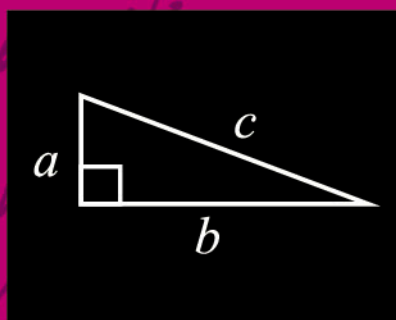


Le théorème de Pythagore

Défis mathématiques
progressifs

de 14 à 99 ans



Damien Mégy
Robin Riblet



Le théorème de Pythagore

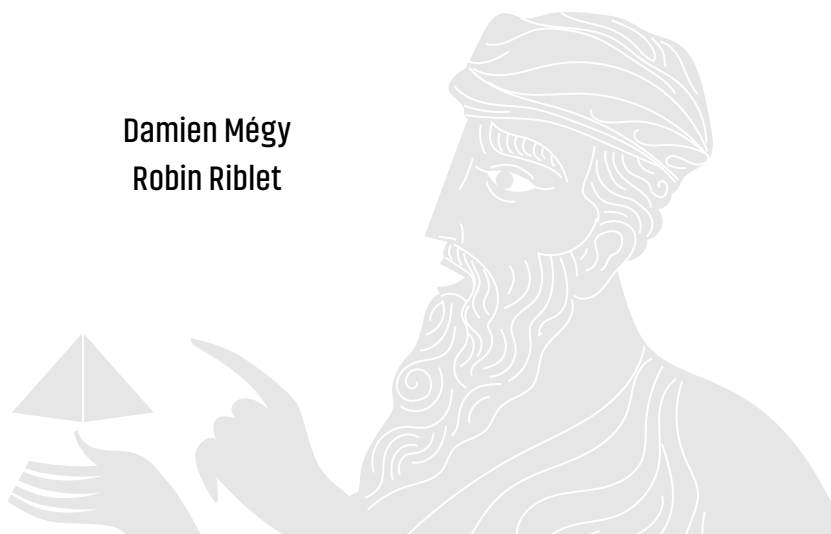
Défis mathématiques
progressifs

Le théorème de Pythagore

Défis mathématiques
progressifs

de 14 à 99 ans

Damien Mégy
Robin Riblet



Conception graphique couverture: Nathalie FOULLOY

ISBN 9782340-115743

Dépôt légal : mai 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

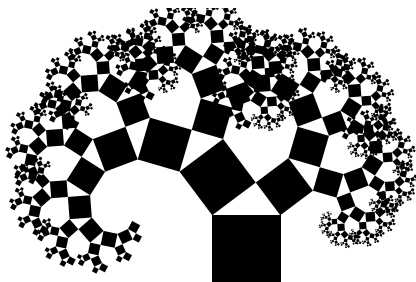


Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos



Le théorème de Pythagore est une source inépuisable d'idées, de figures élégantes et de raisonnements lumineux. Derrière sa formule familière, $a^2 + b^2 = c^2$, se cache un monde de formes, de jeux de symétries, de démonstrations multiples et de liens inattendus. Il suffit parfois d'un simple trait tiré au bon endroit pour que tout s'éclaire. Ce moment d'émerveillement après une recherche patiente fait partie des grandes joies que peut offrir la géométrie.

Ce livre propose une exploration progressive de ce monde. Il s'adresse à toutes celles et ceux, à partir de la classe de quatrième, qui ont envie de chercher, de comprendre, de dessiner et griffonner, d'essayer et se tromper parfois, et de recommencer. Chacun des dix-sept chapitres commence par des rappels et des exercices d'entraînement conçus pour poser les bases et donner confiance. Les exercices sont classés par thème puis par difficulté (de ★☆☆☆☆ à ★★★★★) et sont illustrés de centaines de figures. Des indications sont proposées à la fin de l'ouvrage et des solutions détaillées permettent de vérifier ses raisonnements.

La première partie s'appuie uniquement sur les outils accessibles dès la quatrième. On y rencontre des configurations classiques (triangles rectangles, isocèles, équilatéraux, cercles), mais aussi des figures plus complexes : polygones réguliers, pavages, empilements...

La seconde partie s'adresse à des lectrices et lecteurs un peu plus expérimentés. Elle fait appel au calcul littéral, aux identités remarquables et à la résolution d'équations, et propose des problèmes plus ambitieux, parfois inspirés de sujets de mathématiques olympiques. Mais là encore, l'objectif reste le même : prendre plaisir à explorer et à comprendre, crayon à la main.

En fin d'ouvrage, après des indications et solutions pour chaque problème, on trouvera un index et une frise chronologique faisant apparaître les principaux mathématiciens et mathématiciennes rencontrés au fil de l'ouvrage. Ce livre n'est pas un manuel au sens classique : c'est une invitation à entrer dans un univers de curiosité et de beauté mathématique. Nous espérons qu'il procurera aux lecteurs autant de plaisir et d'enthousiasme que nous en avons eu à l'écrire.

Enfin, nous remercions vivement nos élèves du Club mathématique de Nancy et les nombreux collègues et proches qui ont contribué à améliorer ce livre, ainsi que les éditions Ellipses pour leur chaleureux accueil.

