Matemática Do ENEM

Vagner Lopes de Almeida

2014

Conteúdo

Capítulo 1

Razão e Proporção

> “ Por que nos torna tão pouco felizes esta maravilhosa ciência aplicada, que economiza trabalho e torna a vida mais fácil ? ” A resposta é simples... “ Porque ainda não aprendemos a nos servir dela com bom senso ”.
>
> Albert Einstein

Razão: Significa divisão ou quociente entre dois números A e B, denotada por : $\dfrac{A}{B}$ ou A/B.

Proporção: É a igualdade entre duas razões. A proporção entre A/B e C/D é a igualdade: $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D} \rightarrow$ (A está para B, assim como, C está para D).

Porcentagem: Razão Centesimal $\longrightarrow x\% = \dfrac{x}{100}$.

Algumas razões especiais:

i) **Velocidade:**

$v = \dfrac{d}{t}$, isto é, velocidade é a razão entre a distância e o tempo.

ii) **Densidade Demográfica:**

$$\frac{\text{Número de habitantes}}{\text{Área ocupada pela região}}.$$

iii) **Escala:**

$$\frac{\text{Comprimento do desenho}}{\text{Comprimento real correspondente}}.$$

iv) **Pi:**

Número irracional, que vale aproximadamente $3,141592...$,

e é dado pela seguinte razão:

$$\frac{\text{Comprimento de uma circunferência}}{\text{Diâmetro ou dobro do raio}} \Rightarrow \frac{C}{2r} = \pi.$$

Proposição 1.1 (Propriedade Fundamental)

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} \Rightarrow A.D = B.C$$

Podemos denotar essa proporção da seguinte forma **A:B :: C:D** e que tem a seguinte leitura, *A está para B, assim como, C está para D*. Veja que B e C são os termos do **meio** e A e D são os

extremos. Isto é, o produto dos termos do meio é igual ao produto dos extremos.

Para demonstrar tal proposição, basta multiplicar ambos os membros por B.D, se não, vejamos:

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\Rightarrow \frac{A}{\cancel{B}}.\cancel{B}.D=\frac{C}{\cancel{D}}.B.\cancel{D}\Rightarrow A.D=B.C.$$

Proposição 1.2 *Se* $\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}\Rightarrow \dfrac{A+B}{B}=\dfrac{C+D}{D}$.

Para demonstrar tal proposição, basta somar 1 a ambos os membros:

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\Rightarrow \frac{A}{B}+1=\frac{C}{D}+1\Rightarrow \frac{A+B}{B}=\frac{C+D}{D}.$$

De modo semelhante, podemos subtrair 1 de ambos os membros e obter:

Se $\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}\Rightarrow \dfrac{A-B}{B}=\dfrac{C-D}{D}$.

Proposição 1.3 *Se* $\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}\Rightarrow \dfrac{A+C}{B+D}=\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}$.

Se $\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}\Rightarrow \dfrac{A}{C}=\dfrac{B}{D}$.

Aplicando a proposição 1.2, temos:

$$\frac{A}{C}=\frac{B}{D}\Rightarrow \frac{A+C}{C}=\frac{B+D}{D}\Rightarrow \frac{A+C}{B+D}=\frac{C}{D}=\frac{A}{B}.$$

De modo, análogo, se $\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}$, então, $\dfrac{A-C}{B-D}=\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}$.

Capítulo 2

Questões envolvendo proporções

Exemplo 2.1 *Uma empresa possui atualmente 2 100 funcionários. Se a relação entre o número de efetivos e contratados é de 5 por 2, quantos são os efetivos?*

A) 600

B) 1 000

C) 1 500

D) 1 600

E) 1 800

Solução: Chamando o número de efetivos de x e o número de contratados de y, temos que $x+y=2100$. Por outro lado, o enunciado diz que a **relação** entre o número de efetivos e contratados é de 5 por 2, temos aqui que **relação** é sinônimo de **razão**, isto é,

$x/y = 5/2$. Logo, temos que resolver um **sistema de equações**, veja que o enunciado está interessado, apenas no valor de x.

$$\begin{cases} i)\ x+y = 2100 \\ ii)\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Existem várias maneiras de resolver **sistemas de equações**. Vou resolver de duas maneiras, uma delas vai ser usando as propriedades das proporções.

