MATEMÁTICAS

264

Sarando y los números mágicos

CARLOS PRIETO

LA CIENCIA PARA TODOS

LA CIENCIA PARA TODOS
264

Sarando
y los números mágicos

En 1984 el Fondo de Cultura Económica concibió el proyecto editorial La Ciencia desde México con el propósito de divulgar el conocimiento científico en español a través de libros breves, con carácter introductorio y un lenguaje claro, accesible y ameno; el objetivo era despertar el interés en la ciencia en un público amplio y, en especial, entre los jóvenes.

Los primeros títulos aparecieron en 1986, y si en un principio la colección se conformó por obras que daban a conocer los trabajos de investigación de científicos radicados en México, diez años más tarde la convocatoria se amplió a todos los países hispanoamericanos y cambió su nombre por el de La Ciencia para Todos.

Con el desarrollo de la colección, el Fondo de Cultura Económica estableció dos certámenes: el concurso de lectoescritura Leamos La Ciencia para Todos, que busca promover la lectura de la colección y el surgimiento de vocaciones entre los estudiantes de educación media, y el Premio Internacional de Divulgación de la Ciencia Ruy Pérez Tamayo, cuyo propósito es incentivar la producción de textos de científicos, periodistas, divulgadores y escritores en general cuyos títulos puedan incorporarse al catálogo de la colección.

Hoy, La Ciencia para Todos y los dos concursos bienales se mantienen y aun buscan crecer, renovarse y actualizarse, con un objetivo aún más ambicioso: hacer de la ciencia parte fundamental de la cultura general de los pueblos hispanoamericanos.

CARLOS PRIETO DE CASTRO

Sarando y los números mágicos

CONAHCYT
CONSEJO NACIONAL DE HUMANIDADES
CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS

FONDO
DE CULTURA
ECONÓMICA

Primera edición, 2024

[Primera edición en libro electrónico, 2026]

Prieto de Castro, Carlos
Sarando y los números mágicos / Carlos Prieto de Castro. — México : FCE, Conahcyt, 2024
255 p. ; 21 × 14 cm — (Colec. La Ciencia para Todos ; 264)
Texto para nivel medio y medio superior
ISBN 978-607-16-8885-9

1. Matemáticas – Historia 2. Matemáticas 3. Divulgación científica I. Ser. II. t.

LC QA39 P75 Dewey 508.02 C569 V. 264

Distribución mundial

Esta publicación forma parte del proyecto "Plataformas de difusión científica: narrativas transmedia para México" del Instituto de Investigaciones Dr. José María Luis Mora, apoyado por el Conahcyt en el año 2024.

CONAHCYT
CONSEJO NACIONAL DE HUMANIDADES CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS

La Ciencia para Todos es proyecto y propiedad del Fondo de Cultura Económica, al que pertenecen también sus derechos. Se publica con los auspicios de la Secretaría de Educación Pública y del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías.

Carretera Picacho-Ajusco, 227; 14110 Ciudad de México
www.fondodeculturaeconomica.com
Comentarios: editorial@fondodeculturaeconomica.com
Tel.: 55-5227-4672

Diseño de portada: Neri Ugalde Guzmán

ISBN 978-607-16-8885-9 (impreso)
ISBN 978-607-16-9148-4 (pdf)

Impreso en México • *Printed in Mexico*

SUMARIO

PRÓLOGO

Sarando vuelve a la aventura. En esta ocasión busca descubrir la magia que tienen los números… los números mágicos.

Números mágicos… Así es, los números pueden tener magia. En este texto queremos mostrar que hay números llenos de magia, los cuales, al igual que un conejo que se desvanece en el sombrero de copa de un mago o una paloma que aparece dentro de su pañoleta, nos van a producir grandes sorpresas. Ése es el objetivo de este libro: demostrar que los números pueden tener magia, como la magia del 7. ¿Quién la negaría? Al dividir cada uno de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 entre 7 obtenemos fracciones decimales con las mismas cifras y que sólo difieren en que unas se corren hacia la derecha y otras hacia la izquierda:

1:7 = 0.**142857**142857142857142857142857142857…
2:7 = 0.2857**142857**14285714285714285714285714…
3:7 = 0.42857**142857**1428571428571428571428571…
4:7 = 0.57**142857**1428571428571428571428571428…
5:7 = 0.7**142857**14285714285714285714285714285…
6:7 = 0.857**142857**142857142857142857142857142…

¿O quién diría que no es magia encontrar que al multiplicar 111 111 111 por sí mismo se obtiene 12 345 678 987 654 321?