Table des matières

I	Pythagore sans calcul littéral	11
1	Le théorème de Pythagore et quelques exercices d'application	13
1	Incontournable : une démonstration « visuelle »	14
2	Échauffement : trapèze rectangle	14
3	Échauffement : les premiers carrés parfaits	14
4	Échauffement : quelques triplets pythagoriciens	15
5	Rectangles ou pas?	15
6	Aire d'un parallélogramme	15
7	Aire d'un trapèze isocèle	18
8	Un premier triangle égyptien	19
9	Extrémités d'une ligne brisée	19
10	Polygone	19
11	Hypoténuses multiples	20
12	Hauteurs d'un losange	20
13	Spirale de Théodore	21
2	Carrés et triangles isocèles rectangles	23
14	Échauffement : calculs avec $\sqrt{2}$	24
15	Échauffement : carrés imbriqués	24
16	Deux petits carrés	24
17	Coupe Animath Junior octobre 2016	25
18	Zigzags dans un carré	25
19	Triangle isocèle avec angle au sommet de 45°	26
20	Un quadrilatère avec deux angles de 45°	26
21	Olympiades Ukrainiennes Junior : Deux côtés et un angle	26
22	Carrés articulés	27
23	Carré minimal contenant cinq carrés identiques	27
24	Carré minimal contenant dix carrés identiques	27
3	Triangles équilatéraux et hexagones réguliers	29
25	Échauffement sur les prérequis	29
26	Échauffement : calculs avec $\sqrt{3}$	30
27	Le triangle de l'écolier	30
28	Angles à trouver	30
29	Intersection des médianes d'un triangle équilatéral	30
30	Aire de l'hexagone régulier	31

31	Trois hexagones dans un hexagone	31
32	Deux triangles dans un hexagone	31
33	Cinq triangles dans un triangle	32
34	Dix triangles dans un hexagone	32
35	Deux céviennes	32
36	Triangle isocèle avec angle au sommet de 30°	33
37	Carrés imbriqués	33
38	Intersection de deux carrés	33
39	Triangle rectangle inscrit dans un rectangle	34
40	Triangle équilatéral et carré	34
41	Le « chapeau »	34
42	Trois carrés dans un triangle équilatéral	36
43	Densité de l'empilement hexagonal	36
4	Approfondissements et pavages	39
44	Échauffement : calculs avec $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$	39
45	Échauffement : étoile carrée	39
46	Trois triangles équilatéraux dans un carré	40
47	Quatre triangles dans un carré	40
48	Sept hexagones dans un hexagone	40
49	Intersection d'une médiatrice avec le côté opposé	41
50	Tuile du pavage carré adouci	41
51	Pavages par des carrés et triangles équilatéraux	41
52	Ratio dans un triangle $45^\circ - 60^\circ$	42
53	Un autre trapèze isocèle	42
54	Parallélogramme avec un angle de 75°	42
55	Pavage du Caire	43
56	Le « spectre »	44
57	Angle de $22,5^\circ$	45
58	Apothème de l'octogone	45
59	Simplifications avancées avec les racines carrées	45
60	Angle de 15°	45
61	Triangle équilatéral inscrit dans un carré	46
62	Aire et périmètre du dodécagone	47
5	Cercles	49
63	Rectangle dans un quart de cercle	50
64	Six points cocycliques	50
65	Demi-cercle dans un demi-cercle	50
66	Cordes égales faisant un angle de 120°	51
67	Comparaison d'aires	51
68	Un carré dans un quart de cercle	51
69	Rayon coupant une corde	52
70	Cordes perpendiculaires	52
71	Cordes sécantes à 45°	52
72	Le merveilleux théorème de l'angle droit	53
73	Demi-cercle posé sur un triangle isocèle	53
74	Quadrilatère inscriptible	54

75	Triangle égyptien dans un quart de cercle	54
76	Damier dans un cercle	55
77	Point sur le cercle circonscrit d'un carré	55
78	Recouvrement d'un carré par six disques	55
79	Recouvrement d'un carré par sept disques	56
6	Principe des tiroirs	59
80	Échauffement sans Pythagore	59
81	Cinq points dans un carré	60
82	Intuition sur le diamètre	60
83	Cinq points dans un triangle	61
84	Sept points dans un cercle	61
85	Sept points dans un carré	61
86	51 points dans un carré	61
87	Six points dans un carré	62
88	Six points dans un rectangle	62
7	Tangentes à un cercle	63
89	Échauffement : duplication du carré et du cercle	64
90	Échauffement : neuf disques	64
91	Rayon du cercle inscrit	65
92	Tangente commune à deux cercles tangents	65
93	Cercles orthogonaux	65
94	Trois petits cercles dans un cercle	66
95	Demi-cercle dans un quart de cercle	66
96	Trois cercles dans un rectangle	66
97	Cercles tangents	67
8	Empilements de disques dans un polygone régulier	69
98	Cercles inscrits dans un triangle équilatéral	69
99	Deux cercles dans un triangle équilatéral	69
100	Six cercles dans un triangle équilatéral	70
101	Hexagone contenant trois cercles	70
102	Hexagone contenant deux et quatre cercles	71
103	Deux et trois disques dans un carré	71
104	Cinq cercles dans un carré	71
9	Aires et quadratures	75
105	Échauffement : figures simples quarrables	75
106	Une rosace	76
107	Le salinon d'Archimède	76
108	Quadrature de la pince de Léonard	76
109	Une deuxième rosace	77
110	La première lunule d'Hippocrate	77
111	Lunules sur un triangle équilatéral	78
112	Tentative de quadrature du cercle par Hippocrate	79