De ii), $\dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{2} \Rightarrow iii)\ \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{2}$.

Veja que aplicando a **propriedade fundamental** (produto dos extremos igual ao produto dos meios) na equação ii) e na equação iii), obtemos $2x = 5y$, então ii) $\Leftrightarrow$ iii).

Então, usando a equação iii) e a proposição 1.3, temos que:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = \frac{x+y}{5+2} = \frac{2100}{7} = 300.$$

Logo, temos que $\dfrac{x}{5} = 300$.

Aplicando a propriedade fundamental, temos que $x = 5.300 = 1\,500$, isto é, marcamos a **letra C)**.

Agora vamos à **segunda solução**, chegamos em $2x = 5y \Leftrightarrow 2x - 5y = 0$, isto é, vamos resolver o sistema que segue que por sua vez é equivalente ao primeiro sistema.

$$\begin{cases} i)\ x+y=2100 \\ iv)\ 2x-5y=0 \end{cases}$$

Vamos multiplicar ambos os membros de i) por 5, fazendo isso, temos v) $5x+5y=10\ 500$, logo, temos o sistema que segue.

$$\begin{cases} v)\ 5x+5y=10\ 500 \\ iv)\ 2x-5y=0 \end{cases}$$

Agora, vamos somar as equações v) e iv) membro a membro, como segue.

$$\begin{cases} \boldsymbol{v)\ 5x+5y=10\ 500} \\ \boldsymbol{iv)\ \underline{2x-5y=0}} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{7x+0=10\ 500 \Rightarrow x=\frac{10\ 500}{7}=1\ 500.}$$

Exemplo 2.2 ***(ESAF)*** *A soma das idades de um pai, de um filho e de um neto é de 105 anos. Sabendo-se que a idade do pai esta para 8, assim como a do filho esta para 5 e do neto esta para 2, a idade, em anos, de cada um é, respectivamente:*

A) 66, 29 e 10.

B) 62, 31 e 12.

C) 56, 37 e 12.

D) 56, 35 e 14.

E) 58, 38 e 9.

Solução: Equacionando o problema, teremos o sistema que segue.

$$\begin{cases} i)\ p+f+n = 105 \\ ii)\ \dfrac{p}{8} = \dfrac{f}{5} = \dfrac{n}{2} \end{cases}$$

Aplicando a proposição 1.3 duas vezes em ii), teremos.

$$\frac{p}{8} = \frac{f}{5} = \frac{n}{2} = \frac{p+f+n}{8+5+2} = \frac{105}{15} = 7.$$

Logo, $\dfrac{p}{8} = 7 \Rightarrow p = 7.8 = 56$, $f = 5.7 = 35$ e $n = 2.7 = 14$. Assim, ficamos com a **letra D)**.

Exemplo 2.3 *Uma estrada esta representada por 15 cm em um mapa de escala 1 : 20 000. O comprimento real dessa estrada é:*

A) 3 km

B) 30 km

C) 300 m

D) 3 000 cm

E) 30 000 dam

Solução: Temos uma questão de razão (escala), como sabemos a razão 1 : 20 000 significa que 1 cm no desenho equivale a 20 000 cm no real, assim podemos montar a seguinte proporção, 1 está para 20 000, assim como, 15 cm está para x, isto é,

$$\frac{1}{20000} = \frac{15}{x}.$$

Usando a propriedade fundamental das proporções, isto é, multiplicando em cruz, temos $1.x = 15.20000 \Rightarrow x = 300\,000$ cm.

Como **1 m = 100 cm** e **1 km = 1 000 m**, temos que

1 km = 1 000 . 1 m = 1 000 . 100 cm = 100 000 cm.

Como, **1 km = 100 000 cm**, então 300 000 cm = 3 km, isto é, **letra A)**.

