PSI
PSI*

Walter Damin
Michel Goumi
Ivan Gozard
Bertrand Hauchecorne
Olivier Leuck

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHS

5e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés

ellipses

Mathématiques
PSI/PSI*

PRÉPAS SCIENCES

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Mathématiques PSI/PSI*

5e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES

ouvrage coordonné par

Walter DAMIN

Professeur au lycée Pierre-Paul Riquet (Saint-Orens-de-Gameville)

Michel GOUMI

Professeur au lycée E. Perrier (Tulle)

Ivan GOZARD

Professeur au lycée Carnot (Dijon)

Bertrand HAUCHECORNE

Professeur au lycée Pothier (Orléans)

Olivier LEUCK

Professeur au lycée R. Follereau (Belfort)

ellipses

COLLECTION
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

Les notices culturelles « Un mathématicien » et « Un peu d'histoire » des pages de titre des chapitres ont été rédigées par Bertrand Hauchecorne.

Les macros de cet ouvrage ont été réalisées par Nicolas Nguyen en LaTeX.

ISBN 9782340-066809
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en physique-chimie comme en mathématiques ou sciences industrielles.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthodes » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre. Dans cet ouvrage, un certain nombre de méthodes sont consacrées à l'**utilisation de l'outil Python** soit pour illustrer une problématique mathématique au programme, soit pour pouvoir démarrer des exercices de mathématiques où on utilise cet outil. Les derniers exercices de la plupart des chapitres de cet ouvrage sont justement dédiés à cette utilisation de Python. Ce sont des exercices inspirés de ceux posés aux oraux en filière PSI.

La partie « vrai/faux » permet de tester votre recul par rapport au programme et de vous révéler les mauvais réflexes à rectifier. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi l'ouvrage de maths comme ceux de physique, de chimie et de SII vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers **la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

1. Espaces vectoriels et applications linéaires 1
2. Calcul matriciel 59
3. Déterminants 109
4. Réduction des endomorphismes 135
5. Espaces préhilbertiens réels et euclidiens 197
6. Endomorphismes d'un espace euclidien 241
7. Espaces vectoriels normés 299
8. Séries numériques 359
9. Suites et séries de fonctions 415
10. Séries entières 453
11. Intégration sur un intervalle 493
12. Interversion de limites et d'intégrales – Intégrales à paramètres . 533
13. Dérivabilité des fonctions vectorielles 579
14. Équations différentielles linéaires 603
15. Fonctions de plusieurs variables 643
16. Variables aléatoires discrètes 687

Index 757

Chapitre 1

Espaces vectoriels et applications linéaires

UN MATHÉMATICIEN



Très jeune, **Giuseppe Peano** (1858-1932) a compris l'importance de la nouvelle approche des mathématiques que permettait la théorie des ensembles à peine naissante. Déchiffrant l'ouvrage plutôt obscur d'Hermann Grassmann dans lequel sont introduits les espaces vectoriels, il bâtit une axiomatique claire encore utilisée de nos jours. Il introduit les applications linéaires et montre que cette théorie ne se limite pas à la dimension finie en donnant l'exemple des polynômes.

Un peu d'histoire

À tout nombre réel a, on peut faire correspondre une application toute simple, celle qui à un réel x fait correspondre ax soit la multiplication d'un nombre par un scalaire. Tout segment est alors transformé en un segment dont la longueur est multipliée par a. La variable x est au premier degré, elle n'est pas affectée d'une puissance.

Les applications linéaires en sont la généralisation aux dimensions supérieures ; l'expression des images est une expression de degré un des coordonnées et elles conservent l'origine.

Le maniement de ce type d'applications s'est particulièrement développé au XVIII^{e} siècle en particulier pour résoudre des systèmes linéaires, avec Gabriel Cramer, Étienne Bézout, Alexandre Vandermonde mais leur introduction formelle est l'œuvre de Peano.

Objectifs

les incontournables

- Revoir les notions élémentaires concernant les espaces vectoriels : famille libre, famille génératrice, base, dimension finie.
- Approfondir les notions de somme et de somme directe de sous-espaces vectoriels à plus de deux sous-espaces vectoriels. En particulier, savoir décomposer en somme directe par partition d'une base.
- Savoir manipuler les projecteurs et connaître parfaitement leur lien avec une somme directe finie de sous-espaces vectoriels.
- Savoir déterminer le rang, l'image et le noyau d'une application linéaire (par une base ou un système d'équations).
- Savoir ce qu'est un sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, savoir manipuler un endomorphisme induit sur un tel sous-espace vectoriel.
- Savoir que si deux endomorphismes commutent alors le noyau et l'image de chacun sont stables par l'autre.
- Savoir exprimer un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans la base d'interpolation de Lagrange et faire le lien avec le problème d'interpolation de Lagrange
- Faire le lien entre hyperplan et noyau d'une forme linéaire non nulle.

et plus si affinités

- Savoir démontrer qu'une famille infinie est libre.
- Savoir inverser ou calculer les puissances successives d'un endomorphisme grâce à un polynôme annulateur.
- Savoir démarrer un exercice sur les endomorphismes nilpotents. ($f \in \mathcal{L}(E)$ avec $f^n = 0$.)

Résumé de cours

Ce chapitre 1 rappelle les notions et les propriétés des espaces vectoriels et des applications linéaires vues en MPSI ou en PCSI. Nous y avons ajouté les quelques compléments en PSI. Il serait d'ailleurs intéressant pour le lecteur de revoir un peu son cours de première année avant d'entamer l'année scolaire de PSI.

$\mathbb{K}$ désigne indifféremment l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Familles libres, familles génératrices, bases

Définition : Combinaison linéaire —. *On appelle combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs $\vec{u}_1$, ..., $\vec{u}_p$ de E toute somme $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{u}_i$, où $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont des scalaires (c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{K}$), appelés coefficients de la combinaison linéaire.*

Proposition 1.1.— L'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille finie $X = (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p)$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé **sous-espace vectoriel engendré** par X et noté $\mathsf{Vect}\,(X)$.

Définition : Famille libre, famille liée —. ▸ *$(\vec{u}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, famille **finie** de vecteurs de E, est **libre** (on dit aussi que ces vecteurs sont indépendants) si pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ appartenant à $\mathbb{K}^n$, on a l'implication suivante :*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = 0_E \Rightarrow \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = 0.$$

▸ *On peut étendre à $(\vec{u}_i)_{i\in I}$, famille de vecteurs de E de cardinal quelconque.*
*Elle est **libre** si toutes ses sous-familles finies sont libres.*
▸ *Si une famille n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée**.*

Remarques : ▸ Toute famille contenue dans une famille libre est libre.
▸ Toute famille contenant une famille liée est liée. (Contraposition de l'implication précédente.)
En particulier, toute famille contenant le vecteur nul est liée.
▸ Une famille de deux vecteurs est liée si, et seulement si, ces deux vecteurs sont colinéaires.

Proposition 1.2.— Famille liée et combinaison linéaire —. On suppose I fini. Une famille $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est liée si, et seulement si, l'un au moins des $\vec{u}_i$ est combinaison linéaire des autres.

Définition : Famille génératrice —. *Une famille X de E est une **famille génératrice de l'espace vectoriel** E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire finie de vecteurs de E. Dans le cas où X est une famille finie, on a alors :* $\mathsf{Vect}\, X = E$.

Définition : Base —. *Une famille de vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une **base** de E si elle est une famille libre et génératrice.*

Exemples : ▸ $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. $(X^i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est la base **canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$.
▸ $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est la base **canonique** de $\mathbb{R}^3$.

■ Dimension

Définition : Espace vectoriel de dimension finie —. *Un espace vectoriel est* ***de dimension finie*** *s'il admet une famille génératrice finie.*

Proposition 1.3.— Théorème d'existence d'une base et de la base incomplète —.
- Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie admet une base finie.
- On peut extraire de toute famille génératrice finie de E une base de E.
- Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Lemme 1.4.— Dans un espace vectoriel de dimension finie, une famille libre ne peut avoir plus d'éléments qu'une famille génératrice.

Théorème 1.5.— Théorème de la dimension —.
Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre d'éléments, appelé ***dimension de*** E et noté $\dim E$.
Par convention, la dimension de $\{0_E\}$ est 0.

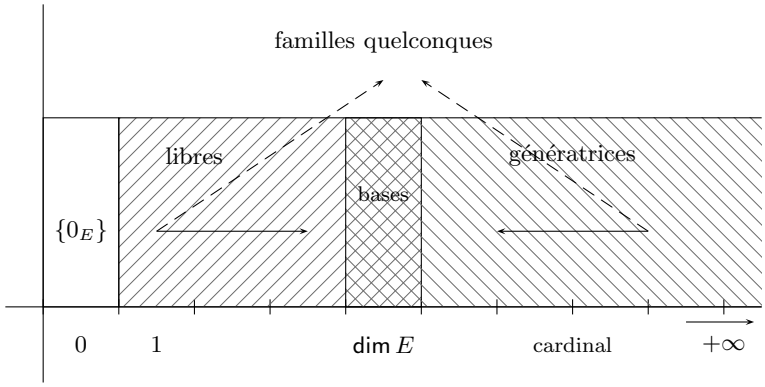


Illustration du théorème de la dimension, et de la proposition suivante

Proposition 1.6.— En ajoutant un élément $\vec{x}$ à une famille libre L, on obtient une famille libre si $\vec{x} \notin \mathsf{Vect}\,(L)$, et une famille liée si $\vec{x} \in \mathsf{Vect}\,(L)$.
En enlevant un élément $\vec{x}$ à une famille génératrice G, on obtient une famille non génératrice si $\vec{x} \notin \mathsf{Vect}\,(G \setminus \{\vec{x}\})$ et une famille génératrice si $\vec{x} \in \mathsf{Vect}\,(G \setminus \{\vec{x}\})$.

Proposition 1.7.— Si $\dim E = n$ et si $\mathcal{B}$ est une famille de n vecteurs de E, alors il y a équivalence entre :
(1) $\mathcal{B}$ est une base de E (2) $\mathcal{B}$ est une famille libre (3) $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E.

Proposition 1.8.— Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel de dimension finie E est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus, si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

Définition : Base adaptée à un sous-espace vectoriel —. *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, une base de E est* ***adaptée à*** *F lorsque ses p premiers vecteurs forment une base de F.*

Proposition 1.9.— Coordonnées d'un vecteur dans une base —. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n)$ une base de E. Pour tout vecteur $\vec{x}$ de E, il existe un n-uplet unique $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ tel que :

$$\boxed{\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \vec{e}_i.}$$

$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est le ***n-uplet des coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.***

Exemple : Les coordonnées d'un polynôme de degré inférieur ou égal à n dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ sont ses coefficients.

Définition : Rang d'une famille de vecteurs —. *Le* ***rang d'une famille finie de vecteurs*** *est la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre.*

Notation : *Le rang de la famille $\mathcal{F}$ est noté* $\mathsf{Rg}\,(\mathcal{F})$.

■ Interpolation de Lagrange

Soit $n+1$ couples $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ de $\mathbb{R}^2$ et on suppose que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, les réels x_i sont **tous distincts**. Il s'agit de construire un polynôme P de degré au plus n tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on ait l'égalité : $P(x_i) = y_i$.

Définition : *On appelle* **polynômes interpolateurs de Lagrange** *associés à la famille $(x_0, x_1, ..., x_n)$ les $n+1$ polynômes définis pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ par :*

$$l_i = \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}.$$

Proposition 1.10.— Propriétés des polynômes interpolateurs de Lagrange

- Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, l_i est de degré n.
- Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ et pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $l_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = i \\ 0 & \text{si} \quad j \neq i \end{cases}$
- La famille $(l_0, l_1, ..., l_n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$ et en est donc une base.

On l'appelle **base d'interpolation de Lagrange** associée à $(x_0, x_1, ..., x_n)$.

Comme $(l_0, ...l_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, tout polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ s'exprime dans cette base et on a en particulier le résultat suivant.

Proposition 1.11.— Il existe un seul polynôme de degré au plus n (donc dans $\mathbb{K}_n[X]$) qui vérifie pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$. C'est le polynôme $P = \sum_{j=0}^{n} y_j l_j$.

En particulier, $1 = \sum_{j=0}^{n} l_j$ et $X = \sum_{j=0}^{n} x_j l_j$.

■ Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels

Soit $n \geqslant 2$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit E_i, espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
Alors $E_1 \times ... \times E_n = \{(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n), \forall\, i \in [\![1, n]\!], \vec{u}_i \in E_i\}$ est appelé le produit de ces espaces vectoriels et est lui-même un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On définit :

$$\text{la somme : } (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n) + (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = (\vec{u}_1 + \vec{v}_1, ..., \vec{u}_n + \vec{v}_n),$$

$$\text{le produit par } \lambda \in \mathbb{K} : \lambda.(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n) = (\lambda\vec{u}_1, ..., \lambda\vec{u}_n).$$

Proposition 1.12.— Dans le cas où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, E_i est de dimension finie alors :

$$\boxed{\dim\,(E_1 \times ... \times E_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i.}$$

■ Somme et somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels

Définition : Somme —. *Soit $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E,* ***la somme de ces sous-espaces vectoriels*** *est le sous-espace vectoriel, noté $\sum_{i=1}^{n} E_i$, engendré par la réunion des E_i :*

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} E_i = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right).}$$

L'appellation « somme de sous-espaces vectoriels » est justifiée par la caractérisation suivante.

Proposition 1.13.— $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est l'ensemble des sommes de vecteurs des E_i, autrement dit :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} E_i = \left\{\sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i,\ \text{où, } \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \vec{u}_i \in E_i\right\}.}$$

Définition : Somme directe —. ***La somme des sous-espaces vectoriels de la famille*** $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ ***est directe*** *si :*

$$\boxed{\forall\,(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n,\ \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i = 0_E \Rightarrow \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \vec{u}_i = 0_E\right).}$$

Dans ce cas, on note la somme de ces sous-espaces vectoriels : $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Proposition 1.14.— Caractérisation d'une somme directe —. La somme des sous-espaces vectoriels de la famille $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est directe si, et seulement si, tout $\vec{u}$ de $\sum_{i=1}^{n} E_i$ se décompose **de manière unique** sous la forme : $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i$, où $(\vec{u}_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.

Définition : Décomposition en somme directe de E —.
Les sous-espaces vectoriels $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de E constituent une ***décomposition en somme directe de*** *E si leur somme est directe et égale à E, autrement dit, lorsque : $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.*

Proposition 1.15.— $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ constituent une décomposition en somme directe de E si, et seulement si,

$$\forall\, \vec{u} \in E,\ \exists !\, (\vec{u}_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \text{ tel que } \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i.$$

Définition : Sous-espaces vectoriels supplémentaires de E —.
On dit que les deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E sont **supplémentaires** *dans E s'ils constituent une décomposition en somme directe de E, c'est-à-dire $E = E_1 \oplus E_2$.*

On dit alors aussi que E_1 (respectivement E_2) est un supplémentaire de E_2 (respectivement E_1) dans E.

Remarque : Attention, on notera que l'on évitera d'utiliser le terme de sous-espaces vectoriels supplémentaires dans le cas d'une somme directe d'au moins trois sous-espaces vectoriels égale à l'espace vectoriel E.

Proposition 1.16.— Existence d'un supplémentaire —. Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admet un supplémentaire (qui n'est pas unique).

Théorème-Définition 1.17.— Base adaptée à une décomposition en somme directe —.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E, de bases respectives $\mathcal{B}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Si la somme des $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est directe, alors $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_n)$ est une base de $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Si les E_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ forment une décomposition en somme directe de E, alors $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_n)$ est une base de E dite **base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.**

Commentaire : Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.

Considérons une base $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ de E, espace vectoriel de dimension n et si $i_1, ..., i_p$ sont p entiers compris entre 1 et n, posons $E_1 = \text{Vect}\,(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_{i_1})$, $E_2 = \text{Vect}\,(\vec{e}_{i_1+1}, ..., \vec{e}_{i_2})$, etc. jusqu'à $E_p = \text{Vect}\,\left(\vec{e}_{i_p}, ..., \vec{e}_n\right)$, alors $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ est une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

On dit que l'on a décomposé E en somme directe par partition de la base $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$.