10 Empilements de carrés dans un cercle	81
113 Échauffement : un et quatre carrés dans un cercle	82
114 Deux carrés dans un cercle	82
115 Cinq carrés dans un cercle	82
116 Six carrés dans un cercle	82
117 Trois carrés dans un cercle	83
118 35 carrés dans un cercle	83
119 Cinq carrés, mieux ou moins bien?	84
120 Trois carrés dans un cercle, version améliorée	84
121 Neuf carrés dans un cercle	84
122 Six carrés dans un cercle, version améliorée	85
 II Pythagore avec calcul littéral	 87
11 Calculs à une inconnue	89
123 Prérequis : développer, factoriser, identités remarquables	90
124 Côtés en progression arithmétique	90
125 D'après Coupe Animath Junior 2014	90
126 Hexagone équilatéral dans un carré	91
127 Treize triangles dans un hexagone	91
128 Quatre hexagones dans un hexagone	91
129 Longueur de la hauteur	92
130 Origami : rectangle replié	92
131 Triangle égyptien dans un carré	92
132 Origami : rectangle replié, bis	93
133 Triangle isocèle invisible	93
 12 Cercles et calcul littéral	 95
134 Un quart de cercle et un cercle dans un carré	95
135 Demi-cercle dans un triangle	95
136 Milieu d'une corde	96
137 Un Sangaku simplifié	96
138 Deux demi-cercles dans un rectangle	96
139 Cercle circonscrit d'un triangle isocèle	97
140 Vers le théorème de Descartes	97
141 Cercle inscrit d'un triangle rectangle	98
142 Triangle et cercle tangent	98
143 Demi-cercle inscrit dans un triangle égyptien	99
144 Cercle inscrit dans un triangle rectangle	99
 13 Calculs à plusieurs inconnues	 101
145 Échauffement : l'identité de Sophie Germain	101
146 Quelques systèmes (presque) linéaires	101
147 Deux médianes	102
148 Médianes perpendiculaires	102
149 Aire d'un trapèze dont on donne les côtés	102
150 Un système linéaire	103

151	Côté d'un parallélogramme	103
152	Diagonale d'un parallélogramme	103
153	Quatrième côté d'un quadrilatère orthodiagonal	104
154	Distances aux sommets d'un rectangle	104
155	Utilisation d'une identité remarquable	105
156	Distance entre deux milieux	105
14	Calculs à plusieurs inconnues avec cercles	107
157	Ni inscrit ni circonscrit	107
158	Deux cercles dans un triangle équilatéral	107
159	Demi-cercle dans un triangle rectangle	108
160	Ligne brisée dans un demi-cercle	108
161	Zigzags dans un cercle	108
162	Demi-tour dans un cercle	109
163	Zigzag dans un quart de cercle	109
164	Six petits cercles	109
165	Triangle dans un cercle	110
166	D'après des olympiades USA Junior	110
167	Aire entre deux demi-disques	111
168	Trois cercles dans un demi-cercle	111
169	Cercles tangents	111
15	Triangles pythagoriciens, d'Eisenstein et de Héron	113
170	La formule d'Euclide	113
171	Recherche de triplets pythagoriciens	113
172	La grande question sur la vie, l'univers et le reste	115
173	Triplets et triangles d'Eisenstein	115
174	Triangles d'Eisenstein : l'équation	116
175	Formule pour engendrer des triangles d'Eisenstein	116
176	Factorisation avancée : échauffement	117
177	Triangles pythagoriciens parfaits	117
16	Énoncés généraux	119
178	Triangles équilatéraux extérieurs	119
179	Sangaku et moyenne géométrique	120
180	Lunules d'Alhazen	120
181	Théorème du drapeau britannique	120
182	Condition nécessaire pour être orthodiagonal	121
183	Deux céviennes dans un triangle	121
184	Côtés en progression arithmétique, version générale	121
185	Une corde	122
186	Le célèbre Sangaku des trois cercles	122
187	Théorème de Carnot	123
188	Rayon du cercle circonscrit d'un triangle isocèle	123
189	Rayon du cercle inscrit d'un triangle isocèle	123
190	Cercles jumeaux d'Archimède	124

17 Conclusion et ouverture : quelques nouveaux théorèmes	125
191 Cosinus de l'angle double	125
192 Théorème de la hauteur relative à l'hypoténuse	126
193 Deuxième théorème de la hauteur	126
194 Théorème (de la médiane) d'Apollonius	126
195 Identité du parallélogramme	126
196 Trois applications du théorème d'Apollonius	127
197 Inégalités arithmético-géométrico-quadratique	127
198 Application : inégalité géométrico-harmonique	128
199 Loi des cosinus (Al-Kashi)	128
200 Formule de Héron	129
201 Une application de Héron	129
202 Théorème de Stewart	130
 III Indications et corrections	 131
18 Indications	133
19 Corrections	143
 Repères historiques	 246
Index	249

