



SCIENCES SUP

Exercices & Problèmes

Licence • Écoles d'ingénieurs

ANALYSE NUMÉRIQUE AVEC MATLAB

- ▶ Rappels de cours
- ▶ Méthodes
- ▶ Exercices et problèmes
avec corrigés détaillés

Jean-Louis Merrien

DUNOD

ANALYSE NUMÉRIQUE AVEC MATLAB

- ▶ **Rappels de cours**
- ▶ **Méthodes**
- ▶ **Exercices et problèmes
avec corrigés détaillés**

Jean-Louis Merrien

Maître de conférences à l'INSA de Rennes

DUNOD

Consultez nos catalogues sur le Web



www.dunod.com

Illustration de couverture : *digitalvision*

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

© Dunod, Paris, 2007
ISBN 978-10-050863-1

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^e et 3^e al., d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Introduction	1
Chapitre 1 Petits rappels sur les commandes Matlab	3
1.1 Premières commandes	3
1.2 Matrices, vecteurs, tableaux	4
1.3 Quelques exemples élémentaires de graphiques	6
Chapitre 2 Matrices	7
Rappel de cours	7
Énoncés des exercices	8
2.1 Premiers calculs	8
2.2 Valeurs propres et puissances, un exemple	9
2.3 Méthode de la puissance	10
Du mal à démarrer ?	11
Corrigés des exercices	12
Chapitre 3 Matrices, normes et conditionnement	17
Rappel de cours	17
Énonces des exercices	18
3.1 Premiers calculs	18
3.2 Conditionnement et erreur	18
3.3 Conditionnement et valeurs propres	19
3.4 Conditionnement et déterminant	20
3.5 Norme 2	21
3.6 Approximation polynômial	21

Du mal à démarrer ?	23
Corrigés des exercices.....	24
Chapitre 4 Interpolation polynômiale	29
Rappel de cours.....	29
Énoncés des exercices.....	30
4.1 Changement de base.....	30
4.2 Interpolation de Lagrange	31
4.3 Dérivation approchée.....	34
4.4 Splines cubiques	37
Du mal à démarrer ?	40
Corrigés des exercices.....	41
Chapitre 5 Valeurs approchées d'intégrales	53
Rappel de cours.....	53
Énoncés des exercices.....	55
5.1 Premiers calculs	55
5.2 Méthode des trapèzes.....	56
5.3 Extrapolation (Méthode de Romberg)	57
5.4 Équation intégrale.....	59
Du mal à démarrer ?	63
Corrigés des exercices.....	64
Chapitre 6 Moindres carrés	71
Rappel de cours.....	71
Énoncés des exercices.....	72
6.1 Mise en équation	72
6.2 Droite et parabole de régression	72
6.3 Signal périodique.....	73
6.4 Méthode du filtre de Savitsky-Golay	76

6.5 Équation différentielle et moindres carrés	79
Du mal à démarrer ?	82
Corrigés des exercices	83
Chapitre 7 Courbes de Bézier	89
Énoncés des exercices	89
7.1 Algorithme de de Casteljau	89
7.2 Polynômes de Bernstein	91
7.3 Raccords entre des courbes	92
7.4 Contraintes de formes	92
7.5 Détermination du polygone de contrôle	93
Du mal à démarrer ?	95
Corrigés des exercices	96
Chapitre 8 Équations différentielles, méthodes à un pas	107
Rappel de cours	107
Énoncés des exercices	109
8.1 Conditions initiales et pas	109
8.2 Équation linéaire du second ordre	110
8.3 Erreur dans la méthode de Runge-Kutta	111
8.4 Système différentiel	112
8.5 Méthode de tir	115
Du mal à démarrer ?	118
Corrigés des exercices	119
Chapitre 9 Méthodes multipas	127
Énoncés des exercices	127
9.1 Conditions initiales	127
9.2 Intégration numérique	128
9.3 Une méthode multipas	129
9.4 Programmation	131

Du mal à démarrer ?	134
Corrigés des exercices	134
Chapitre 10 Différences finies en dimension 1	143
Rappel de cours	143
Énoncés des exercices	144
10.1 Flexion d'une poutre	144
10.2 Oscillations d'un pendule	145
10.3 Schéma de Numerov	150
10.4 Équation de convection-diffusion	155
Du mal à démarrer ?	160
Corrigés des exercices	161
Chapitre 11 Problèmes	173
Énoncés des problèmes	173
11.1 Différences finies en dimension 2	173
11.2 Équation de la chaleur	179
11.3 Éléments finis élémentaires	185
Corrigés des problèmes	189
Bibliographie	205
Index	207
Index des mots clés Matlab	209

Introduction

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants en licence de mathématique appliquée ou en formation d'ingénieur. Son objectif est de donner au lecteur un outil lui permettant de travailler de manière autonome à l'aide de questions détaillées et progressives, et d'une construction pas à pas des programmes.

Ce choix de faire de la théorie avant de commencer la programmation est indispensable pour appréhender les notions d'analyse numérique mais aussi pour améliorer ses capacités de programmeur ; la programmation demande un peu d'âme... Cette préparation ne dispense pas d'une réflexion sur la manière de programmer une méthode. À cette fin, les exercices en Matlab proposent une programmation sous forme de poupées russes. À chaque question, le programme précédent est amélioré et complété. Les résultats intermédiaires sont donnés pour valider cette programmation par morceaux.