Corollaire 1.18.— Caractérisation d'une somme directe par les dimensions —.
Les $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ étant des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E :

$$\boxed{\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim E_i}.$$

Et l'on a l'égalité si, et seulement si, la somme est directe.

Corollaire 1.19.— Décomposition en somme directe de E en dimension finie —.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$;

(ii) les $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont en somme directe et $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$;

(iii) $E = \sum_{i=1}^{n} E_i$ et $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$.

Corollaire 1.20.— Dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels —.
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie E :

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G).}$$

■ Applications linéaires

Définition : *Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une application $\phi : E \to F$ est dite* **linéaire** *si pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E et pour tout scalaire $a \in \mathbb{K}$,*

$$\phi(a\vec{u} + \vec{v}) = a\phi(\vec{u}) + \phi(\vec{v}).$$

Lorsque $E = F$, on dit que ϕ est un **endomorphisme**. *Une application linéaire qui est une bijection est un* **isomorphisme**. *Un endomorphisme bijectif est un* **automorphisme**.

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F. C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Dans le cas $E = F$, on note $\mathcal{L}(E)$ cet ensemble.

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ alors $g\,o\,f \in \mathcal{L}(E,G)$.
Si f est un isomorphisme de E dans F alors f^{-1} est un isomorphisme de F vers E.
L'ensemble des automorphismes de E est appelé le **groupe linéaire**. On le note $\mathrm{GL}(E)$.

Proposition 1.21.— Détermination d'une application linéaire en dimension finie —.
Étant donné deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_p)$ de E et une famille $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p)$ de vecteurs de F, il existe une application linéaire ϕ, et une seule, de E dans F, telle que :

$$\forall\, i \in [\![1,p]\!],\ \phi(\vec{e}_i) = \vec{f}_i.$$

Définition : Espaces vectoriels isomorphes —. *Deux espaces vectoriels sont* ***isomorphes*** *s'il existe un isomorphisme de l'un dans l'autre.*

Proposition 1.22.— L'image d'une base (respectivement d'une famille libre) par un isomorphisme est une base (respectivement une famille libre).

Proposition 1.23.— Conservation du rang par un isomorphisme —. L'image par un isomorphisme d'une famille de vecteurs est une famille de vecteurs de même rang.

Remarque : Une base de E étant choisie, l'application associant à un vecteur le n-uplet de $\mathbb{K}^n$ de ses coordonnées dans cette base est un isomorphisme ; en conséquence, le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de la famille des n-uplets de ses coordonnées dans $\mathbb{K}^n$.

Proposition 1.24.— Deux espaces vectoriels E et F (sur le même ensemble $\mathbb{K}$) de dimensions finies sont isomorphes si, et seulement si, leurs dimensions sont égales.

Conséquence : Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Théorème-Définition 1.25.— Noyau d'une application linéaire —. ϕ étant une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, l'ensemble $\{\vec{x} \in E,\ \phi(\vec{x}) = 0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé ***noyau de*** ϕ et noté $\mathsf{Ker}\,\phi$.

Théorème-Définition 1.26.— Image d'une application linéaire —. ϕ étant une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, l'ensemble $\{\phi(\vec{x}),\ \vec{x} \in E\}$ est un sous-espace vectoriel de F appelé ***image*** de ϕ et noté $\mathsf{Im}\,\phi$.

Définition : Rang d'une application linéaire —. *Dans le cas où* $\mathsf{Im}\,\phi$ *est de dimension finie, le* ***rang de l'application linéaire*** ϕ *est la dimension de son image, c'est-à-dire* $\dim \mathsf{Im}\,\phi$.

Proposition 1.27.— E étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base et ϕ étant une application linéaire de E dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F :

$$\boxed{\mathsf{Im}\,\phi = \mathsf{Vect}\ (\phi(e_i))_{i\in[\![1,n]\!]} \text{ et } \mathsf{Rg}\,\phi = \mathsf{Rg}\ (\phi(e_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\,.}$$

Proposition 1.28.— Soit $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$, si S est un supplémentaire quelconque de $\mathsf{Ker}\,\phi$ dans E, alors ϕ induit un isomorphisme de S sur $\mathsf{Im}\,\phi$.

Remarque : Ce résultat ne nécessite pas que E soit de dimension finie, mais seulement que $\mathsf{Ker}\,\phi$ admette un supplémentaire.

Proposition 1.29.— Théorème du rang —. ϕ étant une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F, l'espace vectoriel E étant de dimension finie alors :

$$\boxed{\dim \mathsf{Im}\,\phi + \dim \mathsf{Ker}\,\phi = \dim E.}$$

Corollaire 1.30.— ϕ étant une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions finies E et F, ϕ est un isomorphisme de E dans F si, et seulement si, $\mathsf{Rg}\,\phi = \dim E = \dim F$.

Corollaire 1.31.— Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et ϕ un élément de $\mathcal{L}(E,F)$, lorsque : $\dim E = \dim F$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) ϕ est bijective (2) ϕ est injective (3) ϕ est surjective

Corollaire 1.32.— Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions finies, $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\psi \in \mathcal{L}(F,G)$:
▸ si ϕ est un isomorphisme, alors $\mathrm{Rg}\,(\psi \circ \phi) = \mathrm{Rg}\,\psi$;
▸ si ψ est un isomorphisme, alors $\mathrm{Rg}\,(\psi \circ \phi) = \mathrm{Rg}\,\phi$.
Autrement dit, on ne change pas le rang d'une application linéaire si on la compose par un isomorphisme.

■ Sous-espaces stables

Définition : Sous-espaces stables par un endomorphisme —. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et $\phi \in \mathcal{L}(E)$; on dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est **stable** par ϕ lorsque $\phi(F) \subset F$.*

En particulier, E et $\{0_E\}$ sont stables par tout endomorphisme de E.

Proposition 1.33.— Soit ϕ et ψ deux endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ qui vérifient : $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$. (On dit que ϕ et ψ *commutent*.)
Alors $\mathrm{Im}\,\phi$ et $\mathrm{Ker}\,\phi$ (respectivement $\mathrm{Im}\,\psi$ et $\mathrm{Ker}\,\psi$) sont stables par ψ (respectivement par ϕ).

Définition : *Soit F un sous-espace de E stable par $\phi \in \mathcal{L}(E)$, alors $\hat{\phi} : \begin{array}{ccc} F & \longmapsto & F \\ \vec{u} & \longrightarrow & \phi(\vec{u}) = \hat{\phi}(\vec{u}) \end{array}$ définit un endomorphisme de F, dit **endomorphisme de F induit par ϕ**.*

■ Polynômes d'endomorphismes

Définition : *Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et ϕ un endomorphisme de l'espace vectoriel E.*
On pose $\phi^0 = \mathrm{Id}_E$, puis, par récurrence, pour tout entier naturel n, $\phi^{n+1} = \phi^n \circ \phi$.
L'endomorphisme $P(\phi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi^k$ est le polynôme de l'endomorphisme ϕ associé à P.

Proposition 1.34.— Le noyau de $P(\phi)$ est stable par ϕ.

Proposition 1.35.— ▸ $\forall \phi \in \mathcal{L}(E)$, $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $(P + \lambda Q)(\phi) = P(\phi) + \lambda Q(\phi)$.
▸ $\forall \phi \in \mathcal{L}(E)$, $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $(PQ)(\phi) = P(\phi) \circ Q(\phi)$.

Remarques : 1. Si pour tout endomorphisme $\phi \in \mathcal{L}(E)$ fixé, on pose :
$$f_\phi : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E),\ P \mapsto P(\phi),$$
la **proposition 1.35** s'écrit :
$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f_\phi(P + \lambda Q) = f_\phi(P) + \lambda f_\phi(Q)$;
$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $f_\phi(PQ) = f_\phi(P) \circ f_\phi(Q)$.

Ainsi, le premier *item* de la **proposition 1.35** signifie que f_ϕ est une application linéaire de $(\mathbb{K}[X], +, .)$ dans $(\mathcal{L}(E), +, .)$.

Le deuxième *item* de la **proposition 1.35** a pour conséquence que deux polynômes de l'endomorphisme ϕ commutent.

Définition : *On appelle* **polynôme annulateur** *de $\phi \in \mathcal{L}(E)$ tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que*

$$P(\phi) = 0.$$

Applications : calcul de l'inverse et des puissances, voir la **méthode 1.10**.

Remarque : Le noyau de f_ϕ (voir les remarques précédentes) est donc l'ensemble des polynômes annulateurs de l'endomorphisme ϕ.

■ Formes linéaires et hyperplans dans un espace vectoriel de dimension finie

Dans ce paragraphe, E désigne un **espace vectoriel de dimension finie**.

Définition : Forme linéaire —. *Une* ***forme linéaire*** *de E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$, considéré comme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Définition : Relation forme linéaire-hyperplan —. *Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan de E s'il est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.*

Proposition 1.36.— Première caractérisation d'un hyperplan —. Un **hyperplan** de E est un sous-espace vectoriel H de E admettant un supplémentaire de dimension 1, c'est-à-dire une droite vectorielle de l'espace vectoriel E.
On peut aussi écrire que si H est un hyperplan et D une droite non incluse dans H, alors $E = H \oplus D$.

Proposition 1.37.— Deuxième caractérisation d'un hyperplan —. Soit n un entier non nul, si E est un espace vectoriel de dimension n, un sous-espace vectoriel H est un hyperplan de E si, et seulement si, $\dim H = n - 1$.

Proposition 1.38.— Deux formes linéaires non nulles ont le même noyau si, et seulement si, elles sont colinéaires.

Théorème 1.39.— Équations d'un hyperplan —.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E de dimension n, $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base de E et H un *s.e.v* de E.
H est un hyperplan de E si, et seulement si, il existe n scalaires $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ non tous nuls tels que : $\left[x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in H \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \right]$. On dit que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ est une ***équation de H dans la base $\mathcal{B}$*** ou une ***équation cartésienne de H dans $\mathcal{B}$***.

Exemple : Les hyperplans de $\mathbb{K}^2$ sont les droites vectorielles. Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^2$ est une droite vectorielle si, et seulement si, il admet une équation de la forme : $ax + by = 0$, où $(a, b) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Méthodes

Familles de vecteurs. Bases

Méthode 1.1.— Comment montrer qu'une famille de vecteurs est libre

- Si la famille est finie, on prouve qu'une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille est nulle si, et seulement si, ses coefficients sont tous nuls.
- Si la famille n'est pas finie, on prouve que toute sous-famille finie extraite de cette famille est libre. On effectue alors souvent une récurrence.
- On peut aussi montrer que cette famille est l'image d'une famille libre par une application linéaire injective.
- Si l'on connaît les composantes des vecteurs dans une base donnée, on peut faire appel au pivot de Gauss (voir le chapitre consacré aux matrices).

Mise en œuvre : exercice 1.1, **exercice 1.2**

Méthode 1.2.— Comment montrer qu'une famille de vecteurs est une base

- On peut montrer que cette famille est libre et génératrice.
  Voir la remarque suivante dans le cas où E est de dimension infinie.
- En dimension finie, et si le cardinal de cette famille est égal à la dimension de E, il suffit de montrer le caractère libre (respectivement générateur).
- La famille obtenue en juxtaposant des bases de sous-espaces vectoriels consituants une **décomposition directe** de E est une base de E.
- On peut aussi montrer que cette famille est l'image d'une base d'un espace vectoriel F par un isomorphisme de E dans F.

Mise en œuvre : exercice 1.2, **exercice 1.3**, **exercice 1.6**, **exercice 1.20**.

Remarque : Si E est de dimension infinie, si l'on a montré que $\mathcal{B}$ est libre, il faut alors prouver directement que $\mathcal{B}$ est génératrice (par exemple en faisant une récurrence si les éléments de la famille sont indéxés par des entiers). En effet, impossible d'utiliser directement le résultat du cours en dimension finie (une famille libre de n éléments est une base si $\dim E = n$).

Exemple : Polynômes de degrés échelonnés

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$, telle que $\deg P_n = n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$; montrer que $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$, puis que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base de $\mathbb{K}[X]$.

Montrons que $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$, et, pour ceci, prenons une combinaison linéaire $\sum_{k=0}^{n} a_k P_k$ nulle, sans que les (a_k) soient tous nuls : alors $\{k \in [\![0,n]\!], a_k \neq 0\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée, qui admet donc un maximum, que nous appellerons m.

Alors : $\deg\left[\sum_{k=0}^{n} a_k P_k\right] = \deg\left[a_m P_m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k P_k\right] = m$, ce qui contredit l'hypothèse $\sum_{k=0}^{n} a_k P_k = 0$.
Comme $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre et de cardinal égal à la dimension de $\mathbb{K}_n[X]$, c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Toute famille finie extraite de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-famille de $(P_k)_{k\in[\![0,N]\!]}$, pour N bien choisi, donc est libre : $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre. Tout polynôme est inclus dans $\mathbb{K}_d[X]$ ($d \geqslant \deg P$), donc est combinaison linéaire de $(P_k)_{k\in[\![0,d]\!]}$. $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{K}[X]$.
En conclusion, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

❑ **Méthode 1.3.— Comment montrer que deux espaces vectoriels sont égaux ou isomorphes**

- On peut trouver un isomorphisme qui transporte l'un sur l'autre.
- On peut utiliser l'implication : $\left\{\begin{array}{c}\dim E = \dim F \\ E \subset F\end{array}\right. \Rightarrow E = F.$
- On peut montrer qu'une base de l'un est une base de l'autre.

Mise en œuvre : exercice 1.2, **exercice 1.10**, **exercice 1.11**, **exercice 1.14**.

■ Noyau et image d'une application linéaire

On rappelle que si $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathsf{Ker}\,\phi = \{\vec{u} \in E, \phi(\vec{u}) = \vec{0}_E\}$, $\mathsf{Im}\,\phi = \{\vec{u} \in F, \exists\, \vec{v} \in E, \phi(\vec{v}) = \vec{u}\}$.

❑ **Méthode 1.4.— Comment manipuler noyau ou (et) image de $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$**

- En dimension quelconque, il faut souvent revenir à la définition de $\mathsf{Ker}\,\phi$ et de $\mathsf{Im}\,\phi$. Ainsi, dans le cas de $\mathbb{K}[X]$, on pourra commencer par trouver des conditions sur le degré de P appartenant à $\mathsf{Ker}\,\phi$ ou à $\mathsf{Im}\,\phi$.
- En dimension finie, le théorème du rang donne une relation entre les dimensions de $\mathsf{Ker}\,\phi$ et de $\mathsf{Im}\,\phi$, ce qui évite (parfois) d'avoir à les déterminer tous les deux.

Mise en œuvre : en particulier **exercice 1.7** à **exercice 1.11**, **exercice 1.13**.

Remarque : On manipule souvent les noyaux et les images à l'occasion d'égalités du type $f\,o\,g = 0$ ou $g\,o\,f = 0$. Dans le premier cas, on a ainsi : $\mathsf{Im}\,g \subset \mathsf{Ker}\,f$. Cette idée prend tout son sens dans le cas d'un polynôme annulateur (voir **méthode 1.10**).

❑ **Méthode 1.5.— Comment montrer l'injectivité ou la surjectivité d'un endomorphisme**

- En dimension quelconque, on doit montrer que le noyau est $\{\vec{0}_E\}$ pour caractériser l'injectivité et que l'image est E pour caractériser la surjectivité.
- En dimension finie, il est équivalent de montrer la bijectivité, l'injectivité ou la surjectivité.

Mise en œuvre : exercice 1.9, **exercice 1.10**.

Remarque : Pour montrer la bijectivité en dimension infinie, l'injectivité seule ne suffit pas !

■ Rang d'une application linéaire

❑ **Méthode 1.6.— Comment déterminer le rang d'une application linéaire ϕ :**

- en calculant $\dim \operatorname{Ker} \phi$ puis en utilisant le théorème du rang.
- en déterminant $\dim \operatorname{Im} \phi$ directement, par exemple en déterminant le rang de la famille des images des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel de départ.