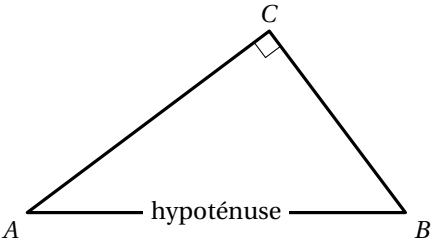
$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$
 $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $\tan 45^\circ = 1$
 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
 $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
 $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\sec 60^\circ = 2$
 $\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$
 $\sec 45^\circ = \sqrt{2}$
 $\csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$
 $\csc 30^\circ = 2$
 $\csc 45^\circ = \sqrt{2}$
 $\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$
 $\cot 45^\circ = 1$

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

Le théorème de Pythagore et quelques exercices d'application

Prérequis : le théorème de Pythagore et sa réciproque

Un triangle est dit **rectangle** lorsqu'il possède un angle droit. Dans ce cas, son **hypoténuse** est son côté le plus long, celui qui fait face à l'angle droit. (Les deux autres côtés, plus petits, sont parfois appelés **cathètes**.)



Théorème de Pythagore :

Soit ABC un triangle. Si ABC est rectangle en C , alors : $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Réciproque du théorème de Pythagore :

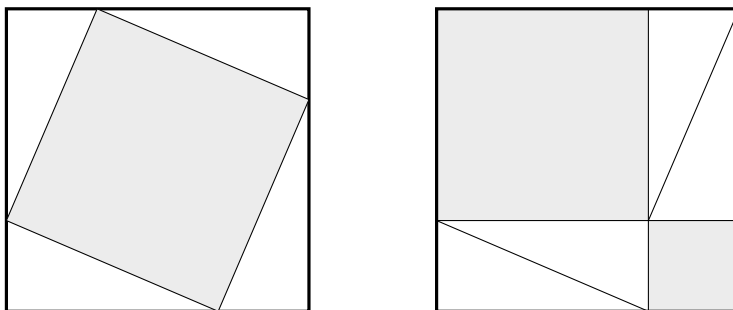
Soit ABC un triangle. Si $AB^2 = AC^2 + BC^2$, alors le triangle est rectangle en C .

Utilisation en pratique :

- Le **théorème de Pythagore** permet d'exploiter le fait qu'un triangle est rectangle pour démontrer d'autres résultats. Il permet aussi dans certains cas de démontrer qu'un triangle **n'est pas** rectangle sans avoir à calculer ses angles : si la relation entre les longueurs n'est pas vérifiée, c'est que le triangle n'est pas rectangle.
- La **réciproque** du théorème de Pythagore, elle, sert à démontrer qu'un triangle **est rectangle** en vérifiant simplement des égalités de longueurs, là aussi sans avoir à calculer aucun angle.

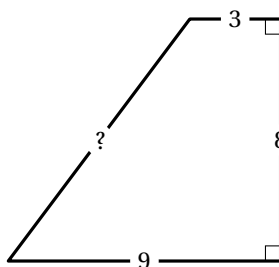
Problème 1 ★★☆☆ Incontournable : une démonstration « visuelle »

À partir des deux illustrations ci-dessous, reconstituer une démonstration du théorème de Pythagore.



Problème 2 ★☆☆☆ Échauffement : trapèze rectangle

La figure ci-dessous représente un trapèze rectangle. Calculer la longueur manquante.



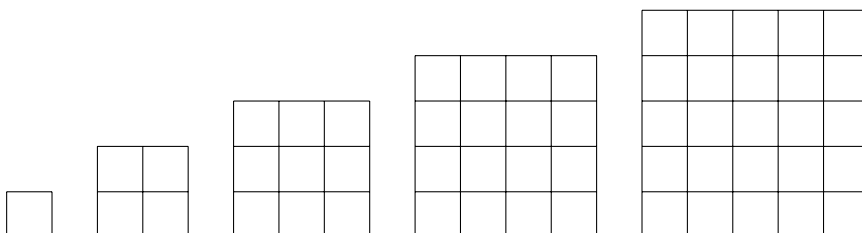
Problème 3 ★☆☆☆ Échauffement : les premiers carrés parfaits

Un *carré parfait* est un nombre entier qui est le carré d'un autre nombre entier. Les premiers carrés parfaits sont :

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

Calculer tous les carrés parfaits inférieurs à 1024. Il n'est pas nécessaire de les apprendre par cœur, mais ils apparaîtront fréquemment dans la suite et il peut être utile de savoir en reconnaître certains.

Question supplémentaire (★★★☆☆) : à chaque fois, comment passe-t-on d'un carré parfait au suivant ? En s'inspirant de la suite de carrés ci-dessous, expliquer ce phénomène.

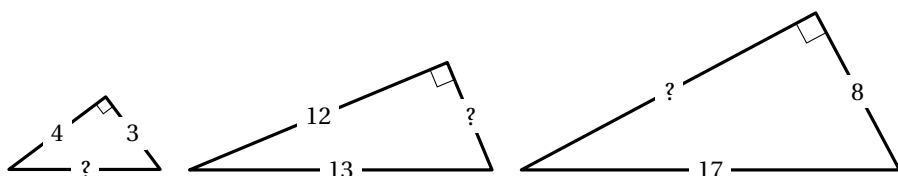


Avertissement sur les unités de longueur et d'aire

Dans ce livre, les unités de longueur et d'aire ne sont pas systématiquement indiquées dans les énoncés ou les figures. Ce sont en général des centimètres et centimètres carrés. Toutes les figures sont à l'échelle sauf mention contraire.

