

FLUORESCIENCES

Analyse

Ana

Jean-Romain Heu

Loïc Teyssier

DUNOD

© Dunod, 2022

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-084444-9

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Se repérer dans le livre..... VI

Avant-propos VIII

CHAPITRE

1

UNE HISTOIRE LAPIDAIRE DU CALCUL 2

1 Des cailloux aux ordinateurs 4

2 Calculer avec des nombres et des symboles..... 9

3 Représenter et calculer avec des nombres 12

CHAPITRE

2

LES NOMBRES RÉELS 22

1 Introduction 24

2 Une construction des réels..... 26

3 Les parties entières 33

4 Les bornes supérieures et inférieures 34

5 Les intervalles de la droite réelle achevée..... 39

6 Application PYTHON : coder les rationnels 40

Ce qu'il faut retenir 42

Exercices 43

CHAPITRE

3

FORMULES ET ÉVALUATION 44

1 Les fonctions élémentaires 46

2 Les formules et les évaluateurs 53

3 Les fonctions usuelles..... 60

4 Liste des formules standard 64

5 Application PYTHON : manipuler et évaluer des formules 65

Ce qu'il faut retenir 70

Exercices..... 71

CHAPITRE

4

LES SUITES NUMÉRIQUES CONVERGENTES 72

1 Les suites numériques 76

2 La convergence d'une suite..... 78

3 Les opérations sur les limites 83

4 Propriétés de la limite liées à l'ordre sur $\mathbb{R}$ 86

5 Comparaison d'ordres de grandeur classiques	91
6 Pour aller plus loin : suite logistique et chaos	92
Ce qu'il faut retenir	96
Exercices	97

LES FONCTIONS CONTINUES SUR UN INTERVALLE..... 98

1 Introduction	100
2 Limite d'une fonction réelle en un point	101
3 Ordre et limites	106
4 La continuité d'une fonction	108
5 Les grands théorèmes de l'analyse des fonctions continues	112
6 Pour aller plus loin : les suites définies par itération	115
Ce qu'il faut retenir	118
Exercices	119

LES FONCTIONS DÉRIVABLES..... 120

1 Dérivée en un point	122
2 Propriétés algébriques de la dérivation	124
3 Les dérivées d'ordre supérieur et les classes de dérivabilité	125
4 Les théorèmes fondamentaux	127
5 Pour aller plus loin : perceptron et descente de gradient	132
Ce qu'il faut retenir	134
Exercices	135

LES FONCTIONS USUELLES : CONSTRUCTION, ÉTUDE ET TRACÉ..... 136

1 Une construction de l'exponentielle	138
2 Les réciproques des fonctions standards	145
3 Les dérivées symboliques	147
4 Propriétés fondamentales des fonctions usuelles	152
5 Plan d'étude d'une fonction usuelle	157
6 Développements limités et évaluation numérique de fonctions usuelles	158
Ce qu'il faut retenir	163
Exercices	164

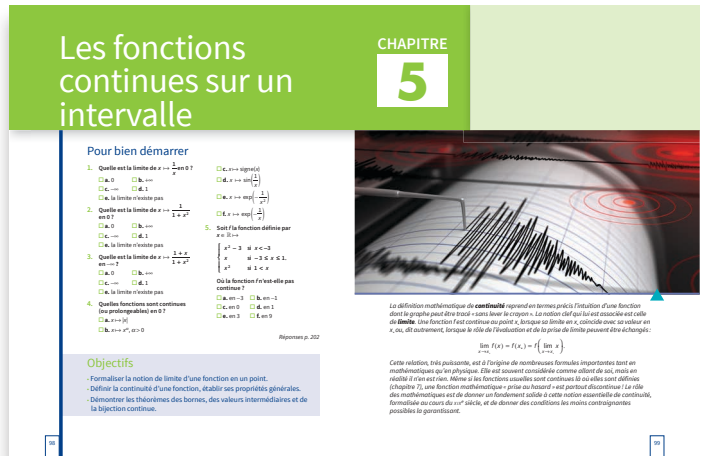
LE CALCUL INTÉGRAL	166
1 Construction de l'intégrale	168
2 Propriétés de l'intégrale	171
3 Le théorème fondamental du calcul différentiel	172
4 Les primitives symboliques	174
5 Pour aller plus loin : intégration numérique	183
Ce qu'il faut retenir	184
Exercices	185

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	186
1 Généralités	188
2 Équations différentielles résolubles	191
3 Résoudre une équation différentielle avec PYTHON	199
Ce qu'il faut retenir	202
Exercices	203
Corrigés	204
Index	207
Crédits iconographiques	208