¿O quién no aceptaría que es mágico cuando algún amigo nos pide pensar en el número que sea; luego nos dice que lo multipliquemos por 9 y que al resultado le tachemos la cifra que queramos, a excepción del 0; después nos pide que sumemos las cifras del número que quedó y le demos el resultado, e inmediatamente el amigo nos dice qué cifra tachamos?

Antes de comenzar con la magia, recordemos uno de los grandes avances que tuvo la matemática hace unos 1 500 años: el descubrimiento más o menos simultáneo del cero, hecho por los estudiosos de la India y los mayas en América Central. Y más aún el haber comprendido que el cero es un número con propiedades similares a las de los demás números, lo que significó un enriquecimiento sustancial de los sistemas numéricos de ambas culturas, con lo que se facilitaron muchísimo sus cálculos, haciéndolos más precisos y eficientes.

El libro comenzará definiendo los números naturales, que, como dijo Kronecker, fueron un don de Dios a partir del cual podemos construir toda la matemática. Daremos la definición de una manera intuitiva, emulando la forma en la que los humanos prehistóricos, y también los niños pequeños, fueron creando en su pensamiento el concepto de *número.* Marchando sobre la historia, recordaremos los números racionales y por qué fueron denominados así. Recordaremos también a Hipaso de Metaponto y su sacrificio por, presuntamente, haber divulgado que había magnitudes imposibles de ser expresadas por números racionales.

Hecho esto, comenzaremos a trabajar con los números mágicos que dan título a esta obra. El primer número mágico con el que nos encontraremos tiene un origen geométrico. Se trata de la sección áurea, que es la proporción de cierto rectángulo, que en la antigüedad era considerado paradigma de belleza en la arquitectura y la escultura. No podremos dejar de hablar de los números de Fibonacci, que tienen una íntima relación con la divina proporción. Introduciremos la sucesión de Fibonacci, que se aproxima a la proporción áurea. Más aún, veremos que, más que los números —los cuales en sí conforman la sucesión de Fibonacci—, es la forma en la que éstos se construyen la que determina su convergencia al número de oro.

El segundo número mágico que discutiremos también tiene origen geométrico. Se trata del mágico número del círculo, más precisamente del número π (pi), que muestra su presencia en muchas de las construcciones relacionadas con el círculo. Recurriremos nuevamente a la historia recordando cómo Arquímedes logró calcular el valor de π con asombrosa precisión. No nos quedaremos atrás, haciendo nosotros lo propio y calculando el número con una cantidad alta de cifras decimales. Recordaremos que π no sólo es un número irracional, sino que es trascendente, es decir, no hay ninguna ecuación polinómica con coeficientes enteros que tenga como solución a π.

El tercer número mágico que ocupará nuestra atención es el número *e*, el famoso número de Euler. Enfrentaremos el desafío de deducir su valor a partir de las propiedades que esperamos de él. Veremos cómo con él podemos encontrar una función no trivial cuya derivada es ella misma. Usaremos esta función para modelar la curva que producen los cables de alta tensión cuando cuelgan entre dos torres, la cadenita que cuelga alrededor del cuello de una niña cuando se agacha o la curva que forman los cables de los que pende el famoso puente colgante Golden Gate de San Francisco.

Pascal describió un famoso triángulo formado por números llenos de propiedades mágicas. Éstos son los famosos coeficientes binomiales, que lo mismo sirven para conocer los coeficientes de cualquier potencia de un binomio que para calcular las probabilidades de éxito en un experimento aleatorio que sólo ofrezca una posibilidad de éxito y una de fracaso. Esta famosa disposición triangular de números guarda en su seno a los números naturales, las potencias de dos, los números triangulares y los tetraédricos, pero también a los números de Fibonacci. Cuál no será nuestra sorpresa cuando extraigamos el número de Euler de este mágico cucurucho formado por los números de Pascal.