Capítulo 3

Grandezas Proporcionais

3.0.1 Grandezas diretamente proporcionais

Definição 3.1 *Dizer que a grandeza y é* ***diretamente proporcional*** *à grandeza x equivale a afirmar que existe um número k (fator de proporcionalidade) tal que*

$$\boxed{\frac{y}{x} = k \Leftrightarrow y = k.x}$$

Exemplo 3.1 *Supondo que um objeto custe R$ 2,00. Podemos montar uma tabela com 2 grandezas, valor do objeto em função (dependendo) da quantidade de objetos.*

Custo (R$)	2,00	4,00	6,00	8,00
Quant. de Objetos	1	2	3	4

Observe que fazendo a divisão entre as grandezas, isto é.

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2 \; ou \; \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = 0,5.$$

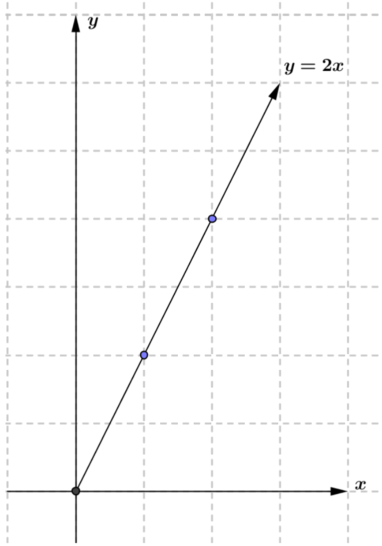
Então, se y for o custo e x a quantidade de objetos temos a relação que segue.

$$\frac{y}{x} = 2 \Rightarrow y = 2x \text{ ou } x = \frac{y}{2} \Leftrightarrow x = 0,5y.$$

Como, a divisão entre o custo e o número de objetos é constante (a saber, nesse caso é igual a 2 = fator de propocionalidade), então dizemos que essas grandezas (custo e objetos) são diretamente proporcionais. Veja que a divisão entre o número de objetos e o custo é constante (fator de proporcionalidade igual a 0,5), então elas são diretamente proporcionais, isto é,

se uma grandeza x é proporcional a y, então a grandeza y é proporcional a x.

Veja eu como vendendor posso vender os objetos seguindo o padrão da tabela, mas e se eu vendesse 3 objetos por 5,00, se assim fosse feito, não teriamos grandezas proporcionais, pois $5/3 \neq 2$*, veja na tabela (objetos x custo), que quando dobramos o número de objetos, o custo dobra também, se multiplicamos o número de objetos por 3, o valor do custo também será multiplicado por 3, então se estivemos diante de 2 grandezas, se o valor de uma aumentar e por isso o valor da outra aumentar, isso não quer dizer que elas são diretamente proporcionais, pois pra serem proporcionais, além do aumento, temos que ter uma divisão constante entre elas (seus valores). Vamos esboçar o gráfico da função (relação)* $y = 2x$*, por sorte, tal* ***função é do primeiro grau*** *e* ***toda função do primeiro grau o gráfico é uma reta****.*



3.0.2 Grandezas inversamente proporcionais

Definição 3.2 *Dizer que a grandeza y é **inversamente proporcional** à grandeza x equivale a afirmar que existe um número k (fator de proporcionalidade) tal que* $\boxed{x.y = k}$

Exemplo 3.2 *Vamos fazer uma tabela com as grandezas velocidade (km/h) e tempo (horas).*

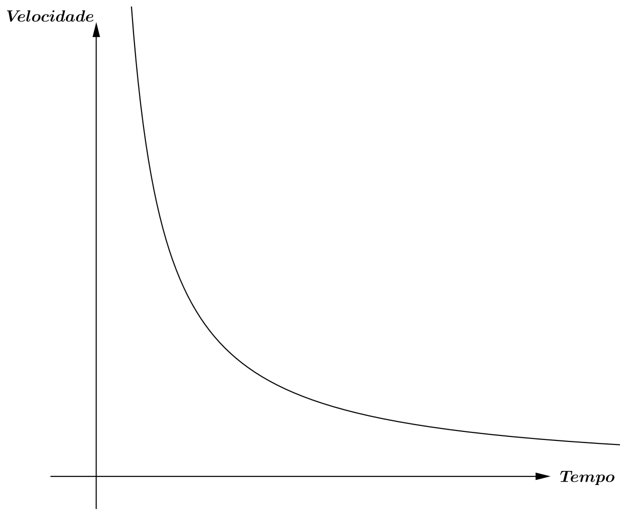
Velocidade	*320*	*160*	*80*	*40*	*20*
Tempo	*1*	*2*	*4*	*8*	*16*