Se repérer dans le livre

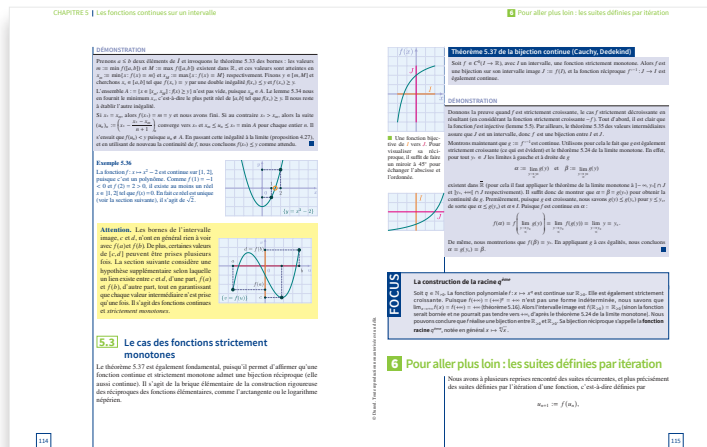
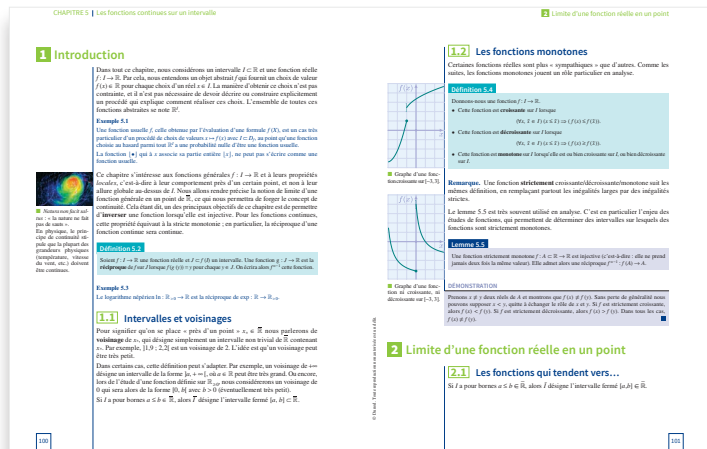
Ouverture de chapitre

- QCM pour se tester sur les prérequis de Terminale.
- Un exemple concret pour introduire le sujet du chapitre.
- Ce que l'on maîtrisera à la fin du chapitre.



Le cours

- Le **cours** est illustré par des figures et de nombreux exemples.
- Les **focus** développent un sujet de recherche, une application, un thème d'actualité.
- Des repères historiques.
- Des conseils et erreurs à éviter.



- Un **résumé** de ce qu'il faut retenir.
- Les **QCM** et **exercices** permettent de vérifier ses connaissances et de s'entraîner aux examens.
- Les **corrigés** sont détaillés à la fin du livre.



- Un **index** pour retrouver rapidement les notions principales.



Les + en ligne

Retrouvez sur la page dédiée à l'ouvrage sur le site dunod.com :

- Des compléments de cours.
- Les corrigés détaillés de tous les exercices.

Avant-propos

La place fondamentale des mathématiques dans l'enseignement supérieur n'est pas discutée. Au contraire, elles sont à la fois le langage des disciplines scientifiques et techniques, permettant ainsi la description théorique et la modélisation, ainsi que leur moyen d'action, en permettant la conception et la prévision par le calcul. Le présent ouvrage est axé sur l'**analyse mathématique**, avec un point de vue algorithmique permettant d'éclairer la théorie et d'exposer les difficultés de la pratique. Si cette discipline est fondamentale pour les applications, elle présente néanmoins une réelle difficulté pour les étudiants. Il nous a immédiatement paru important d'introduire en parallèle le **calcul numérique** et le **calcul formel**. Expliquons brièvement ces deux termes, puisque cette dichotomie constitue le cœur de l'ouvrage.

1. L'architecture matérielle des ordinateurs permet d'effectuer nativement des opérations arithmétiques (sur les entiers, les flottants...) : cette fonctionnalité fonde l'analyse numérique, c'est-à-dire le calcul approché de valeurs. Le problème majeur associé est celui de la qualité de l'approximation (certification des chiffres significatifs, propagation des erreurs, etc.), qui rejoint des préoccupations relatives aux sciences expérimentales.
2. Par ailleurs, des logiciels plus sophistiqués permettent de manipuler des expressions symboliques (fractions d'entiers, formules trigonométriques...) et de calculer formellement à l'aide de ces objets. Ces fonctionnalités sont de plus en plus présentes sur les calculatrices utilisées dans le secondaire, mais elles sont probablement peu ou mal exploitées. Le problème majeur associé est celui de l'impossibilité de trouver le résultat dans la classe des objets symboliques, qui est un problème rencontré aussi dans les autres sciences (formules « explicites », « analytiques » ou encore « sous forme close »).

