

RONNY
KRAUSE



RECHNEN BIS DER INGENIEUR KOMMT



RECHNEN BIS DER INGENIEUR KOMMT

Exposee

Rechnen Sie doch mal nur und verfolgen Sie eine Reihe spannender Wege zur Lösung von mathematischen Sachverhalten.

Ronny Krause

ronny-kelkheim@t-online.de

Rechnen bis der Ingenieur kommt

Inhalt

1. Einleitung	2
2. Basics	2
3. Kurvendiskussionen und Eigenschaften von Funktionen	11
4. Bearbeitung von Funktionen.....	19
5. Impressum	29

1. Einleitung

Dieses Buch ist für Studenten und Abiturienten, die einfach mal nur rechnen wollen. Ich verwende keine Definitionen oder Gesetzestexte zur Erklärung. Es geht um das Rechnen.

2. Basics

2.1. Gleichungen und Gleichungssysteme

Terme die mit Gleichheitszeichen verbunden sind, heißen Gleichungen. Zwei oder mehr Gleichungen in einem mathematischen Zusammenhang heißen Gleichungssysteme.

Letzteres lässt sich durch Einsetzungs-, Additions- oder Gleichsetzungsverfahren lösen. Ein Gleichungssystem mit n Variablen benötigt n Gleichungen, um bestimmbar zu sein. Bei größer n Gleichungen spricht man von „über Bestimmtheit“ der Systeme.

2.2. Rechnen mit Vektoren

Addition, Subtraktion und Multiplikation von Vektoren sind möglich. Die Multiplikation hat sogar zwei Möglichkeiten, das Skalarprodukt oder das Kreuzprodukt. Ein Beispiel verdeutlicht das Lösungsprinzip – siehe Kapitel 2.6.

2.3. Ableitungen von Funktionen

Die Tangentensteigungen von jedem Punkt einer Funktion nennt man auch die Ableitung. Die Ableitung selbst stellt wieder eine Funktion dar.

2.4. Integrieren von Funktionen

Die Umkehrung der Ableitungsfunktion zur Stammfunktion (Ausgangsfunktion) bildet das Integrieren.

2.5. Komplexe Zahlen

Die komplexen Zahlen bestehen aus dem imaginären Teil und dem reellen Teil. Der imaginäre Teil mit i , für die Wurzel aus minus eins, stellt dar, was quadratische Gleichungen mit negativen Radizierenden lösen lässt.

2.6. Beispiele zum Thema Basics

Aufgabe 1: Lösen eines Gleichungssystems mit dem Einsetzungsverfahren

$$\begin{array}{l} 1) \text{ I } 3x + 2y = 5 \\ \text{II} \quad -3x = 6 - 2y \quad | :(-3) \\ \hline \text{II}' \quad x = -2 + \frac{2}{3}y \quad \text{in I einsetzen} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I}' \quad 3(-2 + \frac{2}{3}y) + 2y = 5 \\ \quad -6 + 2y + 2y = 5 \quad | +6 \\ \quad \quad 4y = 11 \quad | :4 \\ \quad \quad \quad y = \underline{\underline{2,75}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y \text{ in II}' \text{ einsetzen: } x = -2 + \frac{2}{3} \cdot 2,75 \\ \quad \quad \quad x = -\frac{1}{6} = \underline{\underline{-0,1\bar{6}}} \end{array}$$

$$\underline{\underline{L = \{-0,1\bar{6}; 2,75\}}}$$

Aufgabe 2: Lösen eines Gleichungssystems mit dem Additionsverfahren

$$\begin{array}{rcl} 2) & \text{I} & 3x - 7y = 51 \\ & \text{II} & -3x + 2y = 37 \end{array} \quad | +$$

$$-5y = 88 \quad | :(-5)$$

$$y = \underline{\underline{-17,6}}$$

$$y \text{ in I einsetzen: } 3x - 7 \cdot (-17,6) = 51$$

$$3x + 123,2 = 51 \quad | -123,2$$

$$3x = -72,2 \quad | :3$$

$$x = \underline{\underline{-24,06}}$$

$$\underline{\underline{L = \{-24,06; -17,6\}}}$$

Aufgabe 3: Lösen eines Gleichungssystems mit dem Gleichsetzungsverfahren

$$3) \text{ I } 3x = 7$$

$$\text{II } 7x + y + z = 0 \quad | -7x$$

$$\text{III } y + z = 7$$

$$\text{II}' \quad y + z = -7x$$

$$\text{II und III gleichsetzen: } 7 = -7x \quad | :(-7)$$

$$x = -1$$

$$x \text{ in I einsetzen: } 3 \cdot (-1) = 7$$

$$-3 = 7$$

falsche Aussage

$\hookrightarrow$ keine Lösung

Aufgabe 4: lineare Unabhängigkeit von drei Vektoren

$$4) \quad c_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I} & -c_1 + 3c_2 + 2c_3 & = 0 \\ \text{II} & 2c_2 - 4c_3 & = 0 \quad | -2c_2 \\ \text{III} & c_1 + c_2 + 3c_3 & = 0 \\ \hline \text{II}' & -4c_3 & = -2c_2 \quad | :(-4) \\ & c_3 & = \frac{c_2}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} c_3 \text{ in I: } & -c_1 + 3c_2 + 2 \cdot \frac{c_2}{2} & = 0 \\ & -c_1 + 4c_2 & = 0 \quad | +c_1 \\ & 4c_2 & = c_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} c_1 \text{ und } c_3 \text{ in III: } & 4c_2 + c_2 + 3 \cdot \frac{c_2}{2} & = 0 \\ & 6,5c_2 & = 0 \quad | :6,5 \\ & c_2 & = 0 \end{array}$$

$$\hookrightarrow c_1 = 0; c_2 = 0; c_3 = 0 \Rightarrow \text{Vektoren sind linear unabhängig}$$

Aufgabe 5: Addition von Vektoren

$$5) \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

Aufgabe 6: Skalarprodukt von Vektoren

$$6) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 = \underline{\underline{-9}}$$

Aufgabe 7: Kreuzprodukt von Vektoren

$$7) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 - (-1) \cdot 4 \\ (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 9 \\ -13 \\ 5 \end{pmatrix}}}$$

Aufgabe 8: Ableiten einer Polynomfunktion

$$\begin{aligned} 8) \quad & 3x^6 + 7x^5 - 4x^4 + 3x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 7 = f(x) \\ & 18x^5 + 35x^4 - 16x^3 + 9x^2 - x - 1 = f'(x) \\ & 90x^4 + 140x^3 - 48x^2 + 18x - 1 = f''(x) \end{aligned}$$