Pela tabela temos na primeira linha a velocidade em km/h. Por exemplo a velocidade de 160 km/h ($1\ h \to 160\ km$ *), isto é, pra cada hora temos a distância de 160 km. Assim, em 2 horas vamos ter a distância de 320 km. Pela tabela temos que o produto da velocidade pelo tempo é constante e a saber vale 320.*

$320.1 = 160.2 = 80.4 = 40.8 = 20.16 = 320$. *Como velocidade é dada em km / h e o tempo em horas, temos o produto* $\frac{km}{\cancel{h}}.\cancel{h} = km$, *isto é, multiplicando a grandeza velocidade pela grandeza tempo, vamos ter como resultado, distância.*

$$\boxed{\textit{Velocidade . Tempo = Distância}}$$

Então, como o produto entre velocidade e tempo é constante (distância fixa), dizemos que velocidade é inversamente proporcional ao tempo. Pela tabela temos que quando a velocidade aumenta o tempo vai diminuindo e além disso, temos que se dobrar o valor da velocidade o tempo se reduz à metade. Fazendo o gráfico velocidade $\times$ *tempo, temos.*



De modo geral , uma expressão como $w = k.\frac{a.b.c}{y.d}$.

Significa que w é diretamente proporcional ao produto $a.b.c$ e inversamente proporcional ao produto $y.d$.

Capítulo 4

Regra de Três

4.0.3 Regra de três simples

É um processo prático para resolver problemas que envolvam quatro valores dos quais conhecemos três deles. Devemos, portanto, determinar um valor a partir dos três já conhecidos.

Exemplo 4.1 *Bianca comprou 3 camisetas e pagou R$ 120,00. Quanto ela pagaria se comprasse 5 camisetas do mesmo tipo e preço?*

Solução: Se 3 camisas equivalem 120,00 é de se esperar que uma camisa custe $120/3 = 40$ e se assim for, temos que o número de camisas é diretamente proporcional ao seu custo, ou seja, agora vamos ver que o dispositivo prático chamado de regra de três na verdade é apenas uma consequência das definições de grandezas diretamente e inversamente proporcional. Logo, podemos fazer a seguinte associação.

3 camisas $\rightarrow 120,00 \Rightarrow 1$ camisa $\rightarrow 40,00$.

$$\div 3 \left(\begin{array}{c} \mathbf{3}\ \boldsymbol{Camisas} \to \mathbf{120,00} \\ \\ \mathbf{1}\ \boldsymbol{Camisa} \to \mathbf{40,00} \end{array} \right) \div 3$$

Logo, como 1 camisa corresponde a 40,00, então 5 camisas equivalem a $5.40 = 200,00$. Esse é um método simples e fácil de entender (método da redução à unidade), pois primeiro calculamos o valor unitário.

Vamos agora ao dispositivo prático (regra de três).

Camisas	**R$**
↑ 3	120 ↑
5	x

Veja que no dispositivo temos uma correspondência entre as grandezas e que usamos setas pra indicar se tais grandezas são inversamente ou diretamente proporcionais. Então vai ficar estabelicido que setas que tem o mesmo sentido indicarão grandezas diretamente proporcionais.

Logo, nesse exemplo, podemos montar a seguinte proporção.

$\frac{3}{5} = \frac{120}{x}$. Agora basta usar a propriedade fundamental das proporções (multiplicar em cruz) e teremos.

$$\frac{3}{5} = \frac{120}{x} \Rightarrow 3x = 5.120 \Rightarrow x = \frac{5.120}{3} = 5.40 = 200.$$

Exemplo 4.2 *Certa máquina produz 90 peças, trabalhando durante 50 minutos. Quantas peças produzirá em 1 h 20 min ?*

Solução: Vamos usar o dispositivo prático.

