

**TOUT EN
FICHES**

Jean-Pierre Lecoutre

EXERCISES ET MÉTHODES DE

STATISTIQUE ET PROBABILITÉS

**LICENCE
D'ÉCONOMIE-GESTION
IUT, IEP**

DUNOD

Graphisme de couverture : Studio Dunod, Elizabeth Riba
Illustrations de couverture : © janews – shutterstock – 2212550997

© Dunod, 2011, 2015, 2021, 2024
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-087891-8

Sommaire

Avant-propos	V
TD 1 • Notion de probabilité	1
L'essentiel du cours	1
Pouvez-vous répondre ?	5
Questions de réflexion	6
Entraînement	6
Solutions	11
TD 2 • Variable aléatoire discrète	21
L'essentiel du cours	21
Pouvez-vous répondre ?	25
Questions de réflexion	25
Entraînement	26
Solutions	29
TD 3 • Variable aléatoire continue	35
L'essentiel du cours	35
Pouvez-vous répondre ?	39
Questions de réflexion	40
Entraînement	40
Solutions	44
TD 4 • Couple et vecteur aléatoires	51
L'essentiel du cours	51
Pouvez-vous répondre ?	56
Questions de réflexion	56
Entraînement	57
Solutions	61

TD 5 • Notions de convergence	71
L'essentiel du cours	71
Pouvez-vous répondre ?	75
Questions de réflexion	75
Entraînement	76
Solutions	79
TD 6 • Estimation ponctuelle	85
L'essentiel du cours	85
Pouvez-vous répondre ?	89
Questions de réflexion	90
Entraînement	90
Solutions	93
TD 7 • Estimation par intervalle de confiance	105
L'essentiel du cours	105
Pouvez-vous répondre ?	110
Questions de réflexion	110
Entraînement	111
Solutions	115
TD 8 • Théorie des tests	123
L'essentiel du cours	123
Pouvez-vous répondre ?	127
Questions de réflexion	128
Entraînement	128
Solutions	136
TD 9 • Sujets d'examen corrigés	157
Sujets d'examen	157
Éléments de correction	169
Tables statistiques	189
Index	201

Avant-propos

Ce volume de la série TD, de la collection « Éco Sup », s'adresse aux étudiants de Licence d'Économie et de Gestion. Au début de chaque chapitre, les principales notions de cours et les résultats essentiels sont rappelés de façon succincte dans « L'essentiel du cours ». Un bref texte introductif indique les points essentiels qui vont être abordés et étudiés dans le chapitre. Il ne s'agit pas d'un résumé de cours, mais seulement d'un avant-propos où l'on essaie d'expliquer, dans un langage peu formalisé, le fondement et l'utilité des notions définies ensuite de façon plus formelle.

Chacun des huit chapitres présente la même structure. Un certain nombre d'affirmations constituent le paragraphe « Pouvez-vous répondre ? ». La réponse en vrai-faux permet à l'étudiant de vérifier s'il a bien compris les principaux points de cours. Il doit exercer sa vigilance face à des affirmations, parfois simples, mais qui peuvent contenir un piège.

Les « Questions de réflexion » qui sont proposées ensuite ont essentiellement pour but de mettre l'accent sur certains éléments de cours un peu délicats. Il faut être attentif aux commentaires qui figurent dans la solution de l'exercice, en fin de chapitre.

Les exercices d'« Entraînement » permettent enfin à l'étudiant de tester sa capacité à passer de la théorie à la pratique. Ils suivent l'ordre de progression du cours et sont précédés d'un titre indiquant la principale notion à laquelle ils se rapportent. Une rubrique « Analyse de l'énoncé et conseils » précise la démarche à suivre et les résultats de cours à utiliser pour résoudre l'exercice proposé.

Les solutions très détaillées sont regroupées en fin de chapitre, et souvent assorties de commentaires.

Dans le dernier chapitre, les textes récents des examens de 2^e année de Licence d'Économie et de Gestion de l'université Panthéon-Assas permettent de retrouver les principaux points abordés dans les chapitres précédents. L'étudiant peut ainsi évaluer le niveau de difficulté de ce qui peut être demandé à une épreuve d'examen. Les corrigés sont rassemblés après les énoncés.

Notion de probabilité

1

L'ESSENTIEL DU COURS

Si on veut formaliser un problème dans lequel le hasard intervient, on doit construire un modèle probabiliste, choisi en fonction du but que l'on poursuit. Ce modèle est constitué d'un ensemble fondamental, d'une tribu d'événements et d'une probabilité. Le choix de l'ensemble fondamental est très important pour le calcul ultérieur des probabilités des événements. Nous introduirons aussi les notions de probabilité conditionnelle et d'indépendance. La formule de Bayes est souvent très utile pour le calcul de probabilités conditionnelles.

1. Ensemble fondamental

Le résultat d'une expérience aléatoire s'appelle un *événement élémentaire*. L'ensemble des résultats possibles s'appelle *ensemble fondamental* (ou univers) et est noté traditionnellement Ω . Chaque élément ω de Ω représente donc un événement élémentaire, et toute partie $A \subset \Omega$ (ou $A \in \mathcal{P}(\Omega)$) sera un événement. Parfois on dit que Ω est l'ensemble des *éventualités possibles* et les événements élémentaires sont alors les singletons, c'est-à-dire les ensembles réduits à un seul élément $\{\omega\}$, qui sont effectivement en toute rigueur des événements, puisqu'appartenant à $\mathcal{P}(\Omega)$, ce qui n'est pas le cas du point ω .

