PT/PT*

MATHS

1 DEVOIR CORRIGÉ PAR SEMAINE



avec annales
& corrigés commentés

Abdelkhalak El Hami
Bouchaïb Radi

ellipses

PT/PT*

MATHS



1 DEVOIR CORRIGÉ PAR SEMAINE

Bouchaïb RADI
Professeur des universités
Faculté des Sciences et Techniques
Settat, Maroc

Abdelkhalak EL HAMI
Professeur des universités
Institut National des Sciences
Appliquées de Rouen, France

ellipses

Conception graphique couverture : Nathalie FOULLOY

ISBN 9782340-118355

Dépôt légal : août 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Cet ouvrage satisfait le plus exactement possible aux exigences de la refonte des programmes de mathématiques des classes préparatoires PT 2ème année et il progresse au rythme de ce programme officiel (mai 2021).

Ce nouveau cours de mathématiques est organisé en douze chapitres qui développent successivement les différents thèmes de ce programme depuis les structures algébriques usuelles et réductions des endomorphismes et des matrices carrées jusqu'aux équations différentielles linéaires, calcul différentiel et optimisation. Le dernier chapitre est dédié aux problèmes de concours d'entrée aux grandes écoles.

Chaque chapitre est divisé en deux parties :

- La première partie présente les énoncés des problèmes concernant le chapitre traité.
- La deuxième partie concerne les corrigés détaillées des problèmes proposés avec des rappels et les méthodes utilisées.

Pour les élèves des classes préparatoires de PT, dont il suit exactement le nouveau programme, ou des préparations intégrées des INSA, ENSAM et UT, comme pour les étudiants de deuxième année universitaires, ce livre est un outil de travail pour mieux comprendre ce nouveau programme de mathématiques et il peut devenir un indispensable compagnon d'étude et de préparation aux concours d'entrée aux grandes écoles.

Sommaire

Introduction méthodologique 7

Devoirs

Algèbre linéaire

- Devoir 1.1 14
- Devoir 1.2 18
- Devoir 1.3 23

Espaces préhilbertiens et euclidiens

- Devoir 2.1 26
- Devoir 2.2 28

Fonctions vectorielles d'une variable réelle et courbes paramétrées

- Devoir 3.1 34
- Devoir 3.2 37

Séries numériques

- Devoir 4.1 42
- Devoir 4.2 44

Série entière

- Devoir 5.1 50
- Devoir 5.2 54

Intégration sur un intervalle quelconque

- Devoir 6.1 58
- Devoir 6.2 61

Variables aléatoires discrètes

- Devoir 7.1 66
- Devoir 7.2 69

Équations différentielles et calcul différentiel

- Devoir 8.1 72
- Devoir 8.2 74
- Devoir 8.3 76

Courbes et surfaces

- Devoir 9.1 80
- Devoir 9.2 84

Problèmes de concours

- Devoir 10.1 90
- Devoir 10.2 94
- Devoir 10.3 100
- Devoir 10.4 105
- Devoir 10.5 109
- Devoir 10.6 111
- Devoir 10.7 116
- Devoir 10.8 121
- Devoir 10.9 129
- Devoir 10.10 136

Corrigés

Algèbre linéaire

- Corrigé du devoir 1.1 146
- Corrigé du devoir 1.2 155
- Corrigé du devoir 1.3 164

Espaces préhilbertiens et euclidiens

- Corrigé du devoir 2.1 170
- Corrigé du devoir 2.2 173

Fonctions vectorielles d'une variable réelle et courbes paramétrées

- Corrigé du devoir 3.1 184
- Corrigé du devoir 3.2 188

Séries numériques

- Corrigé du devoir 4.1 198
- Corrigé du devoir 4.2 203

Série entière

- Corrigé du devoir 5.1 214
- Corrigé du devoir 5.2 228

Intégration sur un intervalle quelconque

- Corrigé du devoir 6.1 234
- Corrigé du devoir 6.2 238

Variables aléatoires discrètes

- Corrigé du devoir 7.1 250
- Corrigé du devoir 7.2 254

Équations différentielles et calcul différentiel

- Corrigé du devoir 8.1 260
- Corrigé du devoir 8.2 264
- Corrigé du devoir 8.3 270

