ECG2

MATHS APPLIQUÉES

1 DEVOIR CORRIGÉ PAR SEMAINE

avec annales
& corrigés commentés

Céline Laurent-Reig

ellipses

ECG2

MATHS APPLIQUÉES

1 DEVOIR CORRIGÉ PAR SEMAINE

Céline LAURENT-REIG
Professeure de Maths appliquées en ECG2
au lycée St-Louis de Gonzague de Paris

ellipses

Conception graphique couverture : Nathalie FOULLOY

ISBN 9782340-114500

Dépôt légal : juin 2026

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

La classe préparatoire ECG est une filière d'excellence et d'ambition. Pendant deux ans, vous allez acquérir un niveau élevé de connaissances ainsi que des compétences multiples dans le but de réussir les concours d'entrée aux grandes écoles de commerce.

Les épreuves de mathématiques que vous allez présenter sont composées de plusieurs exercices ou problèmes destinés à tester votre niveau en la matière, ainsi que vos capacités à modéliser, à raisonner et votre aptitude à rédiger.

L'acquisition et l'assimilation des connaissances attendues sont primordiales pour réussir : cet ouvrage vient à la suite de ces apprentissages en vous proposant **vingt problèmes** qui demandent un réinvestissement de votre cours pour les résoudre. Il s'agit de sujets qui vous engagent dans un processus de modélisation de situations concrètes et mathématiques. C'est un **entraînement indispensable en vue des concours**. Tous les sujets sont corrigés à la fin du manuel et vous présentent la rédaction et les arguments attendus.

Les énoncés ont été soigneusement choisis avec une entrée en termes de notions pour vous permettre de travailler de façon **progressive tout au long des chapitres**. Ils les abordent à chaque fois au travers d'un nouvel objet ou résultat qui donnent **sens aux notions étudiées** dans votre cours. Toutes vos connaissances seront ainsi mobilisées et leur mise en œuvre sera consolidée au cours de l'année.

Enfin cet ouvrage vous propose **deux concours blancs** qui reprennent une grande partie des connaissances acquises au cours de vos deux années de préparation et vous permettent ainsi de faire le point et la synthèse de vos apprentissages.

Ce livre a été écrit avec la volonté de vous accompagner pendant toute votre deuxième année et de vous faire progresser et devenir performant en mathématiques. Cette écriture n'aurait pas été possible sans le soutien indéfectible de Vincent, Françoise, Gilles, Anne-Charlotte, Paul, Anne-Marie et Liza (je les remercie tous et les embrasse très fort à cette occasion). Je termine par une dernière pensée toute particulière pour Claude.

Sommaire

Devoirs

Algèbre

Analyse

Probabilités

Corrigés

Concours blanc

Conseils méthodologiques

La première étape fondamentale est **l'apprentissage et l'assimilation des connaissances ainsi que des méthodes du cours**. Il vous appartient de reprendre vos leçons et ses exemples de base.

La deuxième étape est la **confrontation avec les épreuves** que vous allez passer. Seul l'entrainement vous apportera l'aisance et la dextérité nécessaire. Les problèmes de cet ouvrage sont issus d'extraits d'annales ou élaborés selon les critères des concours. Ils répondent à cette **exigence d'entrainement**. Ils ont été choisis pour progresser pas à pas tout au long de l'année et du programme de deuxième année de classe préparatoire. Vous pourrez ainsi après chaque chapitre vous exercer en vue des concours.

Il convient donc de les **travailler dans les conditions de l'examen** : rédigez vos réponses sur une copie dans le temps imparti de façon précise et rigoureuse sans vous référer à la correction.

Pour résoudre une question dans la pratique, il faut d'abord **comprendre l'énoncé** puis **faire le lien avec vos connaissances** et enfin **mettre en œuvre les méthodes** choisies en adoptant une communication convaincante et irréprochable.

Ainsi lorsque vous commencez à lire l'énoncé, repérez tout de suite les différents **variables et objets en jeu et identifiez leur nature** (réel, entier naturel, fonction, matrice, …). S'il s'agit d'une nouvelle définition, assimilez rapidement sa construction. Ensuite analysez clairement d'une part les **hypothèses** entre tous ces objets et d'autre part les **conclusions** et résultats que vous devez trouver ou montrer.