Exemple : 1. *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ avec $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$ Montrer* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. *En déduire* $\operatorname{Rg} f$.

Si $\vec{u} \in \operatorname{Im} f$ alors $\exists\, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $f(\vec{v}) = \vec{u}$. Donc $f(\vec{u}) = f^2(\vec{v}) = 0$. Ainsi $\vec{u} \in \operatorname{Ker} f$.
Comme $3 = \operatorname{Rg} f + \dim \operatorname{Ker} f$, nécessairement $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ (car $\operatorname{Rg} f \leqslant \dim \operatorname{Ker} f$). Donc $\operatorname{Rg} f = 1$.

2. *E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) est une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par $f(e_1) = 2e_2 + 3e_3$, $f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3$ et $f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$. Déterminer* $\operatorname{Rg} f$.

Le rang de f est celui de la famille $(f(e_1),\, f(e_2),\, f(e_3))$.
▸ $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont non colinéaires, donc le rang de cette famille est supérieur ou égal à 2.
Si la famille est libre, son rang est 3, sinon, son rang est 2.
▸ $\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \lambda_3 f(e_3) = (2\lambda_2 - \lambda_3)\, e_1 + (2\lambda_1 - 5\lambda_2 + 4\lambda_3)\, e_2 + (3\lambda_1 - 8\lambda_2 + 6\lambda_3) e_3 = 0.$

$$\text{Donc : } \left\{ \begin{array}{rcl} 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 - 5\lambda_2 + 4\lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 - 8\lambda_2 + 6\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_3 & = & 2\lambda_2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 & = & 0 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 & = & 0 \end{array} \right. .$$

On trouve finalement : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille est libre, donc de rang 3. Ainsi, $\operatorname{Rg} f = 3$.

Mise en œuvre : exercice 1.8.

■ Somme de sous-espaces vectoriels

❑ **Méthode 1.7.— Comment montrer que la somme de n sous-espaces vectoriels est directe**

- Si $n = 2$, il suffit de montrer que leur intersection est $\{0_E\}$.
  Attention, ce résultat n'est plus vrai à partir de $n = 3$!
- En dimension quelconque (et donc en particulier si $n = 3$), on revient à la définition en prouvant que la somme des vecteurs d'un n-uplet du produit cartésien des n sous-espaces vectoriels est nulle si, et seulement si, les n vecteurs sont nuls.
- En dimension finie, on peut aussi prouver que $\dim \left(\sum_{i=1}^{n} E_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \dim (E_i)$.

Exemple : *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, n scalaires deux à deux distincts. Montrer que la somme des noyaux* $\operatorname{Ker}\left(f - \lambda_i \operatorname{Id}_E\right)$, $i \in [\![1, n]\!]$, *est directe.*

Posons : $E_i = \operatorname{Ker}\left(f - \lambda_i \operatorname{Id}_E\right)$, $i \in [\![1, n]\!]$, et démontrons ce résultat par récurrence sur n.

▸ Pour $n=2$: $\forall\,(\vec{x}_1,\vec{x}_2)\in E_1\times E_2$, $\vec{x}_1+\vec{x}_2=0_E$ (1) $\Rightarrow f(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=0_E \Rightarrow \lambda_1\,\vec{x}_1+\lambda_2\,\vec{x}_2=0_E$ (2). λ_1 (1) − (2) donne : $(\lambda_1-\lambda_2)\vec{x}_2=0_E$ (3), puis : $\vec{x}_2=0_E$ (car $\lambda_1-\lambda_2\neq 0$) et, enfin, d'aprés (1), $\vec{x}_1=0_E$. Conclusion : E_1 et E_2 sont donc en somme directe.

▸ Supposons que la somme soit directe pour un nombre $n\geqslant 2$ de scalaires deux à deux distincts $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et soit λ_{n+1} un scalaire différent des n premiers.

$$\forall\,(\vec{x}_i)_{i\in[\![1,n+1]\!]}\in E_1\times\cdots\times E_n\times E_{n+1},\ \sum_{i=1}^{n+1}\vec{x}_i=0_E\ (1)\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n+1}\vec{x}_i\right)=0_E\Rightarrow\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\,\vec{x}_i=0_E\ (2).$$

λ_{n+1} (1) − (2) donne : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{n+1}-\lambda_i)\ \vec{x}_i=0_E$.

Comme les $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont en somme directe : $\forall\, i\in[\![1,n]\!]$, $(\lambda_{n+1}-\lambda_i)\ \vec{x}_i=0_E$.
Or : $\forall\, i\in[\![1,n]\!]$, $\lambda_{n+1}-\lambda_i\neq 0$, d'où : $\forall\, i\in[\![1,n]\!]$, $\vec{x}_i=0_E$, puis, d'après (1), $\vec{x}_{n+1}=0_E$.
Conclusion : les $(E_i)_{i\in[\![1,n+1]\!]}$ sont en somme directe.

▸ D'après le principe de récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, si les $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont deux à deux distincts, les noyaux des endomorphismes $(f-\lambda_i\,\mathrm{Id}_E)$, $i\in[\![1,n]\!]$, sont en somme directe.

Mise en œuvre : exercice 1.4, **exercice 1.5**, **exercice 1.10**, **exercice 1.11**, **exercice 1.13** puis **exercice 1.14** et **exercice 1.19**.

❑ **Méthode 1.8.— Comment montrer que n sous-espaces vectoriels constituent une décomposition en somme directe de E**

- En dimension quelconque, on peut prouver que la somme de ces n sous-espaces vectoriels est directe et égale à E.
  On peut penser à raisonner par analyse-synthèse :
  Étape 1 (Analyse) : on suppose qu'un vecteur $\vec{x}$ de E se décompose en la somme de n vecteurs $\vec{x}_i$, chacun de ces vecteurs appartenant à un de ces sous-espaces vectoriels. Puis, on détermine chacun de ces vecteurs $\vec{x}_i$ en fonction de $\vec{x}$ en utilisant les hypothèses fournies par l'énoncé.
  Étape 2 (Synthèse) : on montre que la décomposition obtenue lors de la première étape convient en vérifiant que chaque vecteur $\vec{x}_i$ appartient bien à son sous-espace vectoriel. Pour illustrer cette analyse-synthèse, allez voir l'exemple qui suit la **méthode 1.10**, l'**exercice 1.11** et l'**exercice 1.19**.
- En dimension finie, on peut prouver que la somme de leurs dimensions est égale à la dimension de E, puis soit que la somme de ces n sous-espaces vectoriels est égale à E, soit que leur somme est directe. On peut aussi déterminer une base de E composée de la réunion de bases de chacun des sous-espaces vectoriels.
- Si vous avez déjà vu le **chapitre 4**, il y a un cas où c'est immédiat. Si ϕ est diagonalisable alors E est somme directe de ses sous-espaces propres.

Mise en œuvre : exercice 1.3 à **exercice 1.5**, **exercice 1.10**, **exercice 1.11**, **exercice 1.14** et **exercice 1.19**.

Remarque : Un exercice très courant est de trouver un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel F donné dans E. Une méthode en dimension finie est de trouver une base de F et d'appliquer le **théorème de la base incomplète** pour trouver une base d'un supplémentaire. Une méthode plus générale est de décomposer tout vecteur de E en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur d'un autre sous-espace vectoriel G. Il faut alors prouver que $F\cap G=0$. Illustration : **exercice 1.3**.

■ Projecteurs et symétries vectorielles

❑ Méthode 1.9.— Comment travailler un projecteur ou une symétrie

▸ ***Cas d'un projecteur*** p.

1) Si l'on sait que p est un endomorphisme (par exemple il est défini analytiquement ou par sa matrice A), on montre que $p \circ p = p$ (ou $A^2 = A$) et alors p est la projection sur $\mathsf{Im}\, p$ (c'est aussi l'ensemble des $\vec{x} \in E$ tels que $p(\vec{x}) = \vec{x}$) et dans la direction de $\mathsf{Ker}\, p$.
Retenir enfin l'égalité, qui peut être utile dans certains exercices :
$\forall \vec{x} \in E, \vec{x} = p(\vec{x}) + \vec{x} - p(\vec{x})$, où $p(\vec{x}) \in \mathsf{Im}\, p$ et $\vec{x} - p(\vec{x}) \in \mathsf{Ker}\, p$.

2) Si l'on veut écrire analytiquement la projection p sur F, dans la direction de G, où $E = F \oplus G$, on remarque que si $\vec{x} \in E$ alors $p(\vec{x}) \in F$ et $\vec{x} - p(\vec{x}) \in G$. Ces deux contraintes permettent d'obtenir $p(\vec{x})$ en fonction de $\vec{x}$ dans la base canonique de E.

▸ ***Cas d'une symétrie*** s.

La relation $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ caractérise les symétries vectorielles.
On peut alors dire que s est la symétrie par rapport à $F = \mathsf{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$, dont la direction est $G = \mathsf{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$. On peut aussi déterminer p, la projection sur F, dans la direction de G et alors $s = 2p - Id_E$.

Exemples : 1. *Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini analytiquement par* $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x' & = & 2x \\ 2y' & = & x + y - z \\ 2z' & = & x - y + z \end{array} \right.$,
où $g((x,y,z)) = (x',y',z')$, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Vérifier que g est une projection et déterminer ses éléments caractéristiques.
(D'après Concours National Commun Marocain, filière PSI.)

Pour montrer que $g^2 = g$, il suffit de montrer que $g^2(e_i) = g(e_i)$, pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, si (e_1,e_2,e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déjà, on remarque que :

$$g(e_1) = \frac{1}{2}(2e_1 + e_2 + e_3),\ g(e_2) = \frac{1}{2}(e_2 - e_3),\ g(e_3) = \frac{1}{2}(-e_2 + e_3).$$

Ainsi, $g^2(e_1) = \frac{1}{2}(2g(e_1) + g(e_2) + g(e_3)) = \frac{1}{2}(2e_1 + e_2 + e_3) = g(e_1)$.
On montre de même que $g^2(e_2) = g(e_2)$ et $g^2(e_3) = g(e_3)$. (Si vous avez revu les matrices, si A désigne la matrice de g dans (e_1,e_2,e_3), on fait rapidement $A^2 = A$ bien entendu.)
$\mathsf{Im}\, g = \{g(\vec{x}),\ \vec{x} \in \mathbb{R}^3\} = \{x_1 g(e_1) + x_2 g(e_2) + x_3 g(e_3),\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3\} = \mathsf{Vect}\,(g(e_1), g(e_2), g(e_3))$.
Or, $g(e_3) = -g(e_2)$ et $\{g(e_1), g(e_2)\}$ est libre. Donc $\mathsf{Im}\, g$ est le plan vectoriel de base $(g(e_1), g(e_2))$.
(On peut aussi déterminer (x,y,z) tel que $g((x,y,z)) = (x,y,z)$.
On résout un système et on trouve alors une équation de plan qui a pour base $((g(e_1), g(e_2))$.)
On trouve pour équation de $\mathsf{Im}\, g$: $x - y - z = 0$.
La direction de g est $\mathsf{Ker}\, g$. $(x,y,z) \in \mathsf{Ker}\, g \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & 2x \\ 0 & = & x + y - z \\ 0 & = & x - y + z \end{array} \right.$.
On trouve rapidement $x = 0$ et $y = z$. Ainsi $\mathsf{Ker}\, g = \mathsf{Vect}\,((0,1,1)) = \mathsf{Vect}\,(e_2 + e_3)$.

2. *Soit f et g deux projecteurs d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.*
On suppose qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ avec $(a,b) \notin (\{0,1\})^2$ tel que : $f \circ g - g \circ f = a f + b g$.
Montrer que pour tout $\vec{x} \in E$, $f \circ g(\vec{x}) \in \mathsf{Im}\, g$ puis que $\mathsf{Im}\, f \subset \mathsf{Im}\, g$.
Montrer ensuite que $g \circ f = f$ et que $a + b = 0$. En déduire que $f = g$.

▸ On applique g à droite dans les deux membres de l'égalité (en utilisant $g\,o\,g = g$).
On a : $f\,o\,g - g\,o\,f\,o\,g = a\,f\,o\,g + b\,g \Rightarrow f\,o\,g = \dfrac{1}{1-a}\,[b\,g + g\,o\,f\,o\,g] \Rightarrow \forall \vec{x} \in E,\ f\,o\,g(\vec{x}) \in \mathsf{Im}\, g$.
Puis $f = \dfrac{1}{a}\,[f\,o\,g - g\,o\,f - b\,g]$ permet d'en déduire que $\mathsf{Im}\, f \subset \mathsf{Im}\, g$.
▸ On sait que comme g est un projecteur, $\mathsf{Im}\, g$ est l'ensemble des vecteurs invariants par g.
Comme $\mathsf{Im}\, f \subset \mathsf{Im}\, g$, tous les vecteurs de la forme $f(x)$ sont invariants par g et donc : $g\,o\,f = f$.
Ainsi : $f\,o\,g - g\,o\,f = f\,o\,g - f = af + bg \Rightarrow f\,o\,g - f = a\,f + b\,f\,o\,g$, en multipliant à gauche par le projecteur f. Donc $f\,o\,g = g$. Puis :

$$f\,o\,g - f = a\,f + b\,g \Rightarrow f\,o\,g - f\,o\,g = a\,f\,o\,g + b\,g,$$

en multipliant à droite par le projecteur g.
On a (car $g \neq 0$, pourquoi ?) : $(a+b)g = 0 \Rightarrow a + b = 0$. Enfin :

$$f\,o\,g - g\,o\,f = a\,f + b\,g \Rightarrow g - f = a\,f + b\,g = a\,f - a\,g \Rightarrow (1-b)\,g = (a+1)\,f.$$

Comme $b \neq 1$ et $a = -b \neq -1$, $f = g$.

Mise en œuvre : exercice 1.4, de l'**exercice 1.14** à l'**exercice 1.16**.

■ Polynômes annulateurs

❑ **Méthode 1.10.— Comment exploiter une relation du type $f^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i$, où $f \in \mathcal{L}(E)$ et $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ (Ici le produit est la composition et $f^0 = Id$.)**

- ▸ Une application naturelle est de calculer f^p pour tout $p \geqslant n$ en fonction des puissances f^i avec $i \leqslant n$. Il faudra généralement faire une récurrence.
- ▸ Si $a_0 \neq 0$, on peut déterminer la fonction réciproque de f alors bijective.
- ▸ Si $a_0 = 0$, il faut raisonner au cas par cas. Les projecteurs (**méthode 1.9**) et les endomorphismes nilpotents (voir plus loin) sont issus de cette catégorie. On construit souvent une base de E à partir d'un vecteur de E et de ses images successives.
- ▸ On peut parfois avoir alors à démontrer que, connaissant un polynôme annulateur de$f$, E est une certaine somme directe de sous-espaces vectoriels (qui sont en général des noyaux ou des images). Cette somme étant fournie par l'énoncé, on raisonne alors par analyse-synthèse (allez voir la **méthode 1.8**) et on se sert bien entendu du polynôme annulateur de f. L'idée est alors de se placer dans une base adaptée à cette décomposition en somme directe de E, ce qui permet d'avoir beaucoup d'informations sur f.

Exemples : *Exemple 01. On considère un endomorphisme f d'un espace vectoriel E vérifiant*

$$(1)\ \ f^2 + f = Id_E.$$

Montrer que f est un automorphisme de E.

Il suffit de remarquer que $f\,o\,(f + Id_E) = (f + Id_E)\,o\,f = Id_E$ et donc f est inversible car il possède un inverse qui est $f + Id_E$.

Méthodes

Exemple 02. On considère un endomorphisme f d'un espace vectoriel E vérifiant

$$(1)\ \ (f+Id_E)\,o\,(f-2Id_E)=0,$$

où 0 désigne l'endomorphisme nul de E.
Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathsf{Ker}\,(f+Id_E)$ et $\mathsf{Ker}\,(f-2Id_E)$ sont supplémentaires dans l'espace vectoriel E.