Courbes et surfaces

- Corrigé du devoir 9.1 278
- Corrigé du devoir 9.2 288

Problèmes de concours

- Corrigé du devoir 10.1 300
- Corrigé du devoir 10.2 314
- Corrigé du devoir 10.3 325
- Corrigé du devoir 10.4 338
- Corrigé du devoir 10.5 352
- Corrigé du devoir 10.6 363
- Corrigé du devoir 10.7 372
- Corrigé du devoir 10.8 383
- Corrigé du devoir 10.9 402
- Corrigé du devoir 10.10 413

Introduction méthodologique

Ce document, « **PT – Mathématiques – Nouveau programme – Différents devoirs et problèmes de synthèse corrigés** » par B. Radi et A. El Hami, est bien plus qu'un simple recueil d'exercices. Il s'agit d'un outil de travail complet, conçu comme le compagnon d'étude idéal pour les étudiants en classes préparatoires PT (Physique et Technologie) ou en cursus universitaire équivalent (INSA, ENSAM, UT). Son objectif principal est de faciliter la compréhension du nouveau programme de mathématiques et de préparer efficacement aux concours d'entrée aux grandes écoles.

Philosophie de l'ouvrage

L'ouvrage repose sur une pédagogie progressive et intégrée. Plutôt que de présenter un cours théorique abstrait, il le fait vivre à travers des exemples, des exercices et des problèmes. L'idée directrice est de « **comprendre en faisant** ». Les auteurs insistent sur un point crucial pour l'étudiant : **la recherche personnelle**. Ils invitent à ne pas se précipiter sur les solutions, mais à chercher par soi-même pour ne pas se priver du plaisir de résoudre les problèmes et, plus important encore, pour s'approprier durablement les concepts.

Structure type d'un chapitre

Chaque chapitre est organisé de manière bipartite, créant un parcours d'apprentissage cohérent :

1) La première partie est l'énoncé du problème de synthèse avec le thème abordé, la durée de sa résolution et ses mots-clés.

2) La deuxième partie est le corrigé du problème proposé avec les différents rappels et méthodes utilisées.

Les ressources proposées

L'ouvrage met à disposition plusieurs problèmes dont la complexité est savamment dosée. On distingue trois niveaux :

- Les exercices d'application directe (pour ancrer le cours) ;
- Les exercices d'approfondissement (pour aller plus loin dans la compréhension) ;
- Les problèmes de synthèse et problèmes de concours (pour se mettre en situation réelle d'examen). La présence de sujets de la Banque PT (2015, 2016, 2025) et d'autres concours (Mines-Ponts) en fait un outil de préparation particulièrement précieux.

L'atout indispensable : les corrigés

La seconde moitié du document est entièrement dédiée aux corrigés. Leur qualité est essentielle à la méthode de travail :

- **Détaillés et complets** : Les solutions ne sont pas de simples réponses. Elles sont rédigées le plus souvent en détail, expliquant le cheminement de pensée, les théorèmes utilisés et les étapes de calcul. Cela permet à l'étudiant de ne pas « dépasser » sur une question difficile.
- **Outils d'auto-évaluation** : Le corrigé sert de référence après avoir cherché. Il permet de valider sa démarche, d'identifier ses erreurs et de découvrir d'autres méthodes ou astuces de résolution.

En résumé, comment utiliser ce document efficacement ?

1) **Étudie les rappels de cours** du chapitre pour te familiariser avec les nouveaux concepts.
2) **Travaille les exercices d'application** pour vérifier ta compréhension immédiate.

3) **Attaque-toi aux problèmes de synthèse** en traitant les questions dans l'ordre. C'est ici que tu construis ta maîtrise.

4) **Ne regarde le corrigé qu'après avoir cherché sérieusement.** La correction est ton professeur personnel, mais elle ne peut t'apprendre à nager que si tu es entré dans l'eau.

5) **Analyse les corrigés en détail**, même lorsque tu as réussi, pour t'imprégner des méthodes de rédaction rigoureuses attendues aux concours.

DEVOIRS

ALGÈBRE LINÉAIRE

Devoir 1.1

Problème d'algèbre linéaire – Compléments

Thèmes abordés : Dans tout le problème, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

Temps de résolution : 2 heures.

Énoncé du problème :

Partie I : Somme directe et base adaptée

Soit F_1, F_2 et F_3 trois sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$. On note $p = \dim(F_1)$, $q = \dim(F_2)$ et $r = \dim(F_3)$.

1) Rappeler pourquoi $n = p + q + r$.

2) Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F_1, $\mathcal{B}_2 = (f_1, \ldots, f_q)$ une base de F_2, et $\mathcal{B}_3 = (g_1, \ldots, g_r)$ une base de F_3.

   Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q, g_1, \ldots, g_r)$ est une base de E. On dit que $\mathcal{B}$ est une *base adaptée* à la décomposition $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

3) On définit trois applications linéaires $p_1, p_2, p_3 : E \to E$ par :

$$\forall x \in E,\ x = x_1 + x_2 + x_3 \text{ avec } x_i \in F_i, \quad p_i(x) = x_i.$$

a) Vérifier que p_i est bien définie et linéaire.

b) Montrer que $p_i \circ p_i = p_i$ (projecteur).

c) Calculer $p_i \circ p_j$ pour $i \neq j$.

d) Exprimer Id_E en fonction de p_1, p_2, p_3.

Partie II : Sous-espaces stables et forme matricielle

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On suppose que F_1 et F_2 sont des sous-espaces *stables* par u, c'est-à-dire $u(F_1) \subset F_1$ et $u(F_2) \subset F_2$.

1) Montrer que si $E = F_1 \oplus F_2$, alors la matrice de u dans une base adaptée $\mathcal{B}$ (comme définie en I.2) est de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où A est une matrice $p \times p$ et B une matrice $q \times q$.

2) Réciproquement, on suppose que dans une certaine base $\mathcal{B}' = (v_1, \ldots, v_n)$ de E, la matrice de u est

$$M = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

où C est une matrice $k \times k$ ($1 \leq k < n$), E une matrice $(n-k) \times (n-k)$ et D une matrice $k \times (n-k)$.

On note $G_1 = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$ et $G_2 = \mathrm{Vect}(v_{k+1}, \ldots, v_n)$.

a) Montrer que G_1 est stable par u.

b) G_2 est-il nécessairement stable par u ? Justifier.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur D pour que G_2 soit stable par u.

Partie III : Trace et propriétés

1) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

2) En déduire que si A et B sont semblables, alors $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

3) On définit la trace d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ par $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$ pour une base $\mathcal{B}$ quelconque de E (l'indépendance par rapport au choix de la base découle de la question précédente).

   Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur (c'est-à-dire $p \circ p = p$).

   a) Montrer que $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

   b) Application : soit $E = F \oplus G$. En utilisant les projecteurs définis en I.3, calculer $\mathrm{tr}(p_F)$ où p_F est le projecteur sur F parallèlement à G.

Partie IV : Hyperplans et systèmes d'équations

On suppose dans cette partie que $K = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^n$.

1) Soit $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ où $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$.

   a) Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

   b) Donner un supplémentaire de H.

   c) Soit $H' = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = 0\}$.
   À quelle condition sur $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ a-t-on $H = H'$?

2) Soit H_1, H_2, H_3 trois hyperplans de $\mathbb{R}^4$ d'équations respectives :

$$\begin{aligned} H_1 &: x + y + z + t = 0 \\ H_2 &: 2x - y + z - t = 0 \\ H_3 &: x + 2y - z + 2t = 0 \end{aligned}$$

   a) Montrer que $F = H_1 \cap H_2 \cap H_3$ est de dimension au moins 1.

   b) Déterminer une base de F.

   c) Vérifier que F est en fait de dimension exactement 1.

3) Réciproquement, soit $G = \mathrm{Vect}((1,0,1,0),(0,1,0,1))$ dans $\mathbb{R}^4$.

   a) Quelle est la dimension de G ?

   b) Trouver deux hyperplans H_1' et H_2' tels que $G = H_1' \cap H_2'$.

Partie V : Synthèse

Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe deux sous-espaces F et G de E tels que :

$$E = F \oplus G, \quad u(F) \subset F, \quad u(G) \subset G.$$

On note $p = \dim(F)$ (donc $\dim(G) = n - p$) et on choisit une base $\mathcal{B}$ adaptée à cette décomposition.

1) Écrire la matrice de u dans $\mathcal{B}$ sous forme de deux blocs diagonaux.

2) Montrer que $\chi_u(X) = \chi_{u|_F}(X) \cdot \chi_{u|_G}(X)$ où χ_u désigne le polynôme caractéristique de u et $u|_F$ l'endomorphisme induit par u sur F.

3) En déduire que si u est diagonalisable, alors $u|_F$ et $u|_G$ sont diagonalisables.

4) La réciproque est-elle vraie ? Justifier.

