & 0+2 & 2+1 \\ 1-0 & 0+0 & 1+0 \end{pmatrix}}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.1.17 Calcule AB donde $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$A\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad A\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 \\ -24 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} 2 \\ 26 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow AB = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -24 & 26 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

- Se debe señalar que en general: $AB \neq BA$, es decir, el producto de matrices en general no es conmutativo.

Definición 1.1.16 El producto de una matriz de tamaño $1 \times n$ (llamada vector fila) por una matriz de tamaño $n \times 1$ (llamada vector columna) se define como:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i.$$

Este producto es un **escalar**.

Ejemplo 1.1.18

$$(1, 3, -2, 4)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = (1)(2) + (3)(-1) + (-2)(3) + (4)(2) = 1$$

Potencias de una matriz

Si A es una matriz cuadrada, entonces se puede formar el producto AA, que será una matriz cuadrada del mismo tamaño que A y se denota A^2. En forma análoga, se puede formar A^3, A^4 y en general, A^k para cualquier entero positivo k.

$$A^k = \underbrace{A\,A\,A\cdots A}_{k}$$

Ejemplo 1.1.19 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 21 & 8 \end{pmatrix}$

Se define $A^0 = I$ (matriz idéntica del mismo orden que A).
Observe que, para cualquiera dos enteros r , $s \geq 0$, tenemos la relación usual:

$$A^r\,A^s = A^{r+s}.$$

Propiedades del producto de matrices

Teorema 1.1.17 Sean A, B, C matrices de tamaño tales que las operaciones indicadas se puedan realizar y que k es un escalar, entonces:

1. $c(AB) = (cA)B = A(cB)$
2. $A(BC) = (AB)C$
3. $I\,A = A\ y\ B\,I = B$
4. $A(B + C) = AB + AC$
5. $(A + B)C = AC + BC$

A continuación se presentan dos ejemplos para ilustrar la propiedad asociativa y la propiedad de identidad de la multiplicación de matrices.

Ejemplo 1.1.20 Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad (AB)C = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

mientras que

$$BC = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$