Analyse.
Soit $\vec{x}\in E$. Supposons qu'il existe $\vec{y}\in\mathsf{Ker}\,(f+Id_E)$ et $\vec{z}\in\mathsf{Ker}\,(f-2Id_E)$ tels que $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$.
Alors $f(\vec{y})=-\vec{y}$ et $f(\vec{z})=2\vec{z}$. Ainsi : $f(\vec{x})=-\vec{y}+2\vec{z}$.
On en déduit rapidement :

$$\vec{y}=\frac{1}{3}(2\vec{x}-f(\vec{x}))\text{ et }\vec{z}=\frac{1}{3}(\vec{x}+f(\vec{x})).$$

On a prouvé l'unicité du couple en cas d'existence.

Synthèse.
Réciproquement, soit $\vec{x}\in E$ et $\vec{y}=\frac{1}{3}(2\vec{x}-f(\vec{x}))$ et $\vec{z}=\frac{1}{3}(\vec{x}+f(\vec{x}))$.
Alors, clairement $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$.
Maintenant, prouvons que $\vec{y}\in\mathsf{Ker}\,(f+Id_E)$. On peut développer (1) et en déduire f^2 en fonction de f et de Id_E. Puis calculer $f(\vec{y})$ et vérifier que c'est aussi $-\vec{y}$.
On peut aussi ne pas développer (1) et l'utiliser directement en écrivant :

$$(f+Id_E)(\vec{y})=\frac{1}{3}(f+Id_E)(2\vec{x}-f(\vec{x}))=\frac{-1}{3}((f+Id_E)\,o\,(f-2Id_E))(\vec{x})=0.$$

Puis, on remarque que l'on a aussi : $(f-2Id_E)\,o\,(f+Id_E)=0$. On écrit :

$$(f-2Id_E)(\vec{z})=\frac{1}{3}(f-2Id_E)(\vec{x}+f(\vec{x}))=\frac{1}{3}((f-2Id_E)\,o\,(f+Id_E))(\vec{x})=0.$$

Donc : $\vec{z}\in\mathsf{Ker}\,(f-2Id_E)$.

Conclusion.
On a bien établit l'existence et l'unicité d'un couple $(\vec{y},\,\vec{z})\in\mathsf{Ker}\,(f+Id_E)\times\mathsf{Ker}\,(f-2Id_E)$ vérifiant l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc $E=\mathsf{Ker}\,(f+Id_E)\oplus\mathsf{Ker}\,(f-2Id_E)$.

Mise en œuvre : exercice 1.10, **exercice 1.18**, **exercice 1.19**.

Remarque : Cas des **endomorphismes nilpotents**. On dit que $\phi\in\mathcal{L}(E)$ est **nilpotent** si, et seulement si, il existe un entier p supérieur ou égal à 1, tel que : $\phi^p=0$ et $\phi^{p-1}\neq 0$. On peut déjà affirmer que ϕ n'est pas bijectif. Sachez pour démarrer dans certains exercices que si ϕ est nilpotent (d'ordre p) alors il existe $\vec{v}$ tel que $\left(\vec{v},\phi(\vec{v}),...,\phi^{p-1}(\vec{v})\right)$ soit une famille libre de E.

Exemple : *On suppose que* $\dim E=n\geqslant 1$ *et* $f\in\mathcal{L}(E)$ *tel que* $f^{n-1}\neq 0$ *et* $f^n=0$.
1. *Soit $\vec{v}\in E\setminus\operatorname{Ker}f^{n-1}$ fixé et la famille : $B=\left(\vec{v},f(\vec{v}),...,f^{n-1}(\vec{v})\right)$.*
Montrer que B est une base de E.
2. *Déterminer le rang de f.* ***(D'après Mines-Ponts, filière PSI.)***

1. Comme $f^{n-1}\neq 0$, il existe bien $\vec{v}\in E\setminus\operatorname{Ker}f^{n-1}$.
Considérons la famille : $B=\left(\vec{v},f(\vec{v}),...,f^{n-1}(\vec{v})\right)$ et $(a_0,...,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n$ tel que

$$(E_1)\quad a_0\vec{v}+a_1f(\vec{v})+...+a_{n-1}f^{n-1}(\vec{v})=\vec{0}.$$

On applique f^{n-1} à (E_1), on obtient alors : $a_0 f^{n-1}(\vec{v}) = \vec{0}$ car $f^k(\vec{v}) = \vec{0}$ pour tout entier k supérieur ou égal à n.
Comme $f^{n-1}(\vec{v}) \neq \vec{0}$, on en déduit que $a_0 = 0$. L'égalité (E_1) devient :

$$(E_2) \quad a_1 f(\vec{v}) + ... + a_{n-1} f^{n-1}(\vec{v}) = \vec{0}.$$

On compose (E_2) par f^{n-2}, on obtient alors : $a_1 f^{n-1}(\vec{v}) = \vec{0}$. Et encore une fois, on utilise le fait que $f^{n-1}(\vec{v}) \neq \vec{0}$. On en déduit que $a_1 = 0$.
De façon générale, $k \in [\![1, n-1]\!]$ supposons que l'on ait :

$$(E_{k+1}) \quad a_k f^k(\vec{v}) + ... + a_{n-1} f^{n-1}(\vec{v}) = \vec{0}.$$

On applique f^{n-1-k} à (E_{k+1}), on obtient alors : $a_k f^{n-1}(\vec{v}) = \vec{0}$.
Et on utilise le fait que $f^{n-1}(\vec{v}) \neq \vec{0}$.
On en déduit que $a_k = 0$. On applique pour $k = n-1$ enfin. Et on a bien : $a_0 = a_1 = ... = a_{n-1} = 0$.
La famille B est libre, et comme B possède n éléments et enfin comme $\dim E = n$, on en déduit que B est donc une base de E.

2. $B \setminus \{\vec{v}\}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. Cette famille génératrice est libre car B est libre. Elle est donc une base de $\operatorname{Im} f$.
Son cardinal est $n-1$. Le rang de f est $n-1$.

Mise en œuvre : exercice 1.12, **exercice 1.15**, **exercice 1.17**.

■ Sous-espaces vectoriels stables

❑ **Méthode 1.11.— Comment montrer qu'un s.e.v F est stable par $\phi \in \mathcal{L}(E)$**

- On peut montrer directement : $\forall \vec{u} \in F,\ \phi(\vec{u}) \in F$;
- on peut aussi tenter d'identifier une situation classique : $\operatorname{Ker}\phi$ et $\operatorname{Im}\phi$ sont stables par ψ lorsque ϕ et ψ commutent, pour tout polynôme P, $\operatorname{Ker} P(\phi)$ et $\operatorname{Im} P(\phi)$ sont stables par ϕ, la restriction de ϕ à F est une homothétie *etc.*

Remarque : Cette notion de sous-espace stable est très importante car elle permet entre autre d'en déduire l'écriture en blocs des matrices (voir le **chapitre 2**). Dans le **chapitre 4**, on utilise des sous espaces stables fondamentaux : les sous-espaces propres.

Exemple : *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, p un projecteur de E et f un endomorphisme de E. Montrer que : $f \circ p = p \circ f \iff \operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont stables par f.*

Sens direct.
Supposons $f \circ p = p \circ f$. Alors pour tout $\vec{x} \in \operatorname{Ker} p$, on a :

$$p(f(\vec{x})) = f(p(\vec{x})) = 0 \Rightarrow f(\vec{x}) \in \operatorname{Ker} p.$$

Pour tout $\vec{y} \in \operatorname{Im} p,\ p(\vec{y}) = \vec{y}$ donc :

$$f(\vec{y}) = (f \circ p)(\vec{y}) = p(f(\vec{y})) \in \operatorname{Im} p.$$

Les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par f.

Sens réciproque.
Pour tout $\vec{x} \in E$, on a l'égalité (voir la **méthode 1.9**) :

$$\vec{x} = p(\vec{x}) + \vec{x} - p(\vec{x}).$$

Prenons $\vec{y} = p(\vec{x})$ et $\vec{k} = \vec{x} - p(\vec{x})$ alors $\vec{x} = \vec{y} + \vec{k}$, où $\vec{y} = p(\vec{x}) \in \mathsf{Im}\, p$ et $\vec{k} = \vec{x} - p(\vec{x}) \in \mathsf{Ker}\, p$.
Puis $\mathsf{Im}\, p$ est stable par f par hypothèse donc $f(\vec{y}) \in \mathsf{Im}\, p$.
De plus, p est un projecteur donc :

$$f(\vec{y}) \in \mathsf{Im}\, p \Rightarrow p(f(\vec{y})) = f(\vec{y}).$$

$\mathsf{Ker}\, p$ est stable par f par hypothèse donc $f(\vec{k}) \in \mathsf{Ker}\, p$ et $p(f(\vec{k})) = 0$.
Alors $f(p(\vec{x})) = f(p(\vec{y} + \vec{k})) = f(p(\vec{y})) = f(\vec{y})$ et $p(f(\vec{x})) = p(f(\vec{y})) + p(f(\vec{k})) = p(f(\vec{y})) = f(\vec{y})$.
Pour tout $\vec{x} \in E$, $f(p(\vec{x})) = p(f(\vec{x}))$ donc on a bien : $f \circ p = p \circ f$.

Mise en œuvre : exercice 1.7, **exercice 1.8**, **exercice 1.11**, **exercice 1.18**.

Remarque : On compléte la **méthode 1.11** par la **méthode 4.12** (après avoir vu la diagonalisation).

■ Hyperplans de E, espace vectoriel de dimension finie

❑ **Méthode 1.12.— Comment reconnaître ou caractériser un hyperplan**

- Soit en l'identifiant comme étant le noyau d'une forme linéaire non nulle, soit en montrant qu'il admet un supplémentaire de dimension 1.
- Si $\mathsf{dim}\, E = n$, on peut, en plus, soit montrer que c'est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$, soit constater qu'il admet, dans une base donnée, une équation de la forme $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, où les a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, ne sont pas tous nuls.

Exemple : *Ici $n \geqslant 2$, soit $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P'(0) = 0\}$.*
Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ puis déterminer ensuite un supplémentaire de H dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

▸ $f \mapsto f'(0)$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}_n[X]$, donc H, qui est le noyau de cette forme linéaire non nulle, est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$.
▸ Si $g : x \mapsto x$, alors $g \notin H$, donc $\mathbb{R}\, g = \{x \mapsto k\, x,\ k \in \mathbb{R}\}$ est un supplémentaire de H.
On peut remarquer aussi :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = P(x) - P'(0)x + P'(0)x.$$

Puis, on remarque aussi que

$$x \mapsto P(x) - P'(0)x \in H \text{ et } x \mapsto P'(0)x \in \mathbb{R}g.$$

Donc : $\mathbb{R}_n[X] = H \oplus \mathbb{R}g$.

Mise en œuvre : de l'**exercice 1.20** à l'**exercice 1.22**.

■ Maths avec Python

Dans ce chapitre, nous avons abordé la notion d'interpolation de Lagrange. Un TD courant est de construire des polynômes de Lagrange, de les tracer et de les comparer à des fonctions non polynomiales interpolées par ces polynômes. Rappelons à cette occasion comment rentrer des fonctions avec Python (**méthode 1.13**), comment les tracer (en particulier, comment mettre plusieurs graphes ensembles) par la **méthode 1.14** ou la **méthode 1.15** et comment manipuler des polynômes soit en les considérant comme des fonctions soit en utilisant le sous-module *numpy.polynomial*, voir pour cela la **méthode 1.16**.
Enfin, on donnera une troisième façon de construire un polynôme d'interpolation (**méthode 1.17**).

❑ **Méthode 1.13.— Comment rentrer une fonction d'une ou plusieurs variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ avec Python**

- Si la fonction est ***explicitement du type*** $x \mapsto f(x)$ ***(respectivement du type*** $(x,y) \mapsto f(x,y)$,***) où l'expression, notée*** *expression* ***de la quantité*** $f(x)$ ***(respectivement*** $f(x,y)$***) est unique***, on tape

```
def  f(x) : (respectivement def f(x,y) : )
     return  expression
```

- Si la fonction est ***du type*** $x \mapsto f(x)$, ***où*** $f(x)$ ***a plusieurs expressions selon le domaine des*** x, par exemple : $f : x \mapsto \begin{cases} f_1(x) & \text{pour} \quad x < a \\ f_2(x) & \text{pour} \quad a \leqslant x < b \\ f_3(x) & \text{pour} \quad b \leqslant x \end{cases}$:

```
def f(x) :
    if x  < a :
         return(f1(x))
    elif a  <=  x  and x < b :
         return(f2(x))
    else :
         return(f3(x))
```

Mise en œuvre : exercice 1.23, **exercice 8.31**, **exercice 12.21**, **exercice 12.22**, **exercice 15.20** puis **exercice 16.42**.

Exemple : *On considère la fonction g définie sur $[0,2[$ et f définie sur $[0,+\infty[$ par :*

$$g : x \mapsto \begin{cases} x & \text{pour} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{pour} \quad 1 \leqslant x < 2 \end{cases} \text{ et } f : x \mapsto \begin{cases} g(x) & \text{pour} \quad 0 \leqslant x < 2 \\ \sqrt{x}\, f(x-2) & \text{pour} \quad x \geqslant 2 \end{cases}.$$

Définir les deux fonctions g et f. Construire la liste des valeurs $f(k)$ pour $k \in [\![1,6]\!]$.
(Posé à l'écrit du Concours ENSAM-ESTP-POLYTECH en filière PSI.)

On tape la fonction `g` pour commencer et la fonction `f` ensuite.

```
def g(x):
    if 0 <= x and x < 1 :
        return x
    elif 1 <= x and x < 2 :
        return 1
    else :
        print( "valeur de  l'antécédent erroné" )
import numpy as np
def f(x) :
    if 0 <= x and x < 2 :
        return g(x)
    elif x >= 2 :
        return np.sqrt(x)*f(x-2)
    else :
        print( "valeur de  l'antécédent erroné" )
[f(k) for k in range(1,7)]    # f(x)=0 pour x pair
       [ 1 , 0.0 , 1.732050807 , 0.0 , 3.87298334 , 0.0 ]
```

❑ **Méthode 1.14.— Comment tracer une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec Python**

On rentre préalablement `numpy` (d'alias `np`) et `matplotlib.pyplot` d'alias `plt`.

- Si l'on a besoin de $+\infty$, $(-\infty)$, on tape `np.inf` (`-np.inf`).
- Pour ***tracer une ligne de segments brisés***, par exemple on veut relier les points $A0(x_0, y_0)$ à $An(x_n, y_n)$, on rentrera $[x_0, ..., x_n]$ dans `X` et $[y_0, ..., y_n]$ dans `Y` puis :

  ```
  plt.axis('equal');plt.plot(X,Y);plt.grid();plt.show()
  ```

  Si ***l'on veut juste visualiser le nuage de points*** (x_i, y_i) pour $i \in [\![0, n]\!]$, on ajoutera l'argument `"o"` dans la commande `plt.plot` (il s'agit bien de la lettre o et non du nombre 0), (voir l'**exercice 10.26**) par exemple), ainsi on tapera :

  ```
  plt.axis('equal');plt.plot(X,Y,"o");plt.grid();plt.show()
  ```

- Pour ***tracer le graphe de f pour $x \in [a, b]$ définie explicitement***, on définit d'abord une liste d'abscisses X avec `np.arange` en rentrant les deux extrémités a et b et le pas h ou avec `np.linspace` en rentrant a, b et le nombre de points p. Puis, on rentre la liste Y des images des éléments de X. On tape :

  ```
  X = np.arange(a,b,h) ; Y = [f(x) for x in X]
  plt.plot(X,Y) ; plt.show()
  ```

Mise en œuvre : exercice 1.26, **exercice 6.36**, **exercice 8.28**, **exercice 10.26**, **exercice 12.22**, **exercice 14.17**, **exercice 15.20**.