Haremos una revisión del concepto de *divisibilidad* y mostraremos cómo es posible, de una manera sencilla, decidir si un determinado número es divisible entre 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 y 11, así como entre otros más. Veremos también algunos números a los que la *numerología* asigna propiedades especiales. Mostraremos que los números capicúas no lo son si cambiamos de sistema numérico, veremos que el apocalíptico 666 es un número bastante inocente. Estudiaremos los números binarios, y en otras bases.

Haremos un recorrido por los números primos, estudiando los primos de Mersenne, los primos de Fermat y los primos de Germain. Con los de Mersenne llegaremos al número primo más grande que se conoce a la fecha, descubierto apenas en enero de 2016. También discutiremos cuáles de los números de Fermat son primos y escribiremos algunos primos en el sistema binario. Mencionaremos el papel de los primos de Germain en la prueba que dio Sophie Germain de un caso particular (muy importante) del *último teorema de Fermat*.

Finalmente hablaremos un poco sobre números imaginarios y su importancia en las matemáticas. Veremos cómo los números complejos son, en cierto sentido, el *non plus ultra*.

Considerando que la formalidad es una propiedad fundamental de las matemáticas, procuraremos en la medida de lo posible dar una demostración de cada afirmación que hagamos. Esto nos dará la oportunidad de abordar otros temas que son necesarios para este fin. No obstante, el lector que no desee involucrarse con las demostraciones de nuestras afirmaciones podrá leer sin dificultades las partes del texto que se refieren a los hechos de los números mágicos y no perderse en las demostraciones. Por el contrario, el lector que sí quiera involucrarse con las demostraciones podrá seguirlas sin dificultades si está familiarizado con las matemáticas que normalmente se enseñan en el bachillerato. En este sentido, el libro se puede convertir en un compañero de los textos que se utilizan en la preparatoria. Los alumnos podrán complementar de una manera agradable las matemáticas que deben aprender en la escuela con un aspecto de ellas más amigable, sin presión, que pueden obtener de este libro.

Casi cada aventura concluye con algunas biografías de matemáticos que tuvieron cierta relevancia en el tema tratado. Están basadas en las excelentes biografías escritas por John J. O'Connor y Edmund F. Robertson de la Universidad de St. Andrews en Escocia, disponibles en el sitio MacTutor History of Mathematics (https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/). A ellos va mi profundo agradecimiento.

I. Primera aventura: la magia del 1

Había terminado el periodo de vacaciones y doña Violeta ayudaba a Adrián y a Sebastián a preparar sus mochilas para el nuevo año escolar que empezaba el siguiente lunes. Entre tanto, don Joaquín trabajaba en su estudio, como siempre, leyendo sus libros y haciendo sus notas en un cuaderno. Sarando, el duende matemático, se asomaba desde su cueva bajo el viejo pirul del jardín de la calle Albatros, ansioso de saber qué estaba estudiando don Joaquín, pues ya sabía que siempre estaba ocupado en aprender temas muy interesantes.

Poco a poco se iban apagando las luces de la casa hasta que finalmente el viejo reloj de pared resonó con las once campanadas, con las que usualmente don Joaquín daba por terminado su día y se retiraba a descansar. Sarando se tallaba las manos para deslizarse al estudio y ver qué tema estaba llamando la atención del señor Portes.

La magia de los números rezaba el título que don Joaquín había anotado en su cuaderno de notas. Junto a él estaba abierto un libro. Sarando volteó el libro para leer el título. Era un bonito libro de pasta dura con una vistosa portada y el título *Los números mágicos*. La página que estaba a la vista y que presuntamente estaba leyendo don Joaquín se refería a la magia del número uno.

—¡No esperemos más! —exclamó Sarando y comenzó a leer.

Todo dio comienzo con 1, el número 1, el único número singular. Siempre afirmamos que tenemos un peso (en singular) o un caramelo (en singular), pero los demás números son plurales. Decimos que tenemos tres plumas (en plural) o que la semana tiene siete días (en plural). Incluso ocasionalmente se escucha a la gente decir que tiene cero monedas (en plural) en la bolsa o que tiene cero posibilidades (en plural) de lograr algo.