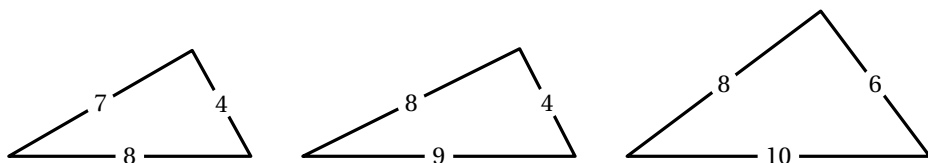
Problème 4 ★☆☆☆ Échauffement : quelques triplets pythagoriciens

Les triangles ci-dessous sont rectangles. Calculer les longueurs manquantes.



Problème 5 ★☆☆☆ Rectangles ou pas?

Les triangles ci-dessous ont l'air d'être rectangles. Mais le sont-ils vraiment?



Triplets pythagoriciens

Lorsque trois nombres entiers strictement positifs a , b et c vérifient l'équation $a^2 + b^2 = c^2$, on dit qu'ils forment un **triplet pythagoricien**. La figure à la page 16 en contient plusieurs autres, pour s'entraîner à les manipuler.

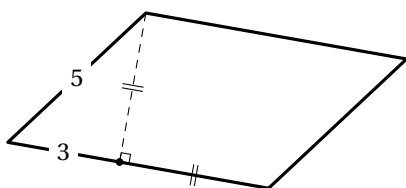
Le problème 170 page 113 présente une méthode générale pour construire une infinité de triplets pythagoriciens, c'est-à-dire une infinité de triangles rectangles à côtés entiers.

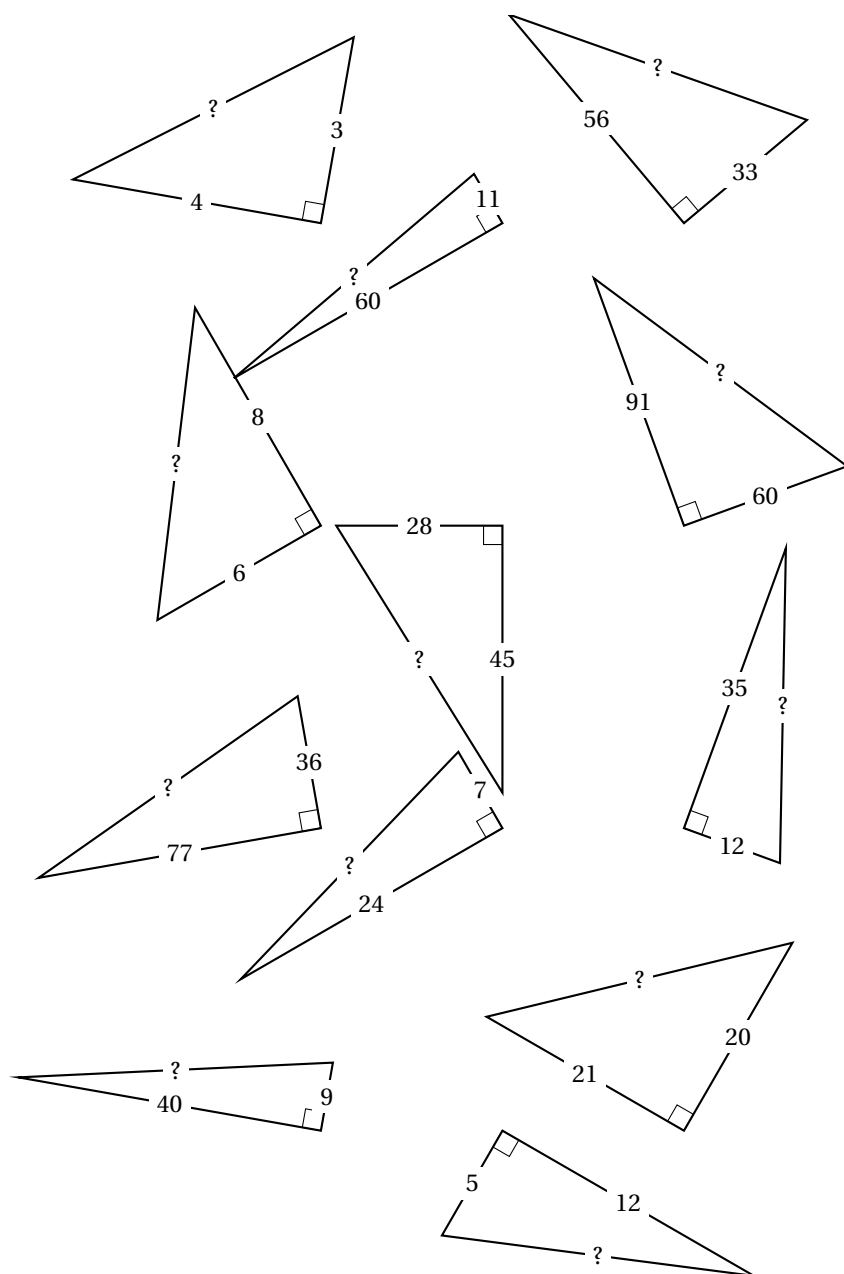
Triplets presque pythagoriciens

Lorsque des entiers a , b et c ne vérifient pas tout à fait $a^2 + b^2 = c^2$ mais « presque », c'est-à-dire lorsque $a^2 + b^2$ vaut $c^2 + 1$ ou $c^2 - 1$, on parle de triplet « presque pythagoricien ». Ces triplets vérifient eux aussi de nombreuses propriétés intéressantes.