Remarques : 1. On peut taper `Y = f(X)` à la place de `Y = [f(x) for x in X]`
2. On peut taper aussi `X = np.linspace(a,b,p)` (où le pas h devient le nombre p de points).
3. `plt.plot` possède des options de présentation `color` et `linestyle`. Par exemple

```
plt.plot(X,Y,color='r', linestyle='--')
```

donne un tracé rouge et avec des lignes discontinues. $'g'$, $'b'$ et $'0'$ sont les codes respectivement pour la couleur verte, bleu et noire puis $'-'$ et $':'$ sont les codes pour une ligne continue et en pointillée.
Pour tracer les axes Ox et Oy en noir (pour les distinguer de la (les) courbe(s)) :

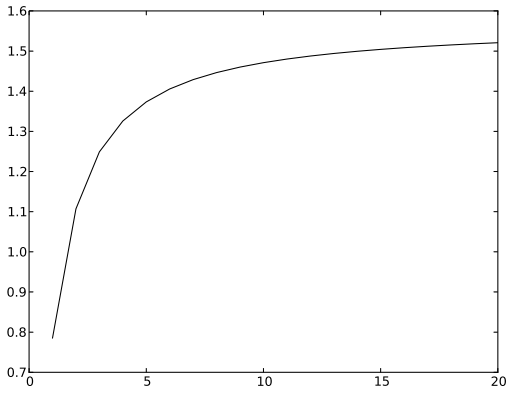
```
plt.axhline(color = '0') ; plt.axvline(color = '0')
```

On peut aussi incorporer des légendes ou du texte.

Exemple : *Écrire les lignes Python qui permettent de tracer la ligne de segments brisés passant par les points* $(k, f(k))$, *où* k *varie de* 1 *à* 20. *Appliquer et afficher avec* $f : x \mapsto \arctan x$.

```
import matplotlib.pyplot as plt ; import numpy as np
def f(x) : return(np.arctan(x))
X = [ k  for k in range(1,21) ]
Y = [ f(k) for k in range(1,21) ]
plt.plot( X,Y,color = '0'); plt.show( )
```

On obtient la courbe suivante.



❑ **Méthode 1.15.— Comment tracer plusieurs graphes ensemble avec Python**

On rentre préalablement `numpy` avec l'alias `np` et `matplotlib.pyplot` en alias `plt`.

- Pour ***tracer deux graphes sur le même dessin***, $y = f(x)$ en rouge et $y = g(x)$ en vert pour $x \in [a, b]$, avec p points, on écrit en suivant (avant de taper Entrée) :

```
X = np.linspace(a,b,p)
plt.plot(X,f(X), color='r');
plt.plot(X,g(X), color='g'); plt.axis('equal');
plt.show( )    # on peut rajouter :
plt.legend(('y = f(x)', 'y = g(x)'), 'best')
```

- Pour ***tracer une famille de graphes sur le même dessin***, on peut utiliser une boucle `for`. Pour tracer ensemble les graphes des fonctions f_n pour $n \in [\![n1, n2]\!]$ et pour $x \in [a, b]$ avec p points, on définit une fonction des deux variables $f(x, n)$ et :

```
X = np.linspace(a,b,p)
for n in range (n1,n2+1) :
    Y  = f(n,X); plt.plot(X,Y); plt.show( )
```

- Pour ***tracer deux graphes (ou plus) côte à côte***, par exemple $y = f(x)$, $y = g(x)$ et $y = h(x)$ pour $x \in [a, b]$, avec p points, le graphe Γ_1 de f étant en rouge, celui Γ_2 de g en vert, on écrit en suivant (avant de taper Entrée) :

```
X = np.linspace(a,b,p)
plt.subplot(221); plt.plot(X,f(X), color='r');
plt.subplot(222); plt.plot(X,g(X), color='g');
plt.subplot(223); plt.plot(X,h(X)); plt.show()
```

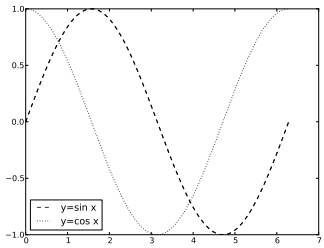
On obtient Γ_1 et Γ_2 côte à côte et Γ_3 en dessous. La commande $plt.subplot(n_1n_2n_3)$ donne le nombre n_1 de lignes, le nombre n_2 de colonnes et n_3 est le numéro de la figure. Voir ainsi l'**exercice 14.17**.

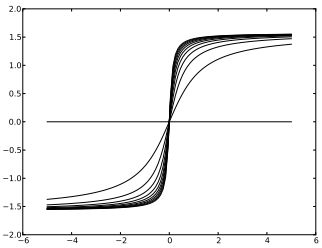
Exemples : 1. *Tracer* sin *(en pointillé) et* cos *(en ligne discontinue) ensemble.*

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
X = np.linspace(0,2*np.pi,500)
plt.plot(X,np.sin(X),linestyle='- -')
plt.plot(X,np.cos(X),linestyle=' :')
plt.legend(("y  = sin x ", " y = cos x ),'best ')
plt.show( )
```

2. *Superposer les graphes des* $f_n : t \mapsto arctan(nt)$ *entre* -5 *et* 5 *pour* $n \in [\![0, 10]\!]$.

```
import matplotlib.pyplot as plt; import numpy as np
X = np.linspace(-5,5,100)
for n in range(11)
    Y = np.arctan(n*X); plt.plot(X,Y); plt.show( )
```





❑ **Méthode 1.16.— Comment faire des opérations sur les polynômes**

On peut rentrer un polynôme comme une fonction (voir la **méthode 1.13**).
On peut aussi utiliser la fonction `Polynomial` du sous-module `numpy.polynomial` et un certain nombre d'attributs associés. On commence donc par taper :

```
from numpy.polynomial import Polynomial
```

- Pour ***créer un polynôme***, on liste ses coefficients par ordre de degré croissant. $p = a0 + a1X + a2X^2 + a_3X^3$ s'écrit `p = Polynomial([a0,a1,a2,a3])`
  L'attribut `coef` donne accès aux coefficients ordonnés par degré croissant.
  Ainsi, si l'on tape : `p.coef`, on obtient `array([a0.,a1.,a2.,a3.])`
  On suppose dans la suite de la méthode que p ***a été défini ainsi.***
- Pour ***calculer la valeur*** $p(a)$, on tape simplement : `p(a)` et pour obtenir $[p(x1), ..., p(xn)]$, on tape : `p([x1,...,xn])`.
- `p.coef[i]` fournit le ***coefficient devant*** X^i.
- `p.degree( )` donne le ***degré*** et `p.roots( )` les ***racines*** de p.
- Pour ***dériver le polynôme*** p, on tape : `p.deriv( )` qui renvoie un nouveau polynôme. Cet attribut a un argument optionnel n qui indique le nombre de dérivations à effectuer. Si l'on tape par exemple `p.deriv(2).coef`, l'on obtient les coefficients du polynôme dérivée seconde de p.
- Pour ***intégrer le polynôme*** p, on tape : `p.integ( )` qui renvoie un nouveau polynôme. Cet attribut a un premier argument optionnel donnant le nombre d'intégrations à effectuer et un second argument optionnel qui donne la constante d'intégration (ou la liste de constantes si l'on intègre plusieurs fois) à utiliser.
- Pour faire des ***opérations*** sur des polynômes, on utilise $+$, $-$ et $*$ pour additionner, soustraire et multiplier des polynômes. Par exemple, l'opération `(p**3).coef` permet d'obtenir la liste des coefficients de p^3.
- Pour faire la ***division euclidienne*** du polynôme p par le polynôme q, la commande `p // q` donne le polynôme quotient et `p % q` donne le reste.

Méthodes

Exemple : *Soit le polynôme* $P = X^3 + 2X - 3$, *calculer successivement* $P(0)$, $[P(1), P(2), P(3)]$, $\deg P$, *les racines de* P, *puis les polynômes* P', P'' *et enfin le quotient et le reste de la division euclidienne de* P *par* $B = X^2 + 1$.

```
from numpy.polynomial import Polynomial
P = Polynomial([-3,2,0,1])
P(0), P([1,2,3]), P.degree()
     -3.0 , array([0., 9., 30.])  ,  3
P.roots(), P.deriv().coef, P.deriv(2).coef
    array([-0.5-1.6583124j, -0.5+1.6583124j, 1.0 + 0.j ]) ,
    array([2., 0., 3. ]) , array([0., 6.])
B = Polynomial([1, 0, 1 ]; Q = P // B ; R = P % B
Q.coef, R.coef
     array([0., 1.]) , array([-3., 1.])
```

Mise en œuvre : De l'**exercice 1.24** à l'**exercice 1.27**, **exercice 4.33**, **exercice 5.21**, **exercice 7.42**.

❑ **Méthode 1.17.— Comment construire des polynômes de Lagrange**

On désire construire le polynôme de Lagrange P passant par les points $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$.

- On peut vouloir une liste de points où passe P (pas nécessairement la base d'interpolation), voir l'**exercice 1.26**.
- On peut construire P sous la forme d'un polynôme, on utilise alors le module `numpy.polynomial`, voir l'**exercice 1.25**.
- On peut construire P sous la forme d'une fonction (pour la tracer), voir à ce sujet l'**exercice 1.24** et l'**exercice 1.26**.
- On peut vouloir P directement en utilisant `interpolate.lagrange` du module `scipy`, voir l'**exercice 1.25** et l'**exercice 1.27**.

Exemple : *Calculer avec* `interpolate.lagrange` *de* `scipy`, *le polynôme de Lagrange de degré* 2 *qui passe par les points* $(0,0), (1,1), (2,2^3)$ *puis tracer ensemble sur* $[0,2]$ *ce polynôme de Lagrange et la fonction* $x \mapsto x^3$, *on pourra différencier les deux graphes avec* `linestyle` *par exemple.*