Singular significa "único en su especie"; el uno es único, es como la semilla primigenia de la cual surgen todos los números.

Pero ¿qué es el uno? El uno recuerda la indivisibilidad: cualquier número es divisible entre sí mismo y quizás entre otros números; por ejemplo, el 6 se puede dividir entre 3 y obtenemos 2, es decir, 6 se descompone como 3 + 3; o se puede dividir entre 2 y obtenemos 3, es decir, 6 también se descompone como 2 + 2 + 2; incluso podemos dividirlo entre 6 y obtenemos 1, lo que significa que 6 se expresa como 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1. Hasta el 0 se puede dividir entre cualquier número, por ejemplo, entre 5, y obtenemos 0 + 0 + 0 + 0 + 0 (¿será por eso que se le considera plural?).

Reflexionando en lo anterior, nos percatamos de que con el número 2 podemos generar otros números:

$$\begin{aligned}
4 &= 2 + 2\\
6 &= 2 + 2 + 2\\
8 &= 2 + 2 + 2 + 2\\
10 &= 2 + 2 + 2 + 2 + 2\\
12 &= 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2
\end{aligned}$$

etcétera.

—¡Obtenemos los pares! —exclamó Sarando y siguió leyendo.

Haciendo lo propio con el 3 generamos:

$$
\begin{aligned}
6 &= 3 + 3 \\
9 &= 3 + 3 + 3 \\
12 &= 3 + 3 + 3 + 3 \\
15 &= 3 + 3 + 3 + 3 + 3 \\
18 &= 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3
\end{aligned}
$$

etcétera.

—¡Obtenemos los múltiplos de tres! —reflexionó Sarando.

Incluso con el cero sólo obtenemos 0, como se ve en lo que sigue:

$$
\begin{aligned}
0 &= 0 + 0 \\
0 &= 0 + 0 + 0 \\
0 &= 0 + 0 + 0 + 0 \\
0 &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \\
0 &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0
\end{aligned}
$$

etcétera.

Sin embargo, con el 1 obtenemos todos los números naturales:

$$
\begin{aligned}
2 &= 1 + 1 \\
3 &= 1 + 1 + 1 \\
4 &= 1 + 1 + 1 + 1 \\
5 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
6 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
\end{aligned}
$$

etcétera.

Podemos especular que, en la prehistoria, se usaban los dedos para describir números pequeños, al igual que lo hacen los niños pequeños (y muchos adultos). Por ejemplo, para indicar 3 mostramos tres dedos. Y si nos preguntan cuántas plumas tenemos, y éstas también son tres, simplemente mostramos nuestros tres dedos.

Entonces parece que nuestras plumas y nuestros dedos tienen una propiedad en común. Esto nos lleva a una pregunta,

FIGURA I.1. *Tres dedos (fotografía © sinseeho/iStock).*

FIGURA I.2. *Tres plumas (fotografía © phatthanit_r/iStock).*

aparentemente trivial, pero bastante profunda en el fondo: ¿qué es un número natural? Una respuesta no del todo formalmente correcta podría ser la siguiente:

Es la propiedad que comparten dos colecciones (finitas) de objetos que se pueden hacer corresponder uno a uno. La figura I.3 muestra tal correspondencia entre los dedos y las plumas. El primer paso que dio el humano hacia el descubrimiento de las matemáticas quizá consistió en distinguir *uno* de *muchos* (*sin-*

gular de *plural*). Este paso lo llevó al umbral. Pero propiamente el primer paso, ya dentro de las matemáticas, fue el de *contar*, es decir, establecer correspondencias entre colecciones de objetos y decidir si éstos tienen la misma "cantidad" o no. Más adelante utilizaron los dedos como símbolos para representar dicha "cantidad", es decir, para simbolizar la característica común que tienen dos colecciones que se pueden poner en correspondencia. Seguramente lo que vino después fue darle un nombre a dicha característica común, con lo que surge el concepto abstracto de *número*. Si, en efecto, las matemáticas son el arte de la abstracción, entonces fue ésta la primera experiencia humana en dicho arte.

—¡Vaya, vaya! —se dijo Sarando—. Yo hace mucho que sé contar, pero nunca se me había ocurrido pensar cuál era el significado de "contar".