Peças	**Tempo**
90	50
x	80

Como o enunciado diz, 1 h 20 min, então no dispositivo devemos deixar tudo com a mesma unidade, então vamos colocar tudo em minutos, isto é, 1 h e 20 min = 60 min + 20 min = 80 min. Veja que para produzir o dobro de peças o tempo será o dobro, logo essas grandezas são diretamente proporcionais, como indica as setas do dispositivo, então temos.

$$\frac{90}{x} = \frac{50}{80} \Rightarrow \frac{90}{x} = \frac{5}{8} \Rightarrow 5x = 8.90 \Rightarrow x = \frac{8.90}{5} = 8.18 = 144.$$

Assim em 80 minutos serão produzidas 144 peças.

Exemplo 4.3 *Um carro, à velocidade de 60 km/h, faz certo percurso em 4 horas. Se a velocidade do carro fosse de 80 km/h, em quantas horas seria feito o mesmo percurso ?*

Solução:

km/h	**horas**
60	4
80	x

Como as grandezas velocidade e tempo são inversamente proporcionais, então representamos isso colocando setas com sentidos contrários. Logo, invertemos uma delas e ficamos com a proporção que segue.

$$\frac{60}{80} = \frac{x}{4} \Rightarrow 80x = 4.60 \Rightarrow x = \frac{4.60}{80} = \frac{4.6}{8} = 24/8 = 3.$$

Isto é, o carro vai gastar **3 horas** para percorrer a mesma distância à velocidade de 80 km/h.

Exemplo 4.4 *Uma torneira enche um tanque em 6 horas. Se forem utilizadas 3 torneiras, qual o tempo necessário para enche-lo?*

Solução:

Torneira	**Horas**
1	6
3	x

Logo, temos a seguinte proporção.

$\frac{3}{1} = \frac{6}{x} \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$, isto é, se utilizarmos 3 torneiras, tal tanque poderia ser abastecido em 2 horas.

4.0.4 Regra de três composta

Exemplo 4.5 *Em 6 dias de trabalho, 12 funcionários fazem 960 bolsas. Em quantos dias 8 funcionários poderão fazer 320 bolsas ?*

Solução: Como agora temos uma relação de correspondência com mais de duas grandezas, dizemos que se trata de uma regra de três composta. Vamos ao dispositivo prático.

Dias	**Pessoas**	**Bolsas**
6	12	960
x	8	320

Veja que no dispositivo nossa incógnita tá na grandeza dias, assim sendo, vamos fazer as comparações sempre usando tal grandeza.

1) Vamos as grandezas dias e pessoas, deixando fixa a grandeza bolsa, assim temos que quanto mais dias menos pessoas vão ser necessárias para fazer tais bolsas, logo dias e pessoas são inversamente proporcionais (setas com sentidos contrários).

2) Agora só falta determinar a seta pra grandeza bolsa, então analisando a grandeza dias e bolsas, deixando fixa a grandeza pessoas, temos que quanto mais dias, mais bolsas tais pessoas vão fazer, isto é, dias e bolsas são diretamente proporcionais.

Todas as setas devem ter o mesmo sentido, para fazer isso temos nesse caso, duas escolhas, ou invertemos dias e bolsas ou invertemos apenas pessoas, por exemplo invertemos apenas pessoas temos.

$$\frac{6}{x} = \frac{8}{12}.\frac{960}{320} \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{\cancel{8}^2}{\cancel{12}^3}.\frac{96}{32} \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{2}{\cancel{3}^1}.\frac{\cancel{96}^{32}}{32} \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{2}{1}.\frac{\cancel{32}}{\cancel{32}} \Rightarrow$$
$$\frac{6}{x} = \frac{2}{1} \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 6/2 = 3.$$

Uma outra maneira de resolver, é usando as definições do capítulo 3, vamos conhecer tal solução.

Do capítulo 3, temos que o número de **d**ias é diretamente proporcional ao número de **b**olsas e inversamente proporcional ao número de **p**essoas.

A expressão geral que segue mostra tal relação.

$d = \frac{k.b}{p}$, primeiro passo é determinar o valor da constante k, basta substituir os valores da primeira linha na expressão e teremos.

$6 = \frac{k.960}{12} \Rightarrow k = \frac{6.12}{960} = \frac{3}{40}$.

Usando agora o valor de k que determinamos, temos.

$d = k.\frac{b}{p} \Rightarrow d = \frac{3}{40}.\frac{320}{8} = 3$.

Logo, em **3 dias**, 8 funcionários poderão fazer 320 bolsas.