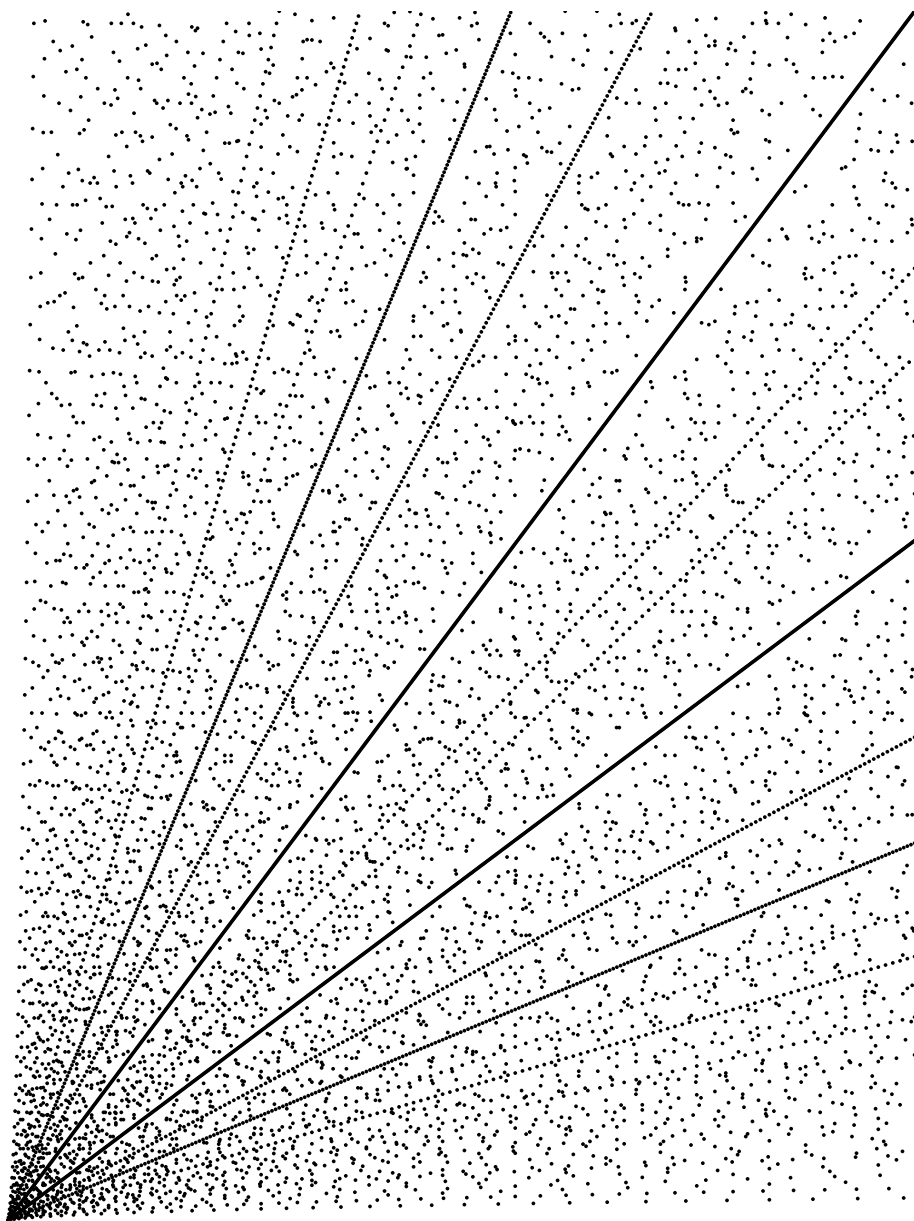
Problème 6 ★☆☆☆ Aire d'un parallélogramme

Calculer l'aire du parallélogramme ci-dessous.





Quelques triplets pythagoriciens. Les distances manquantes sont données page 114.



Les triplets pythagoriciens $x^2 + y^2 = z^2$ pour $x \leq 3000$ et $y \leq 4000$. Il y en a 8682. Chaque point représente les deux premiers termes (x, y) d'un triplet. On voit apparaître des droites, qui représentent les multiples de certains triplets, ainsi que d'autres courbes plus mystérieuses.

Origine des triplets pythagoriciens

Les triplets pythagoriciens ont été en réalité découverts bien avant Pythagore.

La tablette babylonienne « Plimpton 322 », découverte en Irak au début du XX^e siècle et écrite en *cunéiforme*, contient une très énigmatique liste de 15 triplets pythagoriciens. Or, cette tablette en argile date de **1800 avant notre ère**, donc bien plus de mille ans avant Pythagore.

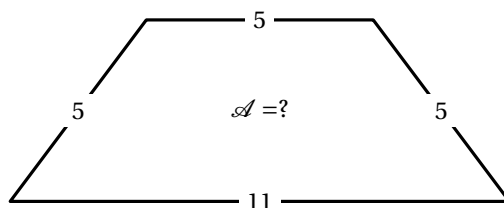
Ci-dessous, une reproduction du contenu de cette tablette, ainsi que les triplets pythagoriciens représentés par ces symboles. On ignore encore exactement de quelle manière ces triplets ont été trouvés et quel algorithme a été utilisé pour les calculer.