L'étape suivante consiste à **connecter ces hypothèses à ces résultats**. Cette étape de **modélisation** est la plus délicate. Il faut trouver le chemin de la résolution et la solution se trouvera toujours dans vos leçons. À partir de l'analyse précédente de l'énoncé, remémorez vous toutes les notions et méthodes du cours qui y correspondent et choisissez la plus adéquate. Dès que votre choix est fait, testez-le éventuellement sur un brouillon pour vous assurer de sa pertinence. Si cela n'aboutit pas, soyez patient et essayez une autre piste venant du cours ou d'une question précédente. N'hésitez pas non plus à procéder par analyse/synthèse en partant de la conclusion cherchée pour trouver la connexion avec les données du sujet. Dans tous les cas, ne passez pas plus de cinq minutes par question. Même si vous ne l'avez pas résolue, gardez en mémoire le résultat donné qui peut être utile ultérieurement et passez à la suite.

Enfin lorsque vous avez réussi à résoudre une question, rédigez votre solution en appliquant exactement les notions du cours, en citant bien ses propriétés et théorèmes avec toutes leurs hypothèses. Il s'agit d'être complet et rigoureux sur tous les arguments et justifications à apporter. Appliquez-vous à avoir **une communication et une présentation claire, lisible et précise** de vos résultats.

Quand vous avez fini un problème, allez seulement à ce moment vers la correction et comparez-la à votre composition. Les **corrigés sont commentés** pour vous expliquer d'abord comment on parvient à la solution en vous rappelant les liens avec le cours qu'il convenait d'établir. Des points méthodes et des conseils rédactionnels vous sont également explicités.

Lors de cette correction, notez sur une fiche ce qui vous a manqué dans la résolution ou la rédaction mais aussi sur une autre fiche vos réussites. Elles vous seront précieuses lorsque vous passerez à l'étape des révisions pour reprendre tous vos acquis.

Je vous souhaite un travail efficace et fructueux ainsi qu'une brillante réussite aux concours.

Index thématique

Les numéros renvoient aux problèmes correspondants.

DEVOIRS

ALGÈBRE

Devoir 1

Matrice et endomorphisme nilpotent

Thèmes abordés : ce problème démontre des résultats classiques propres aux endomorphismes et matrices nilpotents. Il permet d'utiliser les méthodes de base sur famille de vecteurs, applications linéaires et matrice d'une application linéaire.

Temps de résolution : 1 heure et 30 minutes

Énoncé :

Partie A

E désigne un espace vectoriel de dimension 3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
On rappelle que $f^0 = Id_E$ l'application identité de E et que $f^i = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{i \text{ fois}}$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.
On considère f nilpotent d'indice $k \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire vérifiant $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{k-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ où $0_{\mathcal{L}(E)}$ est l'endomorphisme nul de $\mathcal{L}(E)$.

1. Justifier l'existence d'un vecteur $u \in E$ tel que $f^{k-1}(u) \neq 0_E$.

2.a) Montrer que $(u, f(u), \ldots, f^{k-1}(u))$ est une famille libre.
b) En déduire que $k \leq 3$.

3. On suppose dans cette question que $k = 3$.
a) Montrer que $(u, f(u), f^2(u))$ est une base de E.
b) Écrire la matrice de f dans cette base et déterminer $\mathrm{Im}\, f$ puis $\mathrm{Ker}\, f$ en fonction de $u, f(u), f^2(u)$.

Partie B

Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice N dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère N nilpotente d'indice k, c'est-à-dire vérifiant $N^k = 0_3$ et $N^{k-1} \neq 0_3$ où 0_3 est la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4. Montrer que $k \leq 3$.