Capítulo 5

Porcentagem

Resolver questões de porcentagem é basicamente aplicar o que já estudamos (equacionar o problema, resolver um sistema ou montar uma regra de três).

Exemplo 5.1 *Uma escola tem 25 professores, dos quais 24 % ensinam Matemática. Quantos professores ensinam Matemática nessa escola?*

Solução: A questão se resume em calcular 24 % de 25, bem já sabemos que $x\ \% = \dfrac{x}{100}$, logo, para calcular 24 % de 25, basta fazer.

$\dfrac{24}{100}.25 = \dfrac{600}{100} = 6$, isto é, 6 professores ensinam matemática.

Visite e Saiba Mais: www.universodalogica.blogspot.com

Exemplo 5.2 *Supondo que um objeto custe R$ 75,00 e é vendido por R$ 100,00. Determine.*

a) a porcentagem de lucro em relação ao preço de custo;

b) a porcentagem de lucro em relação ao preço de venda.

Solução: Temos que $L = V - C$, isto é, a diferença entre a venda e o custo, onde logicamente o valor da venda deve ser superior, se for inferior, então teremos um prejuízo.

Logo, $L = 100 - 75 = 25,00$. Agora que sabemos que o lucro é de 25,00, podemos calcular as taxas.

a) $\dfrac{25}{75} \approx 0,33 = 33\%$.

b) $\dfrac{25}{100} = 25\%$.

Exemplo 5.3 *(**PUC-SP**) O preço de venda de um bem de consumo é R$ 100,00. O comerciante tem um ganho de 25 % sobre o preço de custo deste bem. O valor do preço de custo é:*

A) R$ 25,00

B) R$ 70,50

C) R$ 75,00

D) R$ 80,00

E) R$ 125,00

Solução: $l = v - c \Leftrightarrow v = l + c$.

Pelo enunciado, temos que $l = \dfrac{25}{100}.c = 0,25c$.

Por outro lado temos que $l = 100 - c$, fazendo a comparação temos que $0,25c = 100 - c \Rightarrow 0,25c + c = 100 \Rightarrow 1,25c = 100 \Rightarrow c = \dfrac{100}{1,25} = 80$, isto é, letra D).

Exemplo 5.4 *Uma mercadoria que custava R$ 450,00 reais sofreu um reajuste de 15 % de acordo com a inflação do período. Qual é o seu preço atual?*

Solução: Vamos calcular o aumento de 15 % em relação a 450,00.

$\dfrac{15}{100}.450 = 67,50.$

Isto é, os 15 % de aumento corresponde a 67,50, então queremos aumentar 67,50 em relação aos 450,00 (inicial), então temos que o valor final (desejado) é $450 + 67,50 = 517,50$. Mas também podemos utilizar uma forma mais direta de cálculo.

Temos que o valor inicial corresponde a 100 % e em cima de tal valor vai ter um aumento de 15 %, então o valor final vai ser $100\% + 15\% = 115\%$ em cima do inicial, ou seja, calculando 115 % de 450,00 chegamos ao resultado desejado 517,50.

$\dfrac{115}{100}.450 = 517,50.$

Exemplo 5.5 *Uma loja de eletrodomésticos está oferecendo um desconto de 14 % nas compras feitas com pagamento à vista. Qual o valor de uma geladeira de R$ 1 200,00 na promoção oferecida?*

Solução: Comprando a geladeira à vista vamos ter um desconto de 14 % em cima do valor inicial (1 200). Calculando 14 % de 1 200,00, temos.

$\frac{14}{100}.1200 = 14.12 = 168,00$, isto é, pagando à vista vamos ter um abatimento de 168,00, logo, pagaremos $1\ 200 - 168 = 1\ 032,00$. Uma outra opção de cálculo era usar uma ideia análoga a usada no exemplo anterior, isto é, se o valor inicial correponde a 100 %, então dando um desconto de 14 % em cima do inicial, temos $100 - 14 = 86$, logo pra chegar ao valor desejado bastava calcular 86 % do valor inicial, ou seja, 86 % de 1 200,00.

$\frac{86}{100}.1\ 200 = 86.12 = 1\ 032,00.$

Logo, o valor da geladeira à vista é 1 032,00.