En fin de chapitre, les solutions complètes et les programmes sont systématiquement donnés. Naturellement, un livre de cours d'analyse numérique est utile en complément de cet ouvrage et la bibliographie en propose quelques-uns.

Quatre rubriques sont destinées à améliorer et faciliter la recherche des exercices ainsi que leur compréhension :

- une rubrique « Rappel de cours » ;
- une rubrique « Du mal à démarrer ? » donne des pistes pour commencer un exercice ;
- une rubrique « Commentaire » indiquée par  ;
- une rubrique « Ce qu'il faut retenir de cet exercice ».

En fin de volume, deux index permettent d'obtenir rapidement de l'information : un index général et un index des commandes Matlab. Pour ce dernier, chaque mot clé a au plus trois références, même si la commande est utilisée beaucoup plus souvent.

Les premiers chapitres peuvent être considérés comme une initiation.

Le premier chapitre rappelle les commandes utiles de Matlab pour gérer des tableaux et les commandes élémentaires. Il s'agit donc de savoir utiliser au mieux les tableaux et de s'initier aux premières commandes du graphisme. Ces commandes nécessaires sont insuffisantes pour progresser dans la programmation et il ne faut pas hésiter à consulter fréquemment l'aide en ligne de Matlab.

Dans les deuxième et troisième chapitres est abordée la notion centrale de l'analyse numérique : les matrices. En effet, beaucoup de méthodes numériques conduisent à la résolution d'un système linéaire. Les méthodes de résolution de système linéaire ne sont pas détaillées ici. Néanmoins les quelques exercices proposés peuvent servir de base. Plutôt que de multiplier ces exercices dans le

chapitre, certains ont été placés dans d'autres chapitres ; l'index permet de les retrouver. Ensuite, on a choisi de privilégier la notion de conditionnement car les résolutions de systèmes linéaires peuvent conduire à de grosses erreurs numériques. Les exercices proposés permettent de constater que le conditionnement est une notion originale qui n'a rien à voir avec les notions de déterminant ou de valeur propre.

Le chapitre 4 est consacré à l'interpolation ou comment faire passer une courbe par des données mesurées. La première réponse est donnée par l'interpolant de Lagrange. Mais le phénomène de Runge montre qu'en plus de passer par les points, le cahier des charges peut aussi imposer une approximation convenable pour les autres points (lorsqu'on part d'une fonction échantillonnée par exemple). Ce chapitre propose donc une étude des splines cubiques qui répond mieux à cette question.

Dans le chapitre 5, une étude d'erreur est proposée. Il s'agit d'une notion essentielle en analyse numérique où, traditionnellement, la première étape est de montrer l'existence d'une solution unique à un problème sans forcément savoir la calculer, puis, la seconde de construire un problème approché dont la solution est cette fois-ci calculable ; pour finir on majore l'erreur entre les solutions exacte et approchée. Dans certains cas particuliers, les deux solutions peuvent être calculées. L'erreur est connue exactement ; on peut alors mesurer si la majoration est optimale. Matlab permet ainsi d'estimer l'ordre d'une méthode.

Dans le chapitre 6, nous répondons à la question : comment approcher des données mesurées par une courbe ? La notion est différente de celle de l'interpolation et on se gardera donc de les confondre. Comme les mesures ne sont pas toujours linéaires, on verra qu'au delà de la régression linéaire, différentes bases peuvent être utilisées.

S'ajoute un chapitre, moins classique dans les cours d'analyse numérique, sur les courbes de Bézier et les polynômes de Bernstein, introduction au dessin et à la conception assistés par ordinateur (DAO, CAO). Le cours y est proposé sous forme d'exercices.

Dans la suite, d'autres outils traditionnels de l'analyse numérique sont abordés : méthodes pour les équations différentielles ou méthodes élémentaires pour les équations aux dérivées partielles. Encore une fois, la présentation est loin d'être exhaustive. Au contraire, elle se propose de mettre en avant quelques problèmes théoriques ou numériques.

Enfin, dans le dernier chapitre, on trouvera des problèmes qui combinent souvent plusieurs des techniques proposées précédemment.

La plupart de ces exercices ont été testés par les étudiants de l'Insa de Rennes. La majorité est même extraite des sujets d'examens qu'on peut réaliser en deux heures avec un peu d'entraînement.

Je remercie mes collègues de l'INSA de Rennes qui ont participé à l'élaboration ou à la correction d'une bonne partie de ces exercices.

Petits rappels sur les commandes Matlab

L'objet de ce chapitre est de mettre ou remettre en mémoire quelques commandes Matlab. En particulier, on s'intéresse à la gestion des tableaux et matrices et on rappelle quelques commandes graphiques. Il est fortement conseillé de ne pas négliger ce chapitre qui donne des astuces et des méthodes pour la suite même s'il peut paraître un peu fastidieux ou s'apparentant à de la dactylographie. Par ailleurs, un petit exemple permet de comparer le traitement vectoriel de Matlab à un programmation à l'aide de boucles.

1.1 PREMIÈRES COMMANDES

On peut taper plusieurs commandes Matlab sur une même ligne, en les séparant par une virgule. Quelques exemples élémentaires à tester :

► Opérations numériques

```
>> 5*6, 2^5  
>> 3+5*2^5
```

► Comment déclarer des variables (signe =)

```
>> x=2  
>> y=x^5  
>> y/x
```

► Les variables peuvent s'afficher sous différents formats

```
>> a=sqrt(3)  
>> format long, b=sqrt(3)  
>> a-b  
>> format short  
>> who  
>> clear  
>> who
```