Mots-clés

Produit et somme d'espaces vectoriels, sous-espaces stables, trace, hyperplans.

Devoir 1.2

Déterminants et applications

Thèmes abordés : Maîtriser le calcul et les propriétés des déterminants, avec applications géométriques.

Temps de résolution : 2 heures.

Énoncé du problème :

Dans tout le problème, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n un entier naturel non nul.

Partie I : Propriétés fondamentales

1) Rappels et premières propriétés

   a) Rappeler les trois propriétés caractéristiques du déterminant d'une matrice carrée.

   b) Soit $A \in M_n(K)$. Montrer que si A a deux colonnes identiques, alors $\det(A) = 0$.

   c) Soit $A \in M_n(K)$ et $\lambda \in K$. Exprimer $\det(\lambda A)$ en fonction de $\det(A)$.

   d) Soit $A \in M_n(K)$. Montrer que $\det(A^T) = \det(A)$.

2) Opérations élémentaires

   Soit $A \in M_n(K)$ de déterminant $\det(A) = d \neq 0$.

   a) On échange les colonnes i et j de A pour obtenir une matrice B. Que vaut $\det(B)$?

   b) On multiplie la colonne i de A par un scalaire $\alpha \neq 0$ pour obtenir une matrice C. Que vaut $\det(C)$?

   c) On ajoute à la colonne i de A un multiple λ de la colonne j ($i \neq j$) pour obtenir une matrice D. Que vaut $\det(D)$?

3) Matrices triangulaires

   a) Soit $T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$. Calculer $\det(T)$ en développant par rapport aux lignes ou colonnes appropriées.

b) Généraliser au cas d'une matrice triangulaire supérieure $n \times n$.

Partie II : Calcul de déterminants

1) Déterminants 2×2 et 3×3

a) Calculer $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Calculer $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ de deux manières différentes.

c) Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.

2) Opérations élémentaires en pratique

Calculer les déterminants suivants en utilisant des opérations élémentaires sur les colonnes :

a) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

b) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$

3) Déterminant d'un produit

Soient $A, B \in M_n(K)$.

a) Montrer que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

b) En déduire que si A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

c) Application : soit $A \in M_n(K)$ telle que $A^2 = I_n$. Montrer que $\det(A) = 1$ ou $\det(A) = -1$.

Partie III : Interprétation géométrique (dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$)

1) Aire d'un parallélogramme

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère deux vecteurs $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\det(u, v)$.

b) On rappelle que l'aire du parallélogramme construit sur u et v est $|\det(u, v)|$.

Calculer l'aire du parallélogramme construit sur $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) Montrer que si u et v sont colinéaires, alors l'aire du parallélogramme est nulle.

2) Volume d'un parallélépipède

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère trois vecteurs $u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\det(u, v, w)$.

b) On rappelle que le volume algébrique du parallélépipède construit sur u, v, w est $\det(u, v, w)$.

Calculer le volume du parallélépipède construit sur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) Ces trois vecteurs forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$? Justifier à l'aide du déterminant.

3) Application à la colinéarité et coplanarité

a) Dans $\mathbb{R}^2$, donner une condition nécessaire et suffisante sur $\det(u, v)$ pour que (u, v) soit une base.

b) Dans $\mathbb{R}^3$, donner une condition nécessaire et suffisante sur $\det(u, v, w)$ pour que (u, v, w) soit une base.

c) Dans $\mathbb{R}^3$, trois vecteurs u, v, w sont coplanaires si le volume du parallélépipède qu'ils forment est nul. Donner une condition équivalente en terme de déterminant.

Partie IV : Déterminant d'un endomorphisme

1) Définition et premières propriétés

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base $\mathcal{B}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.

a) Définir $\det(f)$, le déterminant de f.

b) Montrer que cette définition ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$.

c) Montrer que f est un automorphisme si et seulement si $\det(f) \neq 0$.

2) Propriétés

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

a) Montrer que $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$.

b) En déduire que si f est inversible, alors $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.

c) Montrer que $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$ pour tout $\lambda \in K$.

3) Application

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\det(f)$.

b) f est-il un automorphisme ?

c) Calculer $\det(2f)$.

Partie V : Problème de synthèse

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $\det(A)$ en utilisant des opérations élémentaires sur les colonnes.

2) Soit $P(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}$.

   a) Expliquer pourquoi $P(x)$ est un polynôme en x de degré au plus 3.

   b) Trouver les racines de $P(x)$.

   c) En déduire une expression factorisée de $P(x)$.

   d) Calculer $P(5)$.