Exemplo 5.6 *Certa mercadoria, que custava R$ 24,00, passou a custar R$ 30,00. Calcule a taxa percentual do aumento.*

Solução: Temos que o aumento corresponde a diferença $30 - 24 = 6$, bem em questões desse tipo, ficará subentendido que a taxa é em relação ao valor inicial, que nesse caso é 24,00. Logo, temos que a taxa é dada por $\frac{6}{24} = 0,25 = 25\%$.

Exemplo 5.7 *Se um produto aumentou em 25 %, de quanto por cento ele deve diminuir para voltar ao preço antigo?*

Solução: Bem algumas questões podem ser resolvidas atribuindo valores, **atribuir valores é sempre bom**, ajudar a entender o que tá se passando. Bem nesse caso como é uma questão envolvendo porcentagem, vamos atribuir o valor 100, isto é, o preço inicial (suposição) do produto é 100,00.

$$\mathbf{100{,}00} \xrightarrow{+\ 25\%} \mathbf{125{,}00}$$

Então, para retornar ao preço antigo, ele deve sofrer um desconto de 25,00 em relação a 125,00 isto é, $25/125 = 0,2 = 20\%$.

De fato, 20 % de 125 corresponde a 25 e com isso teremos 125 - 25 = 100 (valor inicial).

Solução 2: Seja P o preço antigo e i a taxa percentual de desconto, então temos que $P.(1,25).(1-i) = P$, dividindo ambos os membros por P, temos $1,25.(1-i) = 1$.

Assim, $1-i = \dfrac{1}{1,25} = 0,8 \Rightarrow i = 1-0,8 = 0,2 = 20\%$.

Exemplo 5.8 *Qual o preço da mercadoria que custa R\$100,00 após dois descontos sucessivos, de 30 % e de 20 %.*

Solução:

Preço final $= 100.(1-0,3).(1-0,2) = 100.(0,7).(0,8) = 100.(0,56) = 56$.

Logo, o preço final é R\$56,00. Observe que a taxa total de desconto ficou sendo de 44 %, pois $100-44 = 56$ e não 50 %.

Exemplo 5.9 *Um produto recebeu um aumento de 10 %. Em seguida, sofreu outro aumento de 20 %. Sabendo que o produto passou a custar R\$ 66,00. Determine seu preço inicial.*

Solução:

Seja p seu preço inicial, então temos $p.(1+0,1).(1+0,2) = 66 \Leftrightarrow p.(1,1).(1,2) = 66 \Leftrightarrow p.(1,32) = 66 \Rightarrow p = \dfrac{66}{1,32} = 50$.

Exemplo 5.10 *Depois de um aumento de 20 %, uma bolsa passou a custar R\$ 38,40. Qual era o preço da bolsa antes do aumento?*

Solução 1:

Seja p o preço inicial (desejado), então $p.(1+0,2) = 38,4 \Rightarrow$ $p.(1,2) = 38,4 \Rightarrow p = \dfrac{38,4}{1,2} = \dfrac{384}{12} = 32,00.$

Solução 2: Podemos montar a seguinte regra de três.

%	R$
120	38,4
100	x

$$\frac{120}{100} = \frac{38,4}{x} \Leftrightarrow \frac{12}{10} = \frac{38,4}{x} \Rightarrow 12x = 10.(38,4) \Rightarrow$$

$$12x = 384 \Rightarrow x = \frac{384}{12} = 32,00.$$

Exemplo 5.11 *A porcentagem de fumantes de uma cidade é 32 %. Se 3 em cada 11 fumantes deixarem de fumar, o número de fumantes ficará reduzido a 12 800. Calcule:*

a) O número de fumantes da cidade.

b) O número de habitantes da cidade.

Solução:

a) Se $\dfrac{3}{11}$ param de fumar, então $\dfrac{8}{11}$ continuam fumando.

Logo, $\dfrac{8}{11}.f = 12\,800$, onde f é o número total de fumantes.

$$\frac{8}{11}.f = 12\,800 \Rightarrow 8.f = 11.12\,800 \Rightarrow$$

$$f = \frac{11.12\,800}{8} = 11.1\,600 \Rightarrow f = 17\,600$$