```
from scipy import interpolate
import numpy as np; import scipy as sp
X = np.array([0,1,2]); Y = X**3
P = sp.interpolate.lagrange(X,Y)
print(P), P
        2
     3 x - 2 x    poly1d([ 3., -2.,  0.])
import matplotlib.pyplot as plt
X = np.linspace(0,2,500);plt.plot(X,X**3,linestyle="- -");
plt.plot(X,P(X),color='0');plt.axis('equal');plt.show()
```

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Une famille de vecteurs contenant le vecteur nul est liée.	☐	☐
2. En dimension finie, une famille génératrice est une base.	☐	☐
3. $\mathbb{K}^2$ et $\mathbb{K}_2[X]$ sont isomorphes.	☐	☐
4. La somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels est directe si, et seulement si, leurs intersections deux à deux sont réduite à $\{0_E\}$.	☐	☐
5. L'image d'une famille finie libre par une application linéaire injective est une famille libre.	☐	☐
6. Toute famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension finie a un cardinal supérieur ou égal à toute famille libre.	☐	☐
7. L'espace des polynômes pairs de degré inférieur ou égal à n et l'espace des polynômes impairs de degré inférieur ou égal à n sont supplémentaires dans $\mathbb{K}_n[X]$.	☐	☐
8. Le rang d'une famille liée est strictement inférieur à son cardinal.	☐	☐
9. Si E et F sont de dimensions finies, il suffit que l'application linéaire u de E dans F soit injective (respectivement surjective) pour être bijective.	☐	☐
10. Dans $\mathbb{K}^4$, l'équation : $ax+by+cz+dt=0$, où $(a,b,c,d) \neq 0_{\mathbb{K}^4}$ définit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^4$ de dimension 3.	☐	☐
11. Il existe des applications linéaires injectives de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.	☐	☐
12. Il existe des applications linéaires surjectives de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$.	☐	☐
13. L'ensemble des polynômes de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à $n+1$.	☐	☐
14. La famille $\{x \mapsto \cos x, x \mapsto \cos 2x\}$ est liée dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.	☐	☐
15. La somme des $n+1$ polynômes interpolateurs de Lagrange étant égale à 1, ces polynômes forment une famille liée.	☐	☐

Énoncé des exercices

Familles libres et sommes d'espaces vectoriels

Exercice 1.1 : $n \geqslant 1$, dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, analyser la liberté des familles suivantes :

1. $\mathcal{F}_1 = (x \mapsto |x-1|,\ x \mapsto |x-2|, ..., x \mapsto |x-n|)$.

2. $\mathcal{F}_2 = (x \mapsto x-1,\ x \mapsto x-2, ..., x \mapsto x-n)$.

3. $\mathcal{F}_3 = (x \mapsto \cos x, x \mapsto \cos 2x, ..., x \mapsto \cos nx)$.

4. $\mathcal{F}_4 = \left(x \mapsto e^{p^2 x}\right)_{p\in\mathbb{N}}$, $x \in \mathbb{R}_+^\star$.

Exercice 1.2 : Dans $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on considère les vecteurs : $\vec{u}(1,-1,1)$, $\vec{v}(0,-1,2)$, $\vec{w}(1,-2,3)$ et on pose $\mathcal{F} = \{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$.

1. La famille $\mathcal{F}$ est-elle liée ? Déterminer une base de $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{F})$.

2. Soit $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+2y+z = 0\}$. Donner une base de G. Puis montrer que $G = \mathsf{Vect}\,(\mathcal{F})$.

Exercice 1.3 : Soit, dans $\mathbb{R}^3$, $F = \mathsf{Vect}\,\{(1,1,0),(2,0,-1)\}$ et $G = \mathsf{Vect}\,\{(1,-1,0),(1,0,-2)\}$.

1. Justifier, sans calculs, que $F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

2. Déterminer $F \cap G$.

3. Trouver un supplémentaire F' de $F \cap G$ dans F, puis un supplémentaire G' de $F \cap G$ dans G.

Exercice 1.4 : Dans $E = \mathbb{C}^n$, soit $G = \mathsf{Vect}\,(\{(1,...,1)\})$, F le *s.e.v* des n-uplets $(x_1,...,x_n)$ de E tels que : $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$. Montrer que $F \oplus G = E$. Préciser le projeté d'un vecteur de E sur G dans la direction de F puis sur F dans la direction de G.

D'après Concours Communs Mines-Télécom, filière PSI

Exercice 1.5* : Soit $E_1, E_2, \cdots, E_n$ n sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E $(n \geqslant 2)$, montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $E_1, E_2, \cdots, E_n$ sont en somme directe ;

(2) $E_1, E_2, \cdots, E_{n-1}$ sont en somme directe et $(E_1 + E_2 + \cdots + E_{n-1}) \cap E_n = \{0_E\}$.

Exercice 1.6* : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}$.. On définit une famille de polynômes $(A_0, A_1, ..., A_n)$ en posant : $A_0 = 1$ et, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $A_k = \dfrac{1}{k!}X(X-ka)^{k-1}$.

1. Démontrer que la famille $(A_0, ..., A_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

2. Démontrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $A_k'(X) = A_{k-1}(X-a)$.

3. Montrer, pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, $A_k^{(j)}(X) = A_{k-j}(X-ja)$. En déduire, pour tout j et k éléments de $[\![0,n]\!]$, la valeur de $A_k^{(j)}(ja)$. (On distinguera suivant les cas $j < k$, $j = k$ ou $j > k$.)

Soit P un élément de $\mathbb{C}_n[X]$ et soient $\alpha_0, ..., \alpha_n$ des nombres complexes tels que $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k$.

4. Démontrer que, pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, $\alpha_j = P^{(j)}(ja)$.

5. En déduire : $\forall (a,x,y) \in \mathbb{C}^3$, $(x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{n} x(x-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}$.

(**Identité binomiale d'Abel**.)

D'après Centrale-Supélec, filière PSI

■ Applications linéaires et théorème du rang

Exercice 1.7 : Dans le $\mathbb{K}$-ev E, on considère $(\phi, \psi) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que : $\phi \, o \, \psi = \psi \, o \, \phi$.
1. Montrer que $\mathsf{Im}\,\phi$ et $\mathsf{Ker}\,\phi$ sont stables par ψ.
2. En déduire deux autres inclusions du même type.
3. Si $E = \mathsf{Ker}\,\phi \oplus \mathsf{Ker}\,\psi$, montrer les inclusions : $\mathsf{Im}\,\phi \subset \mathsf{Ker}\,\psi$ et $\mathsf{Im}\,\psi \subset \mathsf{Ker}\,\phi$.

D'après Concours Communs Mines-Télécom, filière PSI

Exercice 1.8 : Ici $\dim E = n$, $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tels que $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$.
Montrer que $\mathsf{Im}\,(f \, o \, g) \subset \mathsf{Im}\, f$. Comparer alors le rang de f et de g.

Exercice 1.9 : Montrer que $\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P(X) \mapsto P(X^2) + (1 + X^2)P(X)$ est linéaire.
Est-elle injective ? Surjective ?

D'après CCINP, filière PSI

Exercice 1.10 : Dans E de dimension finie, soit $\phi \in \text{Ł}(E)$ tel que $\phi^3 = \phi$.
1. Montrer que $E = \mathsf{Ker}\,\phi \oplus \mathsf{Im}\,\phi$.
2. Montrer que $\mathsf{Im}\,\phi$ est stable par ϕ et que sa restriction à $\mathsf{Im}\,\phi$ est un automorphisme.

D'après École de l'air

Exercice 1.11* : E et F espaces vectoriels, $u \in L(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, E)$ avec $v \, o \, u = \mathrm{Id}_E$.
Montrer que $\mathsf{Ker}\, v \cap \mathsf{Im}\, u = \vec{0}$. Puis montrer : $\mathsf{Ker}\, v \oplus \mathsf{Im}\, u = F$.

D'après Mines-Ponts, filière PSI

Exercice 1.12 :** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\Delta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], P \mapsto P(X + 1) - P(X)$.
1. Montrer que $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ et qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta^p = 0$.
2. En déduire pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$: $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} P(X + j) = 0$.

D'après Polytechnique et Centrale-Supélec, filière PSI

Exercice 1.13 : Soit f et g des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E.
On suppose que : $E = \mathsf{Im}\, f + \mathsf{Im}\, g = \mathsf{Ker}\, f + \mathsf{Ker}\, g$. Montrer que ces deux sommes sont directes.

D'après Concours Communs Mines-Télécom et Concours ENSEA, filière PSI

■ Projecteurs et endomorphismes nilpotents

Exercice 1.14 : Soit $(f_1, ..., f_n) \in (\mathcal{L}(E))^n$ avec $f_1 + ... + f_n = \mathrm{Id}$.
On suppose de plus que pour tous entiers i et j compris entre 1 et n, $i \neq j \Rightarrow f_i \, o \, f_j = 0$.
Montrer que pour tout i, f_i est une projection vectorielle. Puis que : $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} \mathsf{Im}\, f_i$.

D'après Concours Communs Mines-Télécom et Concours ENSEA, filière PSI

Exercice 1.15* : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\phi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice m (c'est-à-dire tel que $\phi^m = 0$ et $\phi^{m-1} \neq 0$.)
1. Montrer que $m \leqslant n$.
2. Soit p un projecteur de E tel que $\mathsf{Ker}\, p \subset \mathsf{Ker}\, \phi$. Montrer : $\forall j \geqslant 2$, $p \, o \, \phi^j = (p \, o \, \phi)^j$.

D'après Polytechnique, filière PSI

Exercice 1.16 : On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, deux projecteurs p et q de E, vérifiant $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur.

2. Montrer que : $\mathsf{Im}\,(p \circ q) = \mathsf{Im}\,p \cap \mathsf{Im}\,q$ et $\mathsf{Ker}\,(p \circ q) = \mathsf{Ker}\,p + \mathsf{Ker}\,q$.

D'après CCINP, filière PSI

Exercice 1.17* : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice p (*i.e* $f^p = 0$) et Φ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par : $\Phi(g) = f \circ g - g \circ f$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Phi^n(g) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f^{n-k} \circ g \circ f^k$.

2. Montrer que Φ est nilpotent et majorer son indice de nilpotence.

D'après Polytechnique, filière PSI

Exercice 1.18 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$, on suppose que f est un endomorphisme de E vérifiant l'égalité :

$$f^2 = -\mathrm{Id}_E.$$

Par ailleurs, $\vec{x}$ désigne un vecteur non nul de E.

1. Montrer que $f(\vec{x})$ n'est pas colinéaire à $\vec{x}$, puis qu'aucune droite de E n'est stable par f.

2. Montrer que le plan $\mathsf{Vect}\left(\vec{x}, f(\vec{x})\right)$ est stable par f.

Exercice 1.19 : E étant un $\mathbb{K}$-ev, soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant l'égalité :

$$\phi^3 = Id_E.$$

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer que $E = \mathsf{Ker}\,(\phi - Id_E) \oplus \mathsf{Ker}\,(\phi^2 + \phi + Id_E)$.

2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que $\mathsf{Ker}\,(\phi^2 + \phi + Id_E) = \mathsf{Ker}\,(\phi - jId_E) \oplus \mathsf{Ker}\,(\phi - j^2 Id_E)$, où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

En déduire : $E = \mathsf{Ker}\,(\phi - Id_E) \oplus \mathsf{Ker}\,(\phi - jId_E) \oplus \mathsf{Ker}\,(\phi - j^2 Id_E)$.

■ Hyperplans et formes linéaires

Exercice 1.20 : Vérifier que les parties suivantes sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. Déterminer, pour chacun d'eux, sa dimension et une de ses bases.

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ; x - y + z - t = 0\} \\ G &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ; x + y = z + t = 0\} \end{aligned}$$

Exercice 1.21 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\vec{x}_0$ un vecteur non nul de E et u une forme linéaire non nulle. On définit l'application f en posant $f(\vec{x}) = u(\vec{x})\vec{x}_0$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. Quel est son rang ?

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un projecteur.

4. Soit un entier naturel $k > 0$. Calculer f^k.

Exercice 1.22 : Si $n \geqslant 2$, soit : $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X],\ \int_0^1 P(t)\,dt = 0 \right\}$.

Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}_n[X]$.

D'après Concours ENSEA-ENSIIE, filière PSI

■ Maths avec Python : fonctions et polynômes de Lagrange

Exercice 1.23 : Soit $f : n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ n/2 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ 3n+1 & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases}$.

1. Programmer la fonction f en Python.

2. Écrire une procédure PYTHON nommée `Syracuse` qui reçoit un entier n et renvoie la suite des entiers obtenus en appliquant successivement f jusqu'à ce que l'on obtienne 1 ainsi que le nombre d'itérations nécessaires pour arriver à 1. Appliquer à $n \in [\![1, 5]\!]$. Que remarque t-on ?

3. Écrire en Python les commandes nécessaires pour obtenir le graphique du nombre d'itérations en fonction de l'entier initial. Dessiner ce graphique pour `Syracuse(n)` avec $n \in [\![1, 40]\!]$.

Exercice 1.24 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $P_n : t \mapsto \sum_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!}$.

1. Donner à l'écran des représentations graphiques de P_n pour $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ sur des intervalles adaptés. Que constate-t-on quant aux racines réelles de P_n suivant n ?

2. En utilisant P_n', mettre en oeuvre la méthode de Newton pour déterminer une valeur approchée d'une solution réelle de $P_n(t) = 0$ et tester votre procédure pour $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

3. Déterminer toutes les racines complexes de P_n dans le cas où $n = 3, n = 5$ et $n = 15$.

D'après Centrale-Supélec, filière PSI

Exercice 1.25 : 1. Créer une fonction `BASE` d'argument la liste $Xabs$, qui renvoie la liste des polynômes de la base d'interpolation de Lagrange associée aux valeurs de la liste $Xabs$. Appliquer au cas où $Xabs = [0, 1, 2]$ et retrouver ce résultat par le calcul.