3) Application géométrique (dans $\mathbb{R}^3$)

   Soient quatre points M_0, M_1, M_2, M_3 de $\mathbb{R}^3$, avec M_i de coordonnées (x_i, y_i, z_i).

   On rappelle que le volume du tétraèdre $M_0M_1M_2M_3$ est donné par $\frac{1}{6}|\det(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}, \overrightarrow{M_0M_3})|$.

   Calculer le volume du tétraèdre dont les sommets sont $M_0(1,1,1)$, $M_1(1,2,4)$, $M_2(1,3,9)$, $M_3(1,4,16)$.

Mots-clés

Déterminant ; Matrice carrée ; Propriétés caractéristiques ; Opérations élémentaires (sur les colonnes/lignes) ; Matrice triangulaire ; Inversibilité ; Produit de matrices ; Transposée ; Interprétation géométrique ; Parallélogramme / parallélépipède ; Déterminant d'un endomorphisme ; Automorphisme.

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Thèmes abordés : Ce problème aborde principalement l'algèbre linéaire et plus précisément :

- **Calcul matriciel** (puissances de matrices, relations de récurrence linéaire).
- **Théorie des endomorphismes** (image, noyau, diagonalisation, valeurs propres, sous-espaces propres).
- **Décomposition de matrices** (recherche de P et D telles que $A = PDP^{-1}$).
- **Résolution d'équations matricielles** (de type $AM + MA = 0$).

Temps de résolution : 2 heures 30.

Énoncé du problème :

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre trois et on considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie I

1) Calculer A^2 et A^3, puis vérifier : $A^3 = A^2 + 2A$.

2) Montrer que la famille (A, A^2) est libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il existe un couple unique (a_n, b_n) de nombres réels tel que : $A^n = a_n A + b_n A^2$, et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

4)

a) Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$.

b) En déduire a_n et b_n en fonction de n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

c) Donner l'expression de A^n en fonction de A, A^2 et n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Partie II

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est A.

1) Déterminer une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ et donner la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$.

2)

a) Est-ce que f est diagonalisable ?

b) Est-ce que f est bijectif ?

3) Déterminer les valeurs propres de f, et donner, pour chaque sous-espace propre de f, une base de ce sous-espace propre.

4) Déterminer une matrice diagonale D dont les termes diagonaux sont dans l'ordre réel croissant, et une matrice inversible P dont la troisième ligne est formée de termes tous égaux à 1, telles que $A = PDP^{-1}$, et calculer P^{-1}.

5) Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$AM + MA = 0$$

Mots-clés

Matrice ; Endomorphisme ; Diagonalisation ; Valeurs propres / vecteurs propres ; Puissance de matrice ; Image / noyau ; Décomposition ; Équation matricielle ; Suite récurrente linéaire ; Base / dimension.

ESPACES PRÉHILBERTIENS ET EUCLIDIENS

Devoir 2.1

Espace préhilbertien

Thèmes abordés : Ce problème aborde le thème de l'algèbre linéaire et de la géométrie euclidienne, plus précisément : projection orthogonale dans un espace euclidien (ici $\mathbb{R}^3$), base orthogonale via le procédé de Gram-Schmidt, représentation matricielle d'une projection orthogonale, optimisation de distance, utilisation du théorème de Pythagore dans un contexte géométrique.

Temps de résolution : 1 heure.

Énoncé du problème :

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique et du produit scalaire usuel. Soient les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1)$ et $u_2 = (1, -1, 1)$

1) Donner les coordonnées de la projection orthogonale de u_2 sur $\text{Vect}(u_1)$.

2) On note π la projection orthogonale sur $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

   a) Compléter la famille (u_1, u_2) en une base de $\mathbb{R}^3$.

   b) A l'aide du procédé de Gram-Schmidt, construire une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ orthogonale telle que $\text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

   c) Quelle est la matrice de π par rapport à la base $\mathcal{B}$?

   d) Calculer la matrice de π par rapport à la base canonique.

3) Soit v le vecteur de coordonnées $(1, 2, 4)$ dans la base canonique. Donner les coordonnées (dans la base canonique) du vecteur de F qui minimise la distance entre v et F.

Mots clés

Projection orthogonale sur une droite ; Complétion d'une famille libre en base ; Orthogonalisation de Gram–Schmidt ; Matrice d'une projection orthogonale.