La meilleure illustration de cette dualité est la fonction de répartition gaussienne, omniprésente en sciences : la *théorie* construit la primitive $F(X) := \int_{-\infty}^X \exp(-x^2) dx$, le *calcul formel* permet d'affirmer que $F(X)$ n'est pas une formule « explicite » et donc nous contraint à effectuer un *calcul numérique* approché des valeurs, par exemple pour constituer des tables précalculées destinées aux utilisateurs.

Notre propos n'est pas tant de fournir un manuel de techniques élaborées, d'analyse numérique ou de calcul formel, même si nous souhaitons offrir une introduction aux grands problèmes que ces deux approches complémentaires permettent de formuler. Les méthodes naïves de résolution que nous proposons ont pour rôle d'illustrer les fondements théoriques de l'analyse réelle et de souligner la transcendance intrinsèque du monde des nombres réels.

Une fois qu'ils auront assimilés ces concepts et algorithmes basiques, les étudiants seront mieux armés pour appréhender les algorithmes optimaux et les logiciels (MATLAB, SciLAB, MATHEMATICA, MAPLE, SAGEMATH...) présents dans l'industrie ou les laboratoires de recherche.

Contenu

Avant l'apparition et l'utilisation intensive des calculateurs artificiels – il n'y a guère plus que 70 ans – la production de livres de tables de valeurs numériques était un enjeu majeur : cet artisanat mathématique, facilité par l'introduction de l'écriture

décimale des réels à la fin de la Renaissance, a accompagné les diverses révolutions technologiques et industrielles du XIX^{e} siècle et de la première moitié du XX^{e} siècle, en motivant d'ailleurs le financement et la conception des premiers calculateurs automatiques afin d'améliorer la qualité des calculs. Ainsi, le premier chapitre du présent ouvrage est consacré à l'**histoire du calcul** et des techniques.

Une fois présentée la **construction des nombres réels** par les développements décimaux et l'introduction du concept de **limite**, le but principal du discours est de démontrer et de donner une incarnation concrète aux **grands théorèmes de l'analyse réelle** (valeurs intermédiaires, accroissements finis, équivalence primitive/intégrale), en se focalisant sur une approche constructive. Ces chapitres présentent notamment une construction de l'**intégrale** des fonctions de classe C^1 et décrivent l'espace des solutions d'**équations différentielles** simples.

Les thèmes abordés dans ce livre sont donc en grande partie classiques ; nous avons toutefois choisi de mettre en avant la classe des **fonctions usuelles**. Ces fonctions – dont les étudiants sont si familiers qu'ils en oublient facilement que d'autres fonctions existent – occupent une place particulière dans la discipline, car elles sont la charnière entre calcul symbolique et calcul numérique : ce sont les fonctions obtenues par l'évaluation d'une formule sur son ensemble de définition. Une des tâches du chapitre qui leur est consacré est de construire (et de dériver) l'**exponentielle réelle** et les **fonctions circulaires**, ce qui débouchera finalement sur la construction des **fonctions réciproques** standards. Nous y démontrons également les **théorèmes de continuité et de dérivabilité** usuels, qui donnent un cadre pratique très concret pour discuter de la continuité et de la dérivabilité des fonctions usuelles.

À l'issue de l'ouvrage, le lecteur studieux saura écrire des algorithmes permettant de calculer des valeurs approchées de fonctions usuelles (par exemple, e^π) avec une précision certifiée, mais aussi des solutions exactes ou approchées d'équations différentielles et d'intégrales.

Public visé et prérequis

L'ouvrage s'adresse à des étudiants ayant une connaissance au moins élémentaire en mathématiques (ayant choisi la spécialité « mathématiques » ou l'option « mathématiques complémentaires » du nouveau baccalauréat général) et ayant déjà pratiqué les bases du langage PYTHON (normalement à travers la spécialité « mathématiques » en Première), se destinant à des études supérieures scientifiques principalement en mathématiques ou en informatique, mais également dans toute direction utilisant du calcul scientifique et nécessitant une bonne compréhension de l'analyse mathématique (physique théorique ou appliquée, chimie, géosciences...).

Il est conseillé au lecteur de se familiariser avec le langage de programmation PYTHON, ce livre n'étant pas un ouvrage de référence sur