⌌⌌ < ⌌	⌌⌌⌌	⌌⌌⌌	119	120	169
⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌	⌌⌌ ⌌	⌌⌌⌌⌌ ⌌	3367	3456	4825
⌌⌌ ⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌	⌌⌌⌌⌌⌌	⌌⌌⌌ ⌌⌌	4601	4800	6649
⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌	⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌	⌌⌌ ⌌⌌ ⌌	12709	13500	18541
⌌⌌⌌⌌⌌ ⌌⌌	⌌⌌ ⌌	⌌⌌⌌⌌	65	72	97
⌌⌌ ⌌⌌⌌⌌⌌	⌌⌌⌌⌌	⌌⌌ ⌌	319	360	481
⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌	⌌⌌⌌⌌⌌	⌌⌌⌌ ⌌	2291	2700	3541
⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌ ⌌⌌⌌⌌	< ⌌⌌⌌⌌	⌌⌌ ⌌⌌	799	960	1249
⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌	⌌⌌ ⌌	< ⌌⌌⌌⌌	481	600	769
⌌⌌⌌⌌⌌ ⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌	⌌⌌⌌⌌⌌⌌	⌌⌌⌌⌌⌌ ⌌	4961	6480	8161
⌌⌌⌌⌌⌌	⌌⌌⌌	⌌⌌⌌⌌	45	60	75
⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌ ⌌⌌⌌⌌	⌌⌌⌌⌌⌌	⌌⌌⌌⌌⌌	1679	2400	2929
⌌⌌ ⌌⌌⌌⌌	⌌⌌⌌⌌⌌ ⌌	⌌⌌⌌⌌	161	240	289
⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌	⌌⌌⌌⌌⌌	⌌⌌⌌⌌⌌	1771	2700	3229
⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌⌌	⌌⌌⌌	⌌⌌⌌	28	45	53

Déchiffrer la tablette est (très) difficile sans indications. Les nombres sont écrits en base 60, la première colonne ne correspond à aucune des colonnes de droite et en plus, le scribe babylonien a fait quelques erreurs de calcul (les symboles qui sont grisés sur la figure).

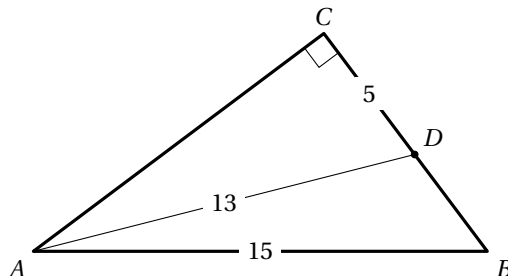
Problème 7 ★☆☆☆ Aire d'un trapèze isocèle

On donne un trapèze isocèle ainsi que les longueurs de ses côtés, comme sur la figure. Quelle est son aire $\mathcal{A}$?



Problème 8 ★★☆☆☆ **Un premier triangle égyptien**

Soit ABC un triangle rectangle en C avec hypoténuse de longueur $AB = 15$. On place un point D sur le segment $[CB]$ de sorte que $CD = 5$ et $AD = 13$. Quelle est l'aire du triangle ABD ?

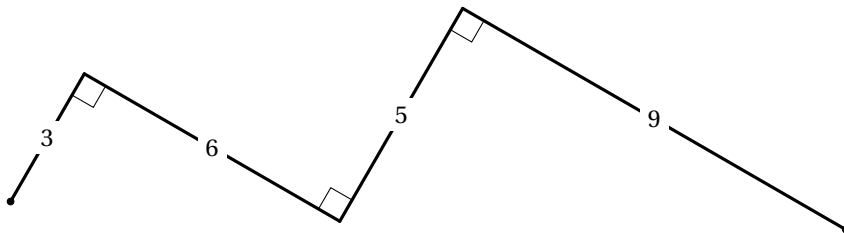


Triangles égyptiens

Un triangle dont les côtés sont dans le ratio 3 : 4 : 5, c'est-à-dire un triangle proportionnel au triangle de côtés 3, 4 et 5 est qualifié de *triangle égyptien* car ces triangles étaient utilisés dans l'Égypte antique pour arpenter les champs. Ces triangles apparaissent souvent dans les problèmes sur le théorème de Pythagore et ont une riche histoire. Dans le problème précédent, quel est le triangle égyptien?

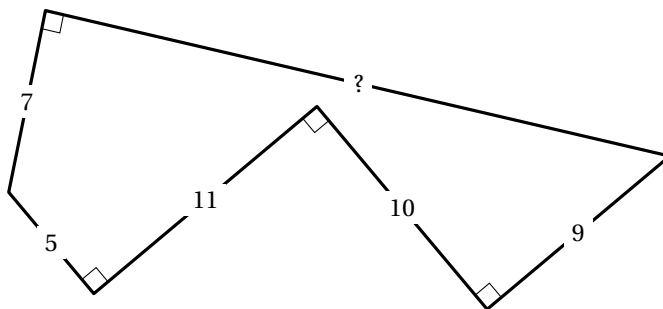
Problème 9 ★★☆☆☆ **Extrémités d'une ligne brisée**

On considère une ligne brisée avec des angles droits et des distances comme sur la figure. Calculer la distance entre ses extrémités.



Problème 10 ★★☆☆☆ **Polygone**

Que vaut le périmètre du polygone ci-dessous?