Seguramente hemos observado a un niño pequeño al que se le pregunta cuántos años tiene. Muy probablemente su respuesta haya sido levantar un dedito, luego otro y después un tercero, y balbucear "tes". En su cabecita, ese pequeño, con ayuda

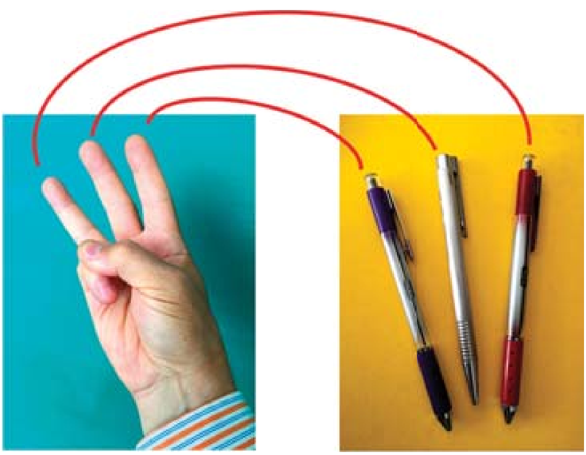

FIGURA 1.3. *Correspondencia de tres.*

de sus deditos, construyó un conjunto abstracto formado por tres elementos, a saber: *uno*, *dos* y *tes*. Está aprendiendo el arte de contar. Cuando contamos alguna colección, vamos señalando cada objeto y, a la vez, diciendo "uno, dos, tres…", hasta que terminamos con, digamos, veintitrés. Concluimos inmediatamente que tenemos 23 objetos. ¿Por qué lo sabemos? Lo sabemos porque establecimos una correspondencia entre el conjunto abstracto de los números que van del 1 al 23 con los objetos de la colección que deseábamos contar. A final de cuentas, nuestro proceso de contar objetos es equivalente al de establecer correspondencias entre los conjuntos formados por los primeros números naturales y las colecciones de objetos que nos interesan.

—Pues mira que esto es interesante —musitó Sarando—. Llevo años y años de estar contando y nunca había recapacitado en exactamente qué cosa significa "contar".

Volvamos a la magia del 1. Una vez que tenemos 1, sumamos otro 1 y obtenemos 2; volvemos a sumar 1 y obtenemos 3. Sucesivamente sumando 1 cada vez, vamos obteniendo los números naturales. Formalmente diríamos que, cada vez que sumamos 1 a un número, obtenemos su *sucesor*, es decir, el sucesor de un número natural es el que se obtiene sumándole 1. Tenemos el siguiente resultado:

Teorema. Si un conjunto V de números naturales tiene a 1 como elemento y cada vez que un natural n pertenezca a V ello implique que el sucesor, o sea el natural $n + 1$, también pertenezca a V, entonces V es el conjunto de los números naturales, es decir: $V = \mathbb{N}$.

A este teorema se le conoce como *principio de inducción*, que analizaremos y aplicaremos enseguida.

Demostración. Recordemos que el conjunto de los naturales se construye, como dijimos arriba, comenzando con el [conjunto que contiene al] 1. Luego le agregamos el resultado de sumarle a dicho 1 otro 1 y llamamos 2 a tal suma, es decir, agregamos $2 = 1 + 1$, y sucesivamente seguimos agregando 1 a cada elemento ya construido, como $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$, y, en general, si ya tenemos n en el conjunto, le agregamos $n + 1$. Tal conjunto es $\mathbb{N}$.

Ahora bien, las propiedades de V obligan a que V contenga a $\mathbb{N}$, pero como, por hipótesis, V está contenido en $\mathbb{N}$, necesariamente $V = \mathbb{N}$.

—A ver... —se cuestionó Sarando—. Como que no entendí muy bien. —Sacó su cuaderno para empezar a hacer sus notas—. Dice el enunciado del teorema que V es un conjunto de naturales que contiene al 1. Luego afirma que cada vez que V contiene a un natural, también contiene al sucesor. Por lo tanto, contiene al sucesor de 1, es decir, contiene al 2. Al contener al 2 también contiene al 3, y con el 3 al 4 y al 5, etc. Es decir, contiene a todos los naturales. Y como sólo contiene naturales, entonces debe ser el conjunto de todos los naturales. ¡Claro! Ya entendí.