2. En utilisant `BASE` comme sous-procédure, créer une fonction `POL_LAG` d'arguments `Xabs` et `f` qui renvoie le polynôme d'interpolation de Lagrange passant par les points dont les abscisses sont les valeurs de $Xabs$ et les ordonnées sont les images par f des valeurs de $Xabs$.
Appliquer avec $Xabs = [0, 1, 2]$ et la fonction $x \mapsto x^2$. Que remarque t-on ?
Appliquer avec $Xabs = [-1, 0, 1, 2, 3]$ et $f = \arctan$. On appellera dans la suite P_1 le dernier polynôme trouvé.

3. Tracer ensemble P_1 et la fonction arctan sur $[-1, 3]$. On pourra différencier les graphes avec l'option `linestyle`.

4. Retrouver P_1 en utilisant `interpolate.lagrange` de `scipy`.

Exercice 1.26* : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on fixe $n+1$ points distincts $a \leqslant x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n \leqslant b$. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on note L_j le $j^{\text{ème}}$ ***polynôme de la base d'interpolation de Lagrange*** associé à $(x_0, ..., x_n)$. En fixant encore $n+1$ points quelconques $y_0, ..., y_n$, on rappelle que le polynôme $L = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j$ est le ***polynôme de Lagrange*** associé à $((x_0, y_0), ..., (x_n, y_n))$.

1. Montrer que L est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $L(x_j) = y_j$.

2. Créer en Python une fonction `Lagrange` qui a pour argument trois listes $X = [x_0, ..., x_n]$, $Y = [y_0, ..., y_n]$ et $T = [t_0, ..., t_p]$, où les x_i sont deux à deux distincts et qui renvoie la liste $[L(t_0), ...L(t_p)]$, où L est le polynôme de Lagrange de la question 1.

3. Ici on suppose que $a = 0$, $b = 2$ et pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $x_j = j\frac{2}{n}$.
Tracer ensemble sur $[0, 2]$, le graphe de $f : x \mapsto e^{-x^2}$ et les polynômes de Lagrange associés au support $((x_0, f(x_0)), ..., (x_n, f(x_n)))$ pour tous les entiers n appartenant à $[\![1, 19]\!]$.

Exercice 1.27* : 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a,b])$, $(x_0,...,x_n) \in [a,b]^{n+1}$ **tous distincts** et P_n l'unique polynôme de degré au plus n qui satisfait à $P_n(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in [\![0,n]\!]$.

On pose : $\phi : [a,b] \setminus \{x_0,...,x_n\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{f(x) - P_n(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$.

On pose aussi : $\forall x \in [a,b] \setminus \{x_0,...,x_n\}$ fixé, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t) - P_n(t) - \phi(x)\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$.

a. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et s'annule aux $(n+2)$ points $x_0,...,x_n,x$ de $[a,b]$.

b. Démontrer qu'il existe $\zeta \in [a,b]$ tel que $g^{(n+1)}(\zeta) = 0$.

c. En déduire : $\forall x \in [a,b] \setminus \{x_0,...,x_n\}$, $\exists\, \zeta \in [a,b]$, $\phi(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}$.

d. En déduire : $\forall x \in [a,b]$, $|f(x) - P_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\sup_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle **polynôme de Tchebychev de degré** n la fonction définie par

$$T_n : [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(n \arccos x).$$

a. Calculer T_0, T_1 et T_2.

b. On pose $\alpha = \arccos x$, en remarquant que $T_n(x) = \mathfrak{Re}\left(e^{in\alpha}\right)$ montrer que T_n est un polynôme de degré exactement n.

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2}(x) = 2x\,T_{n+1}(x) - T_n(x)$. Retrouver le fait que T_n est un polynôme de degré n dont on donnera le coefficient dominant.

d. Ici $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer que T_n admet exactement n racines simples : $x_k = \cos\left(\dfrac{2k+1}{2n}\pi\right)$ pour tout k entier de $[\![0,n-1]\!]$.

e. Ici $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, T_n admet exactement $n+1$ extrema globaux : $z_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ et que $T_n(z_k) = (-1)^k$. Remarquer que $\sup_{x\in[-1,1]}|T_n(x)| = 1$.

3. Dans cette question, $[a,b] = [-1,1]$. L'objectif est de choisir les points $x_0,...,x_n$ utiles pour l'interpolation de Lagrange de telle manière que $\sup_{x\in[-1,1]}\left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right| \leqslant \sup_{x\in[-1,1]}|Q(x)|$ pour tout polynôme Q normalisé de degré $n+1$. Nous allons montrer que les points $x_0,...,x_n$ qui vérifient cette propriété sont les racines du polynôme de Tchebychev T_{n+1}.

Posons alors $\dfrac{1}{2^n}T_{n+1} = \overline{T}_{n+1}$ (et donc $\overline{T}_{n+1}$ est normalisé), considérons $Q \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ **normalisé** quelconque et posons : $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $x_j = \cos\left(\dfrac{2j+1}{2n+2}\pi\right)$ et $\forall k \in [\![0,n+1]\!]$, $z_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$.

a. Montrer que $\sup_{x\in[-1,1]}\left|\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)\right| = \dfrac{1}{2^n}$.

b. Montrer $\deg\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right) \leqslant n$ et $\forall k \in [\![0,n+1]\!]$, $\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right)(z_k) = Q(z_k) - \dfrac{(-1)^k}{2^n}$.

c. Supposons que $\dfrac{1}{2^n} > \sup_{x\in[-1,1]}|Q(x)|$ et $k \in [\![0,n+1]\!]$.

Montrer alors que si k est pair, $\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right)(z_k) < 0$ et si k est impair, $\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right)(z_k) > 0$.

En déduire qu'il y a $(n+1)$ changements de signe pour $\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right)$.

Établir alors une contradiction. Conclure.

4. Montrer que si $x = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2}v$, on a l'équivalence : $v \in [-1,1] \Leftrightarrow x \in [a,b]$.

En déduire les réels $x_0, ..., x_n$ de $([a,b])^n$ qui vérifient $\sup\limits_{x\in[a,b]} \left|\prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i)\right| \leqslant \sup\limits_{x\in[a,b]} |Q(x)|$ pour tout polynôme Q normalisé de degré $n+1$.

5. Application numérique. On suppose ici $f : x \mapsto \dfrac{1}{2+7x^2}$ et $[a,b] = [-1,1]$. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange $P9$ ayant pour support `X=np.linspace(-1,1,9)` et `f(X)` puis le polynôme d'interpolation de Lagrange $NewP9$ ayant pour support les 9 racines de T_9 et leurs images par f. Faire deux dessins où apparaissent les graphes de f et de $P9$ puis de f et de $NewP9$ sur $[-1,1]$. On pourra différencier les graphes avec l'option `linestyle`. De plus, on pourra utiliser la fonction `interpolate.lagrange` de `scipy`.

Indications

Ex. 1.1

Voir la **méthode 1.1**. *Ici, l'on a un « melting pot » de familles finies ou infinies.*
La récurrence est le maître mot de ce qu'il faut faire pour $\mathcal{F}_3$ et $\mathcal{F}_4$.

Ex. 1.3

Pour la première question, raisonner sur les dimensions.
Pour la troisième question, on a l'embarras du choix niveau supplémentaire.

Ex. 1.4

Pour montrer $F \oplus G = E$, il y a plusieurs méthodes. Commencer ici par étudier $F \cap G$. C'est l'occasion aussi de revoir le projeté d'un vecteur et les projections. Allez à la **méthode 1.7**.

Ex. 1.5

Pour le sens direct, penser que si $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \vec{x}_i = 0$ *alors* $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \vec{x}_i + \vec{0} = \vec{0}$.

Pour le sens réciproque, partir de $\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{x}_i = \vec{0}$, *où* $\vec{x}_i \in E_i$. *Il s'agit de prouver :* $\forall i, \vec{x}_i = \vec{0}$.

Ex. 1.6

1. *C'est une famille échelonnée en degré ! À vous de continuer.*
2. *On sépare le cas $k = 1$ et pour $k \geqslant 2$, on dérive la formule définissant A_k et on l'arrange.*
3. *Pour la première égalité, on utilisera la question précédente. Pour la seconde inégalité, on distinguera bien les cas $j < k$, $j = k$ et $j > k$. Il faudra trouver 0 ou 1 selon les cas.*
4. *On remarquera :*

$$P^{(j)}(ja) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k^{(j)}(ja).$$

Et on utilisera la question précédente.
5. *Comme A_k possède le groupement $(X-ka)^{k-1}$ et l'identité à montrer le groupement $(x-ka)^{k-1}$, on va supposer y fixé et $(x+y)^n$ un polynôme de variable x.*
On va poser $P = (X+y)^n$ et comme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on pourra appliquer le résultat de **4**.

Ex. 1.7

Pas d'indication : il faut vous entraîner à manipuler Ker *et* Im. *C'est l'esprit de la* **méthode 1.4**.

Ex. 1.8

N'oubliez pas que $\mathrm{Im}\, f_1 \subset \mathrm{Im}\, f_2 \Rightarrow \mathrm{Rg}\,(f_1) \leqslant \mathrm{Rg}\,(f_2)$.

Ex. 1.9

C'est typiquement les **méthode 1.4** *et* **méthode 1.5**. *On manipule aussi les degrés des polynômes.*

Ex. 1.10

1. *Vous avez pensé au théorème du rang, cela tombe bien, nous aussi !*
Maintenant, on peut faire une analyse-synthèse (voir **méthode 1.8***), mais c'est plus long.*
2. *On rappelle qu'en dimension finie, si* ϕ *est de noyau nul,* ϕ *est...*

Ex. 1.11

Pour la première égalité, on part d'un vecteur $\vec{y} \in \mathrm{Ker}\, v \cap \mathrm{Im}\, u$, *et on montrera qu'il est nul.*
Pour la somme de la deuxième égalité, on introduit $\vec{x} \in F$ *quelconque qui s'exprime comme somme d'un vecteur de* $\mathrm{Ker}\, v$ *et d'un vecteur de* $\mathrm{Im}\, u$ *et on appliquera un développement par analyse-synthèse. C'est la* **méthode 1.8**. *En effet, contrairement à l'exercice précédent, comme on est en dimension quelconque, toute tentative d'user du théorème du rang est « verboten » !*

Ex. 1.12

1. $P(X)$ *et* $P(X+1)$ *sont deux polynômes de même degré et de même coefficient dominant. Donc le degré de* $\Delta(P)$ *est inférieur strictement à celui de* P.
2. *Commencer par calculer* $\Delta^2(P)$ *puis* $\Delta^3(P)$ *puis deviner une formule qui donne* $\Delta^r(P)$ *pour* r *entier en s'inspirant de la formule à démontrer.*

Ex. 1.13

L'erreur classique est de prendre $\vec{x} \in \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g$ *et de vouloir* $\vec{x} = 0$. *L'hypothèse « dimension finie » est importante. Appliquer alors le théorème du rang à* f *et* g *et aussi la formule de Graßmann appliquée à* $\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$ *d'une part et* $\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g$ *d'autre part.*

Ex. 1.14

C'est un exercice qui généralise la notion de projecteur associé vue en première année ($p+q = \mathrm{Id}$*). On rappelle que si* f_i *est un projecteur et* $\vec{u}_i \in \mathrm{Im}\, f_i$ *alors* $f_i(\vec{u}_i) = \vec{u}_i$.

Ex. 1.15

1. *Comme* ϕ *est nilpotent d'indice* m, *il existe* $\vec{u}$ *tel que* $\phi^{m-1}(\vec{u}) \neq 0$. *Montrer alors que la famille* $\left(\phi^{m-1-k}(\vec{u}), ..., \phi^{m-1)}(\vec{u})\right)$ *est libre* $\forall k \leqslant m-1$. *Cela ressemble à une certaine méthode, non ?*
2. *Patron, vous nous servirez une petite récurrence, une !*

Ex. 1.16

Procéder par double inclusion pour les deux égalités.
Allez vous promener du côté de la **méthode 1.9** *pour prendre de l'inspiration !*

Ex. 1.17

1. *On introduit* $D : g \mapsto f \circ g$ *et* $G : g \mapsto g \circ f$ *et on vérifie que* D *et* G *commutent.*
2. *Il faut choisir la puissance* n *assez grande, c'est-à-dire de telle manière que l'un des deux entiers* k *et* $n-k$ *est supérieur ou égal à* p.

Ex. 1.18

1. *On peut raisonner par l'absurde.*

Ex. 1.19

On applique typiquement la méthode de l'analyse-synthèse indiquée dans la **méthode 1.8**. *On peut aussi aller voir l'exemple de la* **méthode 1.10** *qui développe cette manière de raisonner.*

Ainsi, pour appliquer pile-poil le même développement, on peut remarquer que :
$\phi^3 - Id_E = (\phi - Id_E) \, o \, (\phi^2 + \phi + Id_E) = (\phi^2 + \phi + Id_E) \, o \, (\phi - Id_E)$.

Ex. 1.20

Vous avez reconnu des équations d'hyperplans, je vous fais confiance.

Ex. 1.21

f est un projecteur si, et seulement si, $f \, o \, f = f$. Fallait-il le rappeler ?

Ex. 1.22

Mettre en évidence une forme linéaire non nulle dont H est le noyau, puis une droite vectorielle quelconque non incluse dans H. Allez voir l'exemple de la **méthode 1.12**.

Ex. 1.23

1. *On jouera de l'`if`, de l'`elif` et de l'`else` (et sans instrument de musique !)*
2. *Pour $n = 1$, on a $L = [1]$ et remarquer que 1 est toujours le dernier élément de L.*
Pour créer un compteur, on tape initialement $i = 0$ puis dans la boucle, on tape à chaque pas $i+ = 1$ et après la boucle (qui est du type `while x>1 :`), le dernier i est le nombre d'itérations.
3. *On rappelle que l'on doit importer `matplotlib.pyplot`.*

Ex. 1.24

1. *Pour créer des polynômes, on a deux façons de les définir. On peut les créer comme des fonctions que l'on notera ici $P(n,t)$ ou alors comme des listes, que l'on notera $PP(n)$ pour différencier, avec `numpy.Polynomial`. On fera les deux dans le corrigé.*
2. *Rappelons la méthode dite de* **Newton**. *Elle consiste en la construction d'une suite $(t_p)_p$. Le premier terme t_0 est choisi « proche » de l, solution de $f(t) = 0$ (après une étude rapide de f). La valeur t_{p+1} est l'intersection de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse t_n avec l'axe Ot. Écrivons une fonction `newton(f,df,a,epsilon)` qui met en oeuvre cette méthode (df est la fonction dérivée de f) et la précision ϵ sera considérée atteinte lorsque $|f(t_p)| \leqslant \epsilon$.*
La tangente en M d'abscisse t_p a pour équation : $y = f(t_p) + f'(t_p)(t - t_p)$.
Rapidement, on a : $t_{p+1} = t_p - \dfrac{f(t_p)}{f'(t_p)}$. Dans le cas présent, pour avoir la fonction dérivée, on commence par remarquer que $P_n'(t) = P_{n-1}(t)$ pour tout t.