Devoir 2.2

Isométrie

Thèmes abordés : Ce problème aborde l'étude des isométries vectorielles en dimensions 2 et 3. Il fait appel aux notions de groupe orthogonal, de matrices orthogonales, de rotations, de réflexions et de symétries orthogonales. La dernière partie traite de la réduction des matrices symétriques réelles, en lien avec le théorème spectral.

Temps de résolution : 3 heures.

Énoncé du problème :

Notations

- E désigne un espace euclidien de dimension n, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n.
- $O(E)$: groupe des isométries vectorielles de E.
- $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^\top A = I_n\}$: groupe orthogonal d'ordre n.
- $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$: groupe spécial orthogonal.
- Une base orthonormée de E est notée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

Partie I : Généralités sur les isométries vectorielles

Soit E un espace euclidien de dimension n. On rappelle qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est une *isométrie vectorielle* si pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.

1) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

   (a) f est une isométrie vectorielle.

   (b) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

(c) L'image par f d'une base orthonormée de E est une base orthonormée.

2) Soit $f \in O(E)$. Montrer que si F est un sous-espace de E stable par f, alors $F^\perp$ est aussi stable par f.

3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in O_n(\mathbb{R})$ si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique.

4) Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $|\det(A)| = 1$. On distinguera les cas $\det(A) = 1$ (isométrie directe) et $\det(A) = -1$ (isométrie indirecte).

Partie II : Isométries du plan euclidien

On considère $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique et de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, qui est orthonormée directe.

1) Soit $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$.

(i) Vérifier que $A \in SO_2(\mathbb{R})$.

(ii) Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$. On note alors R_θ cette matrice.

2) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est R_θ.

(i) Déterminer les valeurs propres réelles de f en fonction de θ.

(ii) Interpréter géométriquement f lorsque $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$.

(iii) Que dire si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$? si $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$?

3) Soit $S = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ avec $\varphi \in \mathbb{R}$.

(i) Montrer que $S \in O_2(\mathbb{R})$. Quelle est la valeur de $\det(S)$?

(ii) Déterminer les éléments propres de S.

(iii) Interpréter géométriquement S (on pourra considérer la droite $\mathrm{Vect}((\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}))$).

4) En déduire la classification des isométries vectorielles du plan : toute isométrie est soit une rotation (si $\det = 1$), soit une réflexion (symétrie orthogonale par rapport à une droite, si $\det = -1$).

Partie III : Isométries de l'espace euclidien de dimension 3

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et de sa base canonique orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1) **Rotations en dimension 3.**

Soit $D = \mathrm{Vect}(u)$ une droite vectorielle, où u est un vecteur unitaire. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle rotation d'axe D (orienté par u) et d'angle θ l'unique endomorphisme r tel que $r(u) = u$ et tel que la restriction de r au plan $D^\perp$ soit une rotation plane d'angle θ.

(a) Soit (u, v, w) une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ avec $v, w \in D^\perp$. Donner la matrice de r dans cette base.

(b) On prend $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Donner, dans la base canonique, la matrice R de la rotation d'axe $D = \mathrm{Vect}(u)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

(c) Vérifier que $R \in SO_3(\mathbb{R})$ et que $R^3 = I_3$.

2) **Réflexions en dimension 3.**

Soit P un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On appelle réflexion par rapport à P l'unique endomorphisme s tel que $s|_P = \mathrm{Id}_P$ et $s|_{P^\perp} = -\mathrm{Id}_{P^\perp}$.

(a) Montrer que s est une isométrie indirecte ($\det(s) = -1$).

(b) Soit $P : x + y + z = 0$. Donner la matrice S de la réflexion par rapport à P dans la base canonique.

(c) Vérifier que $S \in O_3(\mathbb{R})$ et que $S^2 = I_3$.

3) **Classification en dimension 3.**

Soit $f \in O(\mathbb{R}^3)$.

(a) Montrer que f admet au moins une valeur propre réelle (on pourra considérer le polynôme caractéristique de f).

(b) On suppose $\det(f) = 1$ (isométrie directe). Montrer que f est une rotation (éventuellement d'angle nul, c'est-à-dire l'identité).

(c) On suppose $\det(f) = -1$ (isométrie indirecte). Montrer que f est la composée d'une rotation et d'une réflexion par rapport à un plan (on pourra considérer $-f$, qui est directe).

Partie IV : Réduction des matrices symétriques réelles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle : $A^\top = A$.