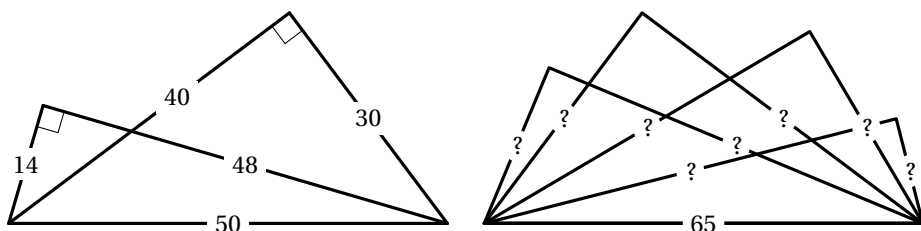


Problème 11 ★★★☆☆ **Hypoténuses multiples**

Le problème précédent fait intervenir un carré parfait qui est somme de deux carrés et ce, de deux manières différentes (une hypoténuse était commune à deux triangles rectangles différents). Il en existe d'autres, par exemple :

$$50^2 = 14^2 + 48^2 = 30^2 + 40^2.$$

Le suivant est $4225 = 65^2$, qui s'écrit comme somme de carrés de **quatre** manières différentes. Lesquelles ? Exceptionnellement pour ce problème, on pourra s'aider de la calculatrice ou d'un ordinateur avec Scratch, Python ou autre langage de programmation.



Défi supplémentaire (★★★☆☆) : trouver d'autres décompositions multiples de ce genre, toujours en s'aidant d'un programme informatique.

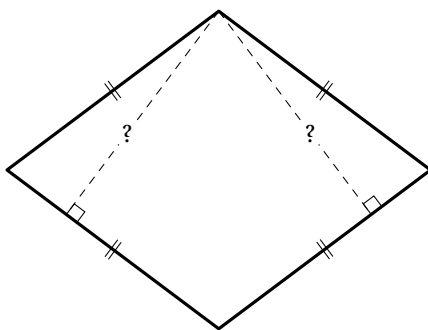
Le Projet Euler¹

Pour celles et ceux qui aiment à la fois les mathématiques et l'informatique, le « Projet Euler » est une inépuisable source de divertissement. Il s'agit d'un site web (<https://projecteuler.net>) proposant des centaines de problèmes mathématiques conçus pour être résolus à l'aide de programmes informatiques.

Le neuvième problème est par exemple le suivant : trouver l'unique triplet pythagoricien (a, b, c) de périmètre 1000, c'est-à-dire tel que $a + b + c = 1000$.

Problème 12 ★★★☆☆ **Hauteurs d'un losange**

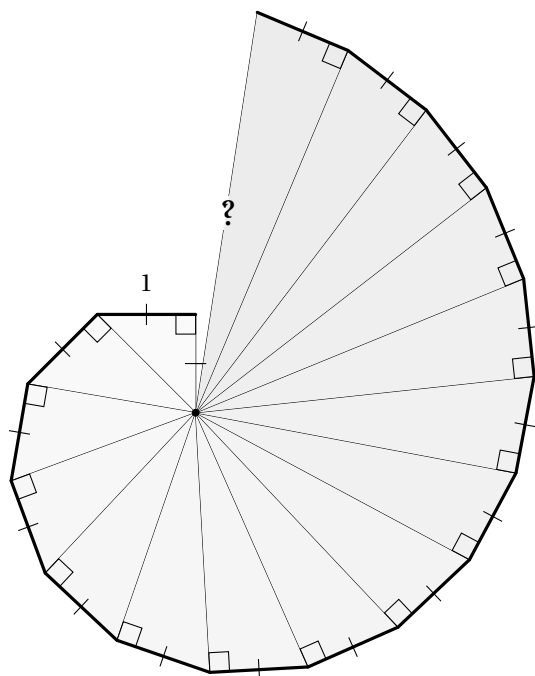
Les diagonales du losange ci-dessous mesurent 6 cm et 8 cm. Combien mesurent ses hauteurs ?



1. Leonhard Euler (1707 – 1783) est un des plus grands le plus grand mathématicien de tous les temps.

Problème 13 ★★☆☆ Spirale de Théodore

La spirale de Théodore est formée de 16 triangles rectangles juxtaposés comme sur la figure ci-dessous. Sachant que le côté extérieur de chaque triangle mesure toujours 1 cm, combien mesure l'hypoténuse du dernier triangle rectangle ?



Théodore de Cyrène et Pandrosion d'Alexandrie

Théodore de Cyrène, 465 av. J.-C. à 398 av. J.-C. Mathématicien grec de l'école pythagoricienne, célèbre pour sa contribution à la découverte des nombres irrationnels. On lui attribue la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ etc jusqu'à $\sqrt{17}$, possiblement en rapport avec cette spirale qui porte son nom.

L'irrationalité de $\sqrt[3]{2}$ elle, n'a été démontrée que plus d'un millénaire plus tard, mais dès le quatrième siècle de notre ère, la mathématicienne **Pandrosion d'Alexandrie** savait en calculer des approximations très précises grâce à une méthode qu'elle avait développée.

Besoin d'aide sur un énoncé ?

Pour chacun des problèmes, une courte indication puis une correction détaillée sont disponibles en fin d'ouvrage, dans la partie « Indications et corrections ».