2. Algèbre et tribu d'événements

Le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ s'appelle un *espace probabilisable*. Même si Ω est fini, le cardinal de $\mathcal{P}(\Omega)$ peut être un nombre très grand et dans ce cas on est amené alors à ne considérer qu'une famille restreinte $\mathcal{A}$ de parties de Ω , $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Pour que le résultat des opérations ensemblistes (union, intersection, complémentaire) soit encore un événement, il est nécessaire que la famille d'événements qui a été retenue soit fermée, ou stable, vis-à-vis de ces opérations, c'est-à-dire qu'il soit bien un

élément de la famille. De plus, les événements « certain », Ω , et « impossible », $\emptyset$, doivent également appartenir à cet ensemble. Ainsi, on associera à une épreuve aléatoire un ensemble non vide de parties de Ω , noté $\mathcal{A}$, qui vérifiera :

$\boxed{C_1}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, alors $\bar{A} \in \mathcal{A}$;

$\boxed{C_2}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $B \in \mathcal{A}$, alors $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Il y a fermeture pour le complémentaire et l'union. Cet ensemble $\mathcal{A}$ s'appelle une *algèbre* de parties de Ω . Bien entendu, grâce aux lois de Morgan, on a une définition équivalente en remplaçant la condition C_2 par :

$\boxed{C'_2}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $B \in \mathcal{A}$, alors $A \cap B \in \mathcal{A}$.

► Propriétés d'une algèbre

$\boxed{P_1}$ La famille étant non vide, on en conclut que :

$$\emptyset \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \Omega \in \mathcal{A}$$

$\boxed{P_2}$ Si $A_j \in \mathcal{A}$ pour $1 \leq j \leq n$, on démontre par récurrence que :

$$\bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}$$

$\boxed{P_3}$ Si $A_j \in \mathcal{A}$ pour $1 \leq j \leq n$, on démontre également par passage au complémentaire que :

$$\bigcap_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}$$

Cependant, certaines expériences peuvent se dérouler indéfiniment et on a donc besoin de renforcer la propriété P_2 de fermeture pour l'union finie par une condition de fermeture pour l'union dénombrable, soit :

$\boxed{C_3}$ Si $A_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

Cette condition exprime que toute union dénombrable d'événements est encore un événement. L'ensemble $\mathcal{A}$ auquel on impose les conditions C_1 et C_3 s'appelle alors une *σ -algèbre* ou *tribu* d'événements.

Le couple formé de l'ensemble fondamental Ω et de la tribu d'événements associée $\mathcal{A}$ s'appelle un *espace probabilisable*.

3. Probabilité

Définition. On appelle probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ une application $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ telle que :

(i) $P(\Omega) = 1$;

(ii) pour toute suite A_n d'événements incompatibles, soit $A_n \in \mathcal{A}$ avec $A_m \cap A_n = \emptyset$ pour $m \neq n$:

$$P \left[\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$$

propriété dite de σ -additivité.

Une probabilité est donc une application qui à un événement va associer un nombre compris entre 0 et 1. Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s'appelle un *espace probabilisé*.

► Propriétés

P_1 L'événement impossible est de probabilité nulle :

$$P(\emptyset) = 0$$

P_2 La probabilité de l'événement complémentaire d'un événement quelconque A s'obtient par :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

P_3 Si un événement en implique un autre, sa probabilité est plus petite :

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

P_4 La probabilité de l'union de deux événements s'obtient par la formule de Poincaré :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

4. Probabilités conditionnelles

On considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et un événement particulier B de $\mathcal{A}$ tel que $P(B) > 0$. La connaissance de la réalisation de B modifie la probabilité de réalisation d'un événement élémentaire, puisque l'ensemble des résultats possibles est devenu B et non plus Ω . Cette nouvelle probabilité, notée $P(.|B)$, est définie sur la tribu conditionnelle :

$$\mathcal{A}|B = \{A \cap B / A \in \mathcal{A}\}$$

par :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La formule de définition de la probabilité conditionnelle peut aussi s'écrire, si $P(A) > 0$:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

Elle s'appelle parfois *formule des probabilités composées* et se généralise par récurrence :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \\ &\quad P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \\ &= P(A_1) \prod_{k=2}^n P \left[A_k \middle| \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i \right] \end{aligned}$$

5. Théorème de Bayes

Un système complet d'événements est une partition de Ω en événements $\{A_1, \dots, A_n\}$ de probabilités strictement positives, $P(A_i) > 0$ pour $1 \leq i \leq n$, et incompatibles deux à deux, i.e. avec $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ et $\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$. On suppose que les probabilités des événements inclus dans chacun des A_i sont connues et on va donc décomposer un événement quelconque B sur ce système :

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \right] = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B)$$

On aboutit ainsi à la *formule de la probabilité totale* :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

Ceci va nous permettre de calculer les probabilités *a posteriori* $P(A_i|B)$, après réalisation d'un événement B , à partir des probabilités *a priori* $P(A_i)$, $1 \leq i \leq n$:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}$$

résultat appelé *formule de Bayes* ou parfois *théorème de Bayes*.