1) Montrer que toutes les valeurs propres de A sont réelles (on pourra considérer un vecteur propre complexe et utiliser la symétrie).

2) Soit λ et μ deux valeurs propres distinctes de A, et soient x, y des vecteurs propres associés. Montrer que x et y sont orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

3) On admet le théorème spectral : toute matrice symétrique réelle est orthogonalement diagonalisable, i.e. il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^\top AP$ soit diagonale.

   Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (i) Déterminer les valeurs propres de A et une base orthonormée de vecteurs propres.

   (ii) Donner une matrice $P \in SO_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^\top$.

   (iii) Interpréter P comme la matrice de passage entre la base canonique et une base orthonormée de vecteurs propres.

Mots clés

Isométries vectorielles ; Matrices orthogonales ; Géométrie en dimension 2 ; Géométrie en dimension 3 ; Symétries et réflexions ; Réduction spectrale.

FONCTIONS VECTORIELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE ET COURBES PARAMÉTRÉES

Devoir 3.1

Fonction vectorielle

Thèmes abordés : Ce problème combine deux thèmes centraux de l'analyse réelle et de l'optimisation :

Partie I :

- **Relation entre une fonction strictement croissante et sa réciproque.**
- **Inégalité de Young (version intégrale) :**

$$\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^y g(u)\,du \geq xy$$

  avec égalité quand $y = f(x)$ (ou $x = g(y)$).
- Interprétation géométrique en terme d'aire entre une courbe et sa réciproque (relation classique $\int_0^a f + \int_0^b g = ab$).

Partie II :

- **Inégalité de Young algébrique :** $\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$ pour $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
- **Inégalité de Hölder** pour les intégrales, déduite de l'inégalité de Young appliquée point par point à des fonctions continues.
- Utilisation d'une fonction puissance $f(x) = x^{p-1}$ comme exemple pour illustrer la Partie I.

Temps de résolution : 2 heures.

Énoncé du problème :

Partie III

Soit une fonction réelle continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, a]$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $f(0) = 0$ et $f(a) = b \in \mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que f admet une fonction réciproque g réglée sur $[a, b]$.

2) Montrer que l'on a : $\int_0^a f(x)dx + \int_0^b g(x)dx = ab$.

3) Considérons la fonction réelle F définie sur $[0, a]$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^y g(u)du - xy$$

où $y \in [0, b]$.
Montrer que F atteint un minimum en $f^{-1}(y)$. Et, en déduire que l'on a :

$$xy \leq \int_0^x f(t)dt + \int_0^y g(u)du$$

quel que soit $(x, y) \in [0, a] \times [0, b]$.

Partie IV

Soient p, q, α et β quatres réels tels que : $p > 1$, $q > 1$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1) Considérons la fonction réelle : $f(x) = x^{p-1}$ et posons : $a = \max(\alpha, \beta^{\frac{1}{p-1}})$ et $b = a^{\frac{1}{p-1}}$.

   Montrer que f définit une bijection croissante de $[0, a]$ sur $[0, b]$ et définir son application réciproque g.

2) Déduire de I que l'on a : $\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$.

3) Soient h et k deux fonctions continues sur l'intervalle $[c, d]$, $c < d$; posons $u = \left(\int_c^d |h(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ et $v = \left(\int_c^d |k(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$.

a) Montrer que l'on a : $\frac{|h(x)|}{u}.\frac{|k(x)|}{v} \leq \frac{|h(x)|^p}{pu^p} + \frac{|k(x)|^q}{qv^q}$.

b) En déduire que l'on a :

$$\frac{1}{uv}\int_c^d |h(x)k(x)|dx \leq 1$$

et l'inégalité de Hölder :

$$\int_c^d |h(x)k(x)|dx \leq \left(\int_c^d |h(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_c^d |k(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Mots-clés

Fonction continue strictement croissante ; Fonction réciproque; Intégrale de Riemann ; Inégalité de Young (forme intégrale); Inégalité de Young algébrique ; Inégalité de Hölder (pour les intégrales).

Courbes paramétrées et propriétés métriques

Thèmes abordés : Le problème porte sur l'étude des fonctions vectorielles et des courbes paramétrées (plan et espace), avec une forte dominante géométrique et cinématique. Il couvre les contenus suivants du programme :

- Fonctions vectorielles à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$,
- Courbes paramétrées (étude locale, tangentes, branches infinies),
- Propriétés métriques (longueur, abscisse curviligne, repère de Frenet, courbure),
- Enveloppe d'une famille de droites,
- Applications des développements limités en géométrie différentielle.