5. On suppose dans cette question que $N^2 \neq 0_3$ et $N^3 = 0_3$. Montrer que N est semblable à :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. On suppose dans cette question que $\operatorname{rg} N = 1$ et $N^2 = 0_3$. Montrer que N est semblable à :

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. On suppose dans cette question que $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec a, b, c réels.

a) Calculer N^2 et N^3 et vérifier que $\operatorname{rg} N + 1 = \min\{i \in \mathbb{N}, N^i = 0_3\}$.

On pose $M = N^2 - N$ et $A = N + I_3$ où I_3 est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = M + I_3$.

c) Montrer que M et N sont semblables (on pourra raisonner en fonction du rang de N).

d) Déduire des questions précédentes que A et A^{-1} sont semblables.

Mots clés : famille libre, base, rang, matrices semblables.

Devoir 2

Commutant d’une matrice

Thèmes abordés : ce problème adapté d’un exercice Ecricome met en œuvre toutes les méthodes de base sur la diagonalisation des matrices carrées. Il reprend également des notions de première année sur application linéaire.

Temps de résolution : 1 heure et 30 minutes

Énoncé :

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l’esapce vectoriel des matrices carrées d’ordre 2 à coefficients réels. On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

On définit alors l’application ϕ_A par :

$$\phi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$$

Partie A

1. Vérifier que $A^2 = A$. En déduire les valeurs possibles de A.

2. Prouver que la matrice A est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont la première colonne est nulle vérifiant la relation :

$$A = PDP^{-1}.$$

Donner l’écriture matricielle de P^{-1}.

Partie B

3. Montrer que ϕ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Donner la matrice Γ de ϕ_A dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. Établir les valeurs propres de Γ.

5. Soit λ un réel, $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $N = P^{-1}MP$.
Montrer que $AM - MA = \lambda M$ est équivalent à $DN - ND = \lambda N$.

6.a) Trouver l'ensemble des matrices $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a, b, c, d réels telles que $DN - ND = 0_2$ avec 0_2 la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Déduire des questions précédentes que $\operatorname{Ker} \phi_A = \operatorname{Vect}(A, M_1)$ avec $M_1 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à déterminer.
$\operatorname{Ker} \phi_A$ est l'ensemble des commutants de la matrice A, c'est-à-dire l'ensemble des matrices M telles que $AM = MA$.
b) De la même façon montrer que $\operatorname{Ker} (\phi_A - Id) = \operatorname{Vect}(M_2)$ avec $M_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à déterminer et $\operatorname{Ker} (\phi_A + Id) = \operatorname{Vect}(M_3)$ avec $M_3 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à déterminer. (Id représente l'application identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.)
c) Montrer que (A, M_1, M_2, M_3) forme une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer la matrice de ϕ_A dans cette base.
d) En déduire que Γ est diagonalisable.

Mots clés : valeur propre, sous-espace propre, matrice diagonalisable, endomorphisme, matrice d'un endomorphisme, noyau, base.

Devoir 3

Chaîne de Markov

Thèmes abordés : ce problème ESSEC un peu long nécessite d'entrer véritablement dans le sujet et de concrétiser exactement la situation décrite en faisant le lien avec nos connaissances du cours sur diagonalisation et chaine de Markov. Il propose également une réflexion sur quelques programmes Python.

Temps de résolution : 4 heures

Énoncé :

Dans tout le problème, on désigne par j un entier supérieur ou égal à 1.
On considère un marché sur lequel 3 fournisseurs proposent des biens identiques à des consommateurs. Chaque consommateur passe une commande. Ces commandes arrivent, successivement et de façon indépendante, auprès des 3 fournisseurs, chacun d'eux étant choisi de façon équiprobable. On désigne :
- par X_j la variable aléatoire indiquant le nombre de fournisseurs ayant reçu au moins une commande de l'un ou plusieurs des j premiers consommateurs,
- par $P([X_j = k])$ la probabilité de l'évènement $[X_j = k]$, où k est un entier compris entre 1 et 3.