```
def newton(f,df,a,epsilon) :
    t = a; n = 0; val = f(t)
    while abs(val) >  epsilon :
        n += 1; t = t - val / df(t); val = f(t)
    print(" nombre d'itérations nécessaires : ", n); return t
```

Ex. 1.25

1. *On pourra utiliser la fonction `Polynomial` de `numpy.polynomial` pour construire la liste des polynômes interpolateurs $L_0, ..., L_n$ de Lagrange. Au départ, on initialise avec `L=[]`. Attention, comme dans le cours et dans l'exercice, on a $n+1$ valeurs $x_0, ..., x_n$, la longueur de `Xabs` est $n+1$ (en effet pour `Xabs=[0,1,2]`, $n = 2$ et `len(Xabs)` vaut 3), on tapera donc `n = len(Xabs) -1`.*
Puis on construit les polynômes $L_0, L_1, ..., Ln$ dans une boucle double en faisant des produits de polynômes de degré 1. Par exemple j est l'indexation de la boucle extérieure et i celle de la boucle intérieure. Pour éviter de faire appel à `range(0,j)` puis `range(j+1,n)`, on peut utiliser `if i!=j` pour raccourcir un peu. On initialise avec `P=Polynomial([1])` qui est $P = 1$. On rappelle enfin que `Polynomial([a,b])` est $a + bX$. Voir la **méthode 1.16** *pour encore plus d'informations.*

2. *Les ordonnées sont les valeurs* `f(Xabs[i])` *pour* i *dans le* `range(0,n+1)`*. De plus, la fonction* arctan *est prédefinie dans le module* `numpy` *d'alias* `np`*. On tapera donc* `np.arctan`
3. *Allez voir la* **méthode 1.15** *!*
4. *Allez voir la* **méthode 1.17** *et l'exemple développé juste après pour la syntaxe.*

Ex. 1.26

1. *Je sais, c'est du cours !*
On pourra utiliser le fait que $L_i(x_j) = \delta_i^j$*, où* $\delta_i^j = 1$ *si* $i = j$ *et* 0 *si* $i \neq j$*.*
2. *Ici* `Lagrange` *doit renvoyer une liste de flottants et ni un polynôme ni une fonction. On tapera* `n = len(Xabs) - 1` *pour indexer de* 0 *à* n *les polynômes* L_i *de la base de Lagrange.*
3. *Pour tracer les polynômes de Lagrange, on peut s'inspirer de l'***exercice 1.25** *en construisant des polynômes avec* `Polynomial` *de* `numpy.polynomial` *ou avec* `interpolate.lagrange` *de* `scipy` *ou la transformer en une fonction en adaptant la procédure* `Lagrange` *de la question précédente, c'est ce que l'on va faire dans le corrigé, histoire de changer. Dans le corrigé, on l'appelle* `Fonct_Lagrange`*. Plus précisément, l'argument* T *devient* x *ce qui va permette de créer des fonctions polynomiales.*

Ex. 1.27

1. *Vous avez tous reconnu que* P_n *est le maintenant célèbre polynôme d'interpolation de Lagrange associé au support* $((x_0, f(x_0), ..., (x_n, f(x_n))$*. Pour* **1.b**, *on appliquera le théorème de Rolle autant que possible. Pour* **1.c**, *on dérivera* g *jusqu'à la dérivée* $(n+1)^{ème}$*.*
Enfin, pour **1.d**, *on utilisera* **1.c** *et on n'oubliera pas de traiter le cas où* x *vaut un des* x_i*.*
2. *Pour* **2.b**, *on développera* $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$*, après avoir rappelé que* $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$*.*
Pour **2.c**, *on utilisera la formule du cosinus d'une somme pour l'égalité et on fera une récurrence pour le coefficient dominant et le degré.*
Pour **2.d**, *on repartira de la définition de* T_n *avec* arccos*.*
Pour **2.e**, *on partira toujours de la définition de* T_n *que l'on dérivera.*
3. *Attention, ici* T_{n+1} *est de degré* $n+1$ *et a donc* $n+1$ *racines.*
Pour **3.a**, *on utilisera le fait que* $\sup_{x\in[-1,1]} \left|\overline{T}_{n+1}(x)\right| = \dfrac{1}{2^n}$*.*
Pour **3-b**, *on utilisera le fait que* $T_{n+1}(z_k) = (-1)^k$*.*
Pour **3-c**, *que dire d'un polynôme de degré* n *qui s'annule* $n+1$ *fois ?*
4. *En utilisant le résultat de* **1.d** *pour* $a = -1$ *et* $b = 1$ *et le résultat de* **3**, *que peut-on dire du choix des* $n+1$ *racines de* T_{n+1} *pour faire l'interpolation de Lagrange sur* $[-1, 1]$ *? Et après, on doit passer à* $[a, b]$*.*
5. *Pour la syntaxe des graphes, on pourra aller s'inspirer de la* **méthode 1.15** *et pour la syntaxe du calcul d'un polynôme d'interpolation de Lagrange pour un support donné, on pourra s'inspirer de la* **méthode 1.17***.*

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
V	F	F	F	V	V	V	V	F	V	F	F	F	F	F

1. Toute famille contenant une famille liée est liée et $\{0_E\}$ est clairement liée.
2. Une famille génératrice n'est pas nécessairement libre.
3. $\mathbb{K}_2[X]$ est isomorphe à $\mathbb{K}^3$. ($\dim \mathbb{K}_2[X] = 3$.)
4. Contre-exemple : considérons trois droites vectorielles distinctes d'un plan vectoriel. Leurs intersections deux à deux sont réduites à $\{0_E\}$. Si leur somme était directe, la dimension de cette somme serait la somme de leurs dimensions, c'est-à-dire 3. C'est contradictoire avec le fait que cette somme doit être un sous-espace vectoriel d'un plan vectoriel.
5. Soit $(\vec{u}_k)_{k\in[\![1,m]\!]}$ une famille finie finie libre de E et $(a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{K}^m$, tels que $\sum_{k=1}^{m} a_k f(\vec{u}_k) = f\left(\sum_{k=1}^{m} a_k \vec{u}_k\right) = \vec{0}_F$. Comme f est injective, $f(\vec{s}) = \vec{0}_F$ implique $\vec{s} = \vec{0}_E$, donc $\sum_{k=1}^{m} a_k \vec{u}_k = \vec{0}_E$ et $(a_1, a_2, \dots, a_m) = (0, 0, \dots, 0)$ puisque on sait que la famille $(\vec{u}_k)_{k\in[\![1,m]\!]}$ est libre par hypothèse. Donc $(f(\vec{u}_k))_{k\in[\![1,m]\!]}$ est libre.
6. Conséquence du théorème de la base incomplète.
7. Soit P un polynôme quelconque, alors $P(X) = E(X) + U(X)$ avec $E(X) = \frac{1}{2}(P(X) + P(-X))$ pair, et $U(X) = \frac{1}{2}(P(X) - P(-X))$ impair.
8. Si le sous-espace vectoriel engendré par cette famille avait pour dimension le cardinal de la famille, alors celle-ci, famille génératrice, serait une base de ce sous-espace vectoriel, donc une famille libre.
9. Il manque l'hypothèse : $\dim E = \dim F$.
10. D'après la **proposition 1.39** du cours, c'est bien une équation d'un hyperplan de $\mathbb{K}^4$, donc d'un sous-espace vectoriel de dimension 3.
11. Le théorème du rang dit que c'est impossible ! (Car sinon $2 = \dim \operatorname{Im} \phi \leq 1$.)
12. Comme l'assertion précédente ! (car sinon $\dim \operatorname{Ker} \phi = -1$.)
13. L'ensemble des polynômes de degré n n'est pas stable par addition.
14. Elle est libre !
15. La famille $(l_0, l_1, ..., l_n)$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$ mais $(1, l_0, l_1, ..., l_n)$ est liée.

Erreurs classiques

- Pour montrer que la somme de plus de deux sous-espaces vectoriels est directe, penser qu'il suffit de montrer que leurs intersections deux à deux sont réduites à $\{0_E\}$.
- En dimension infinie, considérer qu'un endomorphisme injectif est forcément surjectif.
- Utiliser le noyau pour montrer l'injectivité d'une application *non linéaire*.
- Dans la formule du rang, remplacer la dimension de l'espace de départ par celle de l'espace d'arrivée (qui peut être infinie !).

Corrigé

Corrigé des exercices

Exercice 1.1

1. Posons $f_i(x) = |x - i|$. Supposons j un entier tel que : $\lambda_j f_j = -\sum_{k \neq j} \lambda_k f_k$.

On ne peut pas avoir $\lambda_j \neq 0$ car alors le membre de gauche de l'égalité est non dérivable en $x = j$ alors que le membre de droite l'est.

$\mathcal{F}_1$ est donc libre.

Par suite tous les λ_i sont nuls. $\mathcal{F}_1$ est libre.

$\mathcal{F}_2$ est libre pour $n = 1$ et $n = 2$.

2. Posons $g_i(x) = x - i$. On remarque que $g_1 + g_3 = 2g_2$ et donc $\mathcal{F}_2$ est liée pour $n \geqslant 3$.

3. $(\cos x)$ est libre. Supposons $(\cos x, ..., \cos nx)$ libre. Posons l'égalité (1) :

$$\forall x,\ \lambda_1 \cos x + ... + \lambda_n \cos(nx) + \lambda_{n+1} \cos((n+1)x) = 0.$$

On peut généraliser à une famille de cos *et de* sin.

On dérive deux fois (1). On appelle (2) l'égalité obtenue. On multiplie (1) par $(n+1)^2$ et on l'ajoute à (2).

Il reste : $\forall x,\ \left[(n+1)^2 - 1\right] \lambda_1 \cos x + ... + \left[(n+1)^2 - n^2\right] \lambda_n \cos(nx) = 0$.

On applique l'hypothèse de récurrence et donc : $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$. Il reste dans (1) : $\lambda_{n+1} \cos((n+1)x) = 0$. On a $\lambda_{n+1} = 0$. La famille $\mathcal{F}_3$ est libre.

Montrer la liberté de $\mathcal{F}_4$, c'est montrer celle de toute sous-famille finie.

4. Posons $h_p(x) = e^{p^2 x}$. Quitte à réindexer, posons $\alpha_1 < ... < \alpha_n$ n entiers et montrons que $(h_{\alpha_1}, ..., h_{\alpha_n})$ est libre.

Partons de : $\forall x,\ a_1 h_{\alpha_1}(x) + ... + a_n h_{\alpha_n}(x) = 0$.

On multiplie par $e^{-\alpha_n x}$ cette égalité et on fait tendre x vers $+\infty$.

De proche en proche, on montre que $a_i = 0$ pour tout i.

Il reste : $a_n = 0$. Par récurrence, la famille $\mathcal{F}_4$ est libre.

Exercice 1.2

1. $u + v = w$ et donc $\mathcal{F}$ est une famille liée.

(u, v) est libre et génératrice donc base de $\mathcal{F}$.

2. On voit rapidement que comme $(x, y, z) \in G \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, y, -x - 2y)$, la famille $((1, 0, -1), (0, 1, -2))$ est libre dans G et est génératrice donc en est une base. Comme $(1, -1, 1)$ et $(0, -1, 2)$ vérifient l'équation qui caractérise G, ces vecteurs sont dans G. Ainsi, $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{F}) \subset G$. Comme leurs dimensions sont égales, ces sous-espaces vectoriels le sont aussi.

On rappelle que $F \subset G$ si, et seulement si, une base de F est une famille de vecteurs de G.

Exercice 1.3

1. Si $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, alors ces deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe, donc : $\mathsf{dim}\,(F + G) = \mathsf{dim}\,F + \mathsf{dim}\,G$.

D'après le **proposition 1.20**.

Or, les vecteurs engendrant F ne sont pas colinéaires, donc : $\mathsf{dim}\,F = 2$.

De même, $\mathsf{dim}\,G = 2$, d'où : $\mathsf{dim}\,(F + G) = 4$.

Et donc : $F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

C'est contradictoire car $F + G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. $(x, y, z) \in F \cap G$ équivaut aux propositions successives :

$$\begin{cases} \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (x, y, z) = \lambda(1, 1, 0) + \mu(2, 0, -1) \\ \exists (\lambda', \mu') \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (x, y, z) = \lambda'(1, -1, 0) + \mu'(1, 0, -2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\exists (\lambda, \mu, \lambda', \mu') \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } \begin{cases} x &= \lambda + 2\mu &= \lambda' + \mu' \\ y &= \lambda &= -\lambda' \\ z &= -\mu &= -2\mu' \end{cases} \quad \text{Donc :}$$

$$x = y - 2z = -y - \tfrac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} x &= -\frac{5z}{4} \\ y &= \frac{3z}{4} \end{cases} \quad \text{Et : } F \cap G = \mathsf{Vect}\,(-5, 3, 4).$$

3. Puisque F est de dimension 2, toute droite vectorielle incluse dans F et non confondue avec $F \cap G$ est un supplémentaire F' dans F de $F \cap G$.
(On a bien $F' \cap (F \cap G) = \{0_E\}$ et $\dim F = \dim F' + \dim (F \cap G)$.)
On peut choisir, par exemple, $F' = \text{Vect}\,(1,1,0)$ ou $\text{Vect}\,(2,0,-1)$. De même, on peut choisir, par exemple : $G' = \text{Vect}\,(1,-1,0)$ ou $\text{Vect}\,(1,0,-2)$.

À retenir : on a l'existence mais jamais l'unicité d'un supplémentaire.

Exercice 1.4

Soit $\vec{u} = (x_1, ..., x_n) \in F \cap G$. $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $\vec{u} = (\lambda, ..., \lambda)$. Comme $\vec{u} \in F$, $n\lambda = 0$ et donc $\lambda = 0$. Ainsi, $\vec{u} = 0$. Puis $\dim F = n - 1$. (Voir la **proposition 1.39**.)
Comme $\dim F + \dim G = n = \dim E$, on a : $F \oplus G = E$.
Soit $\vec{u} = (x_1, ..., x_n) \in E$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $\vec{u} - (\lambda, ..., \lambda) \in F$.

On a l'équivalence : $(x_1 - \lambda) + ... + (x_n - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Le projeté de $\vec{u}$ sur G dans la direction de F est $\left[\frac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right](1, ..., 1)$ et le projeté de $\vec{u}$ sur F dans la direction de G est $\vec{u} - \left[\frac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right](1, ..., 1)$.

Pour montrer que F est un s.e.v, il suffit de dire que F est le noyau d'une forme linéaire non nulle et est donc un hyperplan de E. Vous pouvez faire aussi un preuve directe.

Exercice 1.5

▸ **Supposons vraie la proposition** (1).

Soit $(\vec{x}_i)_{i \in [\![1,n-1]\!]} \in E_1 \times \cdots \times E_{n-1}$ tel que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \vec{x}_i = \vec{0}_E$.

En complétant ce $(n-1)$-uplet par $\vec{0}_E$, on obtient tout simplement un n-uplet de $E_1 \times \cdots \times E_{n-1} \times E_n$ de somme nulle. Les E_1, $E_2, \cdots$, E_n étant en somme directe, chacun des vecteurs de ce n-uplet est nul : $\forall\, i \in [\![1, n-1]\!]$, $\vec{x}_i = 0_E$ et les E_1, $E_2, \cdots$, E_{n-1} sont en somme directe.
D'autre part, si $x \in (E_1 + E_2 + \cdots + E_{n-1}) \cap E_n$, alors :

$$\exists\, (\vec{x}_i)_{i \in [\![1,n-1]\!]} \in E_1 \times \cdots \times E_{n-1} \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^{n-1} \vec{x}_i, \text{ d'où :}$$

$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_{n-1} + (-\vec{x}) = \vec{0}_E$, avec $(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{n-1}, -\vec{x}) \in E_1 \times \cdots \times E_{n-1} \times E_n$,
puis : $\vec{x}_1 = \cdots = \vec{x}_{n-1} = -\vec{x} = \vec{0}_E$ et $(E_1 + E_2 + \cdots + E_{n-1}) \cap E_n = \left\{\vec{0}_E\right\}$.

C'est un peu délicat sans l'indication. Mais l'exercice est formateur.

▸ **Supposons vraie la proposition** (2).

Soit $(\vec{x}_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in E_1 \times \cdots \times E_n$ tel que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i = 0_E$, alors :

$$\vec{x}_n = -\vec{x}_1 - \cdots - \vec{x}_{n-1} \in (E_1 + E_2 + \cdots + E_{n-1}) \cap E_n.$$

Et donc : $\vec{x}_n = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_{n-1} = 0_E$, par hypothèse.
Les E_1, $E_2, \cdots$, E_{n-1} sont en somme directe donc $\vec{x}_1 = \cdots = \vec{x}_{n-1} = 0_E$ et finalement les E_1, $E_2, \cdots$, E_n sont bien en somme directe.

Exercice 1.6

1. C'est très classique, il suffit de montrer que la famille $(A_0, ..., A_n)$ est libre car son cardinal est $n+1$, dimension de $\mathbb{C}_n[X]$. On remarque immédiatement que A_0 est de degré 0 et que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $A_k = \dfrac{1}{k!}X(X - ka)^{k-1}$ est de degré k. La famille $(A_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est donc une famille échelonnée en degré. Elle est donc libre. En conclusion, c'est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Le rapport du jury a signalé qu'il y a eu des étourderies sur la dimension.

Corrigé

2. Démontrons que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $A'_k(X) = A_{k-1}(X - a)$.
Il est clair que pour $k = 1$, comme $A_1 = X$ et $A_0 = 1$, on a bien le résultat.

Signalons que la formule $A'_k(X) = A_{k-1}(X - a)$ a été souvent mal comprise le jour du concours, le membre de droite a été alors vu comme un produit au lieu d'une composition. Un argument de degré rendait d'ailleurs cette interprétation impossible.

Supposons $k \in [\![2, n]\!]$, $A'_k(X) = \left(\dfrac{1}{k!}X(X - ka)^{k-1}\right)'$.

Ce qui donne : $A'_k(X) = \dfrac{1}{k!}(X - ka)^{k-1} + \dfrac{1}{k!}X \cdot (k - 1)(X - ka)^{k-2}$.
Puis, en arrangeant,

$$A'_k(X) = \frac{1}{k!}\left((X - ka) + (k - 1)X\right)(X - ka)^{k-2} = \frac{1}{k!}\left(kX - ka\right)(X - ka)^{k-2}.$$

Il reste à mettre k devant et de simplifier avec $k!$.

$$A'_k(X) = \frac{1}{(k-1)!}(X - a)\left(X - ka\right)^{k-2}.$$

Enfin, $X - ka = (X - a) - (k - 1)a$. Et donc : $A'_k(X) = A_{k-1}(X - a)$.

3. • $A''_k(X) = A'_{k-1}(X - a) = A_{k-2}(X - a - a) = A_{k-2}(X - 2a)$.

La relation est triviale pour $j = 0$.

Puis, par récurrence immédiate, pour tout j entier jusqu'à k,

$$(1) \quad A_k^{(j)}(X) = A_{k-j}(X - ja).$$

• On remarque que si $j > k$, comme A_k est de degré k, $A_k^{(j)}(X) = 0$.

Ce cas n'est pas proposé dans le sujet mais pour bien poser les autres cas, c'est plus rigoureux.

a. Cas où $k = 0$
Ici $A_k = 1$ et $A_k^{(j)}(ja) = 1$ pour $j = 0$ et $A_k^{(j)}(ja) = 0$ pour $j \geqslant 1$.
b. Cas où $j < k$
Ici $k \geqslant 1$ nécessairement. On utilise (1), $\forall j \in [\![0, k - 1]\!]$, $A_k^{(j)}(ja) = A_{k-j}(0)$.
Or, $k - j \in [\![1, k]\!]$. Et par définition des polynômes A_k avec $k \geqslant 1$, on remarque que X divise A_k donc 0 est racine de A_k pour $k \geqslant 1$ et donc de A_{k-j} pour $j \in [\![0, k - 1]\!]$. On en déduit que $A_{k-j}(0) = 0$. Et donc : $A_k^{(j)}(ja) = 0$.
c. Cas où $j = k$ avec $k \geqslant 1$
On utilise encore (1). On a $A_k^{(j)}(X) = A_0(X - ja) = 1$. Et donc : $A_k^{(j)}(ja) = 1$.
d. Cas où $j > k > 0$
Il est clair que $A_k^{(j)}(X) = 0$ car A_k est de degré k. Donc $A_k^{(j)}(ja) = 0$.
Conclusion : on peut résumer tous les cas pour $(j, k) \in [\![0, n]\!]^2$.

$$A_k^{(j)}(ja) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k, \\ 1 & \text{si } j = k. \end{cases}$$

On utilise la linéarité de la dérivation et **3.**

4. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $P^{(j)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k^{(j)}$. Ainsi : $P^{(j)}(ja) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k^{(j)}(ja)$.
Toutes les quantités $\alpha_k A_k^{(j)}(ja)$ sont nulles sauf celle pour $k = j$ qui vaut $\alpha_j \times 1 = \alpha_j$ (car k variant de 0 à n et comme j est un entier entre 0 et n, k peut valoir j). On a bien le résultat.

Il s'agit bien entendu d'utiliser les questions précedentes.

5. Comme A_k possède le groupement $(X - ka)^{k-1}$ et l'identité à montrer le groupement $(x - ka)^{k-1}$, on va supposer y fixé et $(x + y)^n$ un polynôme de variable x. On va poser $P = (X + y)^n$ et comme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on peut appliquer le résultat de **4**. En effet, comme la famille $(A_0, ..., A_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$, il existe des scalaires $\alpha_0, ..., \alpha_n$ tels que : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k$ et donc pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $\alpha_j = P^{(j)}(ja)$.

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \left[P = (X+y)^n \Rightarrow P^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}(X+y)^{n-k}\right].$$

On en déduit les coefficients de P dans la base $(A_0, ..., A_n)$.

Encore une récurrence immédiate comme on dit mais rien ne vous interdit de la faire pour le training.

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \alpha_k = P^{(k)}(ka) = \frac{n!}{(n-k)!}(y+ka)^{n-k}.$$

On s'approche de l'identité voulue. Par ailleurs, on a :

$$P = (X+y)^n = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(ka)A_k = P^{(0)}(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}P^{(k)}(ka)X(X-ka)^{k-1}.$$

Puis $P^{(0)}(0) = y^n$. Et on utilise les formules donnant $P^{(k)}(ka)$.

$$(X+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\frac{n!}{(n-k)!}(y+ka)^{n-k}X(X-ka)^{k-1}.$$

On utilise : $\dfrac{1}{k!}\dfrac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k}$.

$$(X+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} X(X-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}.$$

Et finalement : $(x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x(x-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}$.

Il reste à remplacer X par x.

Exercice 1.7

1. C'est du cours ! Montrons la stabilité de $\mathsf{Im}\,\phi$ en cadeau. Si $\vec{u} \in \mathsf{Im}\,\phi$, $\exists\, \vec{v} \in E,\ \phi(\vec{v}) = \vec{u}$. Puis : $\psi(\vec{u}) = \psi(\phi(\vec{v})) = \phi(\psi(\vec{v})) \in \mathsf{Im}\,\phi$.

La stabilité à partir d'endomorphismes commutants : very important !

2. On a : $\mathsf{Im}\,\psi$ et $\mathsf{Ker}\,\psi$ sont stables par ϕ.

3. Soit $\vec{u} \in \mathsf{Im}\,\phi$, $\exists\, \vec{v},\ \phi(\vec{v}) = \vec{u}$. Et : $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, où $\vec{v}_1 \in \mathsf{Ker}\,\phi$ et $\vec{v}_2 \in \mathsf{Ker}\,\psi$. Donc $\vec{u} = \phi(\vec{v}_2)$ et $\psi(\vec{u}) = \psi(\phi(\vec{v}_2)) = \phi(\psi(\vec{v}_2)) = 0$ et $\vec{u} \in \mathsf{Ker}\,\psi$.

Exercice 1.8

• Si $x \in \mathsf{Im}\,(f \circ g)$, alors $\exists z \in E,\ x = (f \circ g)(z) = f(g(z))$, donc $x \in \mathsf{Im}\, f$. On en déduit que $\mathsf{Im}\,(f \circ g) \subset \mathsf{Im}\, f$.

• $f \circ g = g \Longrightarrow \mathsf{Im}\, g = \mathsf{Im}\,(f \circ g) \subset \mathsf{Im}\, f \Longrightarrow \mathsf{Rg}\, g \leqslant \mathsf{Rg}\, f$ et de même $g \circ f = f \Longrightarrow \mathsf{Rg}\, f \leqslant \mathsf{Rg}\, g$; finalement $\mathsf{Rg}\, g = \mathsf{Rg}\, f$.

Si F et G sont deux s.e.v. tels que $F \subset G$, alors $\dim F \leq \dim G$.

Exercice 1.9

Soit $P \in \mathsf{Ker}\,\phi$. Alors : $P(X^2) + (1+X^2)P(X) = 0$. Si P est de degré $n \geqslant 0$, $P(X^2)$ est de degré $2n$ et $(1+X^2)P$ est de degré $n+2$. La somme de ces polynômes ne peut faire 0 que s'ils sont de même degré, c'est-à-dire $2n = n+2$ ou encore $n = 2$. On pose alors $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$. $\phi(P)(X)$ a pour monôme dominant $2aX^4$, et $\phi(P)(X)$ ne peut pas être nul. Donc seul $P = 0$ convient et ϕ est injective.

On vérifie la linéarité sans souci : $\phi(aP+Q)(X) = a\phi(P)(X) + \phi(Q)(X)$.

Puis on remarque que $\phi(P)$ est de degré $\max(2n, n+2)$ et X (de degré 1) ne peut pas avoir d'antécédent par ϕ. ϕ n'est pas surjective.

Corrigé