Temps de résolution : 3 heures.

Énoncé du problème :

Partie I – Étude d'une fonction vectorielle

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(t) = \big(t^2,\ e^t \cos t,\ e^t \sin t\big)\,.$$

1) **Continuité et dérivabilité**

   a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

   b) Calculer $f'(t)$, $f''(t)$ et $f^{(3)}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   c) Vérifier la formule de Leibniz pour la dérivée seconde du produit scalaire $\langle f(t), f(t)\rangle$.

2) **Développement limité**

a) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en $t = 0$ de $f(t)$.

b) En déduire une approximation de la norme $\|f(t)\|$ au voisinage de $t = 0$ à l'ordre 2.

Partie II – Courbe paramétrée du plan

On considère la courbe paramétrée $\mathcal{C}$ définie par :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{1+t^4} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^4} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1) **Étude globale**

a) Déterminer le domaine de définition, les symétries éventuelles.

b) Étudier les variations de x et y et dresser un tableau de variation conjoint.

c) Déterminer les limites aux bornes et étudier les branches infinies.

2) **Points stationnaires et tangentes**

a) Calculer le vecteur dérivé $M'(t)$. Y a-t-il des points stationnaires ?

b) Déterminer la tangente à la courbe aux points correspondant à $t = 0$, $t = 1$ et $t = -1$.

c) Faire une étude locale en $t = 0$ à l'aide d'un développement limité à l'ordre 3.

3) **Support de la courbe**

a) Montrer que le support de $\mathcal{C}$ est inclus dans l'ensemble d'équation $y^2 = x^3(1-x)$.

b) Tracer l'allure de la courbe (schéma soigné avec tangentes et asymptotes).

Partie III – Propriétés métriques d'une courbe plane

Soit la courbe paramétrée régulière Γ définie par :

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

1) **Longueur et abscisse curviligne**

   a) Montrer que Γ est régulière.

   b) Calculer la longueur de Γ.

   c) Déterminer l'abscisse curviligne $s(t)$ en prenant pour origine le point correspondant à $t = 0$.

2) **Repère de Frenet et courbure**

   a) Déterminer le vecteur tangent unitaire $\vec{T}(t)$ et le vecteur normal $\vec{N}(t)$.

   b) Exprimer la courbure $\gamma(t)$ à l'aide de la dérivée de $\vec{T}$ par rapport à s.

   c) Calculer la courbure en fonction de t et donner son signe. Interpréter géométriquement.

3) **Cercle de courbure et développée**

   a) Déterminer les points où la courbure est extrémale.

   b) Pour $t = \pi$, calculer le rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure.

   c) Donner une paramétrisation de la développée de Γ (ensemble des centres de courbure).

Partie IV – Enveloppe d'une famille de droites

Soit la famille de droites (Δ_t) définie pour $t \in \mathbb{R}^*$ par :

$$(\Delta_t) : y = tx - \frac{1}{t}.$$

1) **Recherche de l'enveloppe**

   a) Écrire une paramétrisation de (Δ_t) sous la forme $M(\lambda) = A(t) + \lambda\vec{u}(t)$.

b) Chercher une fonction $\lambda(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que la courbe $t \mapsto A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$ ait pour tangente en chaque point la droite (Δ_t).

c) En déduire une paramétrisation de l'enveloppe de la famille (Δ_t).

2) **Interprétation géométrique**

a) Reconnaître la courbe obtenue.

b) Tracer quelques droites de la famille et leur enveloppe sur un même graphique (schéma).

Partie V – Synthèse et ouverture

1) Comparer les méthodes d'étude locale d'une courbe (développement limité, calcul du vecteur tangent) et discuter de leur pertinence selon les cas.

2) Expliquer en quoi la développée d'une courbe peut être vue comme l'enveloppe de ses normales.

3) Proposer un exemple de courbe paramétrée dans l'espace $\mathbb{R}^3$ et indiquer comment on définirait sa courbure et sa torsion (sans calcul).

Mots-clés

Dérivées successives ; Produit scalaire ; Formule de Leibniz ; Développement limité à l'ordre 3 ; Norme euclidienne ; Symétries; Tableau de variation conjoint ; Points stationnaires ; Tangente (vecteur directeur, équation) ; Étude locale par développements limités ; Branches infinies.