El principio de inducción

El principio de inducción, del que hablaremos aquí, es una de las más útiles herramientas de las matemáticas para demostrar afirmaciones relacionadas con los números naturales. Más concretamente, si deseamos demostrar que cierta afirmación es válida para los números naturales, el principio de inducción es el camino adecuado para hacer dicha prueba. Este principio se basa fundamentalmente en el teorema anterior.

Consideremos un ejemplo muy sencillo. Tomemos la afirmación siguiente: la suma de los primeros números naturales hasta n es la mitad del producto de n por $n + 1$, es decir,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Llamemos V al conjunto de todos los números naturales n para los cuales la fórmula anterior es válida. Veamos que 1 está en V:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Como la fórmula es válida para $n = 1$, entonces 1 es un elemento del conjunto V. Supongamos ahora que, para alguna n, la fórmula es válida, es decir, que dicha n está en V. Veamos que, en consecuencia de ello, también $n+1$ está en V. Por nuestra suposición (hipótesis de inducción), la fórmula que queremos probar es válida, de modo que, si a ambos lados les sumamos $n + 1$, tendremos otra fórmula válida, a saber,

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Y, efectivamente, el miembro derecho de la ecuación anterior es el que se esperaba para el caso $n+1$, es decir, hemos demostrado que, si n es elemento de V, entonces $n+1$ también lo es.

—Veamos el alcance de tal afirmación. Primero demostramos que 1 es elemento de V. Luego demostramos que cada vez que n sea elemento de V, $n + 1$ también lo es. De tal modo, como 1 está en V, entonces $1 + 1$, o sea 2, también está en V; de igual modo, $2 + 1$, o sea 3, también es elemento de V. Dado que sumando 1 cada vez vamos obteniendo todos los números naturales, entonces la colección V es precisamente la colección $\mathbb{N}$ de todos los números naturales. Y dado que V consta de todos los números naturales n, para los cuales la fórmula es válida, entonces, ya que V tiene al 1 y todos sus sucesores, consta de todos los naturales, por lo que la fórmula es válida para todos los números naturales.

Fascinado, Sarando salió un rato al jardín a contemplar la Luna en cuarto creciente, que no tardaría ya en esconderse en el poniente. Luego fue a descansar.

La noche siguiente continuó su lectura.

Más formalmente, si deseamos probar que cierta proposición P acerca de un número natural n es válida para cualquier valor que asuma n, utilizamos el principio de inducción para demostrarlo. A saber, si denotamos con $P(n)$ la proposición para n, y queremos demostrar la validez de $P(n)$ para cualquier número natural n, consideramos el conjunto V de todos los números naturales para los cuales $P(n)$ vale. Si podemos demostrar la validez de $P(1)$, entonces habremos demostrado que 1 pertenece a V; si ahora suponemos que n pertenece a V, es decir, que $P(n)$ es válida, y de ello podemos deducir que $P(n + 1)$ también es válida, tendremos que $n + 1$ también pertenece a V y, por lo tanto, V consta de todos los números naturales, en otras palabras, la proposición $P(n)$ es cierta para todos los números naturales n.

Veamos otro ejemplo. Primero vamos a jugar un poco con sumas de números elevados al cubo. Veamos la siguiente tabla:

$1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9$
$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225$
etcétera.

Observamos que los resultados son $9 = 3^2$, $36 = 6^2$, $100 = 10^2$, $225 = 15^2$, etc. Pero también nos damos cuenta de que $3 = 1 + 2$, $6 = 1 + 2 + 3$, $10 = 1 + 2 + 3 + 4$, $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$, de tal modo que las sumas de la tabla podemos escribirlas como:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

¿Será cierta esta fórmula para cualquier número natural n?

—¡Claro! —exclamó Sarando—. Éste es un caso perfecto para la inducción. ¡Veamos!

Gracias a la fórmula que probamos en el ejemplo anterior, la fórmula que deseamos probar ahora es equivalente a:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Si deseamos aplicar el principio de inducción, tendremos que verificar la fórmula para $n = 1$. En este caso, el lado izquierdo de la fórmula es:

$$1^3 = 1,$$

mientras que el derecho es:

$$\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1(2)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1,$$

por lo que la fórmula es válida para 1.