Partie A

On établit d'abord dans cette partie quelques résultats préliminaires d'Algèbre linéaire. On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.a) Quelles sont les trois valeurs propres de M ?
La matrice M est-elle diagonalisable ?

b) En Python, la commande `al.matrix_rank(M)` renvoie le rang de la matrice `M`. On a saisi :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
M=np.array([[1/3,0,0],[2/3,2/3,0],[0,1/3,1]])
r1=al.matrix_rank(M-np.eye(3))
r2=al.matrix_rank(M)
```

Quelles sont les valeurs contenues dans `r1` et `r2` après exécution de ce programme ?
c) Déterminer des vecteurs propres V_1, V_2, V_3 associés à chacune des trois valeurs propres de M (on prendra des coordonnées entières).
d) Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base (V_1, V_2, V_3) puis déterminer l'inverse de cette matrice.
Donner les instructions Python qui construisent la matrice P, puis son inverse et enfin une matrice diagonale D semblable à M (les instructions donnant cet inverse et cette matrice diagonale seront données à l'aide de P et de M).

2.a) Déduire des résultats précédents une matrice diagonale D telle que :

$$M = PDP^{-1}.$$

b) En déduire l'expression de M^{j-1} (on rappelle que l'entier naturel j est non nul).

Partie B

On désigne :
- par U_j la matrice ligne suivante :

$$U_j = \begin{pmatrix} P([X_j = 1]) & P([X_j = 2]) & P([X_j = 3]) \end{pmatrix},$$

- par $E(X_j)$ l'espérance de X_j.

3.a) Déterminer les trois probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{[X_j=1]}([X_{j+1} = 1]) \qquad P_{[X_j=2]}([X_{j+1} = 1]) \qquad P_{[X_j=3]}([X_{j+1} = 1])$$

En déduire l'expression de $P([X_{j+1} = 1])$ en fonction des probabilités $P([X_j = 1]), P([X_j = 2])$ et $P([X_j = 3])$.
Exprimer de même $P([X_{j+1} = 2])$ et $P([X_{j+1} = 3])$ en fonction des probabilités $P([X_j = 1]), P([X_j = 2])$ et $P([X_j = 3])$.
b) Établir un lien entre U_j, U_{j+1} et M.
c) Préciser U_1 puis calculer U_j en fonction de j.
d) Déterminer la limite des éléments de la matrice U_j lorsque j tend vers $+\infty$.

4.a) On considère les matrices colonnes $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer deux réels a et b tels que $ML = aL + bJ$.
Calculer $U_j J$, puis établir $U_j L$ en fonction de $E(X_j)$.
Montrer alors que : $E\left(X_{j+1}\right) = aE\left(X_j\right) + b$.
b) En déduire $E(X_j)$ en fonction de j. Vérifier que $E(X_j)$ tend vers 3 lorsque j tend vers $+\infty$.

Partie C

On désigne désormais par T la variable aléatoire indiquant le nombre de consommateurs ayant déjà procédé à une commande lorsque, pour la première fois, chacun des 3 fournisseurs a reçu au moins une commande.

5.a) Comparer les deux évènements $[T \leq j]$ et $\left[X_j = n\right]$.
En déduire $P([T = j])$.
b) On pose $F(j) = P([T \leq j])$. Établir que :

$$F(j) = 1 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^j - 3\left(\frac{2}{3}\right)^j.$$

6.a) Quel est le sens de variation de la suite $(F(j))_{j \geq 1}$? Préciser $F(1)$ et la limite de $F(j)$ lorsque j tend vers $+\infty$.
b) Prouver que pour tout réel y appartenant à $]0,1[$, il existe un unique entier $j \geq 2$ tel que :

$$F(j-1) < y \leq F(j)$$

On considère l'algorithme suivant (dans lequel `y` est une variable de type réel contenant une valeur appartenant à $]0,1[$, `z` une variable de type réel et `n,p,q` des variables de type entier) :

```
n=1
p=2
q=3
z=(1-y)/3
while (p-1)/q > z :
      n=n+1
      p=2*p
      q=3*q
print(n)
```

c) Exprimer en fonction de k les valeurs communes contenues par `n,p,q` à l'issue du k-ième passage dans la boucle `while`, dans la mesure où celui-ci a lieu (pour $k = 0$, il n'y a aucun passage dans la boucle et les valeurs contenues dans `n,p,q` sont 1, 2, 3).