Supongamos ahora que es válida para n y veamos que también lo es para $n + 1$. Así, sumemos a ambos lados de la fórmula $(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$. Obtenemos en el izquierdo:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3$$

y en el derecho:

$$\begin{aligned}\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}\\ &= \frac{\left[n^2 + 4(n+1)\right](n+1)^2}{4}\\ &= \frac{(n^2 + 4n + 4)(n+1)^2}{4}\\ &= \frac{(n+2)^2(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.\end{aligned}$$

De este modo obtenemos:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4},$$

que es la fórmula esperada para el caso $n + 1$. Esto da validez a la fórmula para cualquier número natural. Esta fórmula fue dada por primera vez por Brahmagupta en el siglo VII en la India.

La esencia de lo dicho la resume Giuseppe Peano en cinco axiomas, los *axiomas de Peano,* que definen la aritmética:

1. Cero es un número.
2. Si n es un número, entonces el sucesor de n es un número.
3. Cero no es sucesor de ningún número.
4. Dos números, cuyos sucesores son iguales, son ellos mismos iguales.
5. Si un conjunto S de números contiene al cero, así como al sucesor de cada número en S, entonces todo número está en S.

El último axioma es el principio de inducción.

El principio de inducción se puede aplicar en cualquier contexto de las matemáticas, aunque no sea algebraico como los anteriores. Por ejemplo, podemos probar la siguiente aseveración geométrica:

La suma de los ángulos internos de un polígono convexo de n lados está dada por

$$S(n) = (n - 2) \cdot 180°.$$

En este caso, dado que el menor número de lados que puede tener un polígono es 3, tendremos que comenzar nuestra inducción con $n = 3$. Si el paso de inducción funciona, habremos demostrado la fórmula para cualquier número natural $n \geq 3$, es decir, para cualquier polígono convexo (con más de tres lados).

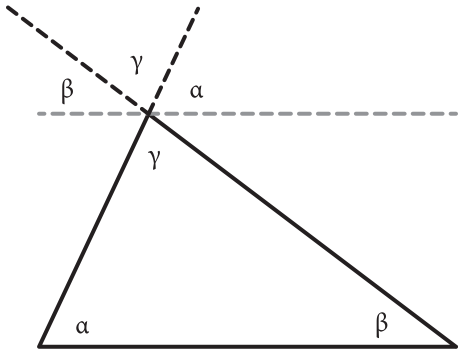

FIGURA I.4. *Polígono de tres lados.*

El caso $n = 3$ es bien conocido. Se trata de un triángulo cuyos ángulos interiores suman 180°, que en efecto es igual a $S(3) = (3 - 2) \times 180° = 1 \times 180° = 180°$.

La prueba de este hecho es muy sencilla, como lo muestra la figura I.4, en la que, después de trazar a través de un vértice una paralela al lado opuesto al vértice, y prolongando los dos lados que inciden en dicho vértice, replicamos los ángulos interiores del triángulo, éstos forman un ángulo llano, es decir, de 180°.

Supongamos que, en cualquier polígono convexo —es decir, cuyos ángulos internos son todos menores que 180°— de n lados, los ángulos interiores suman $(n - 2) \cdot 180°$. Tomemos ahora un polígono convexo, con $n + 1$ lados (vértices). Elijamos tres vértices consecutivos A, B y C. Tracemos la cuerda AC y eliminemos momentáneamente el vértice B. Obtenemos así un polígono con un lado (y un vértice) menos, es decir, un polígono convexo con n lados. Por la hipótesis de inducción, en este nuevo polígono suman los ángulos internos $(n - 2) \cdot 180°$. Si ahora volvemos a colocar el triángulo retirado, el ángulo en el vértice A en vez de α vale $\alpha + \alpha'$, y el ángulo en el vértice C vale $\gamma + \gamma'$ (véase la figura I.5). De este modo, al polígono recortado hay que agregarle la suma de los ángulos internos $\alpha' + \beta + \gamma'$ del triángulo retirado, que vale 180°, por lo que la suma de los ángulos internos de nuestro polígono original de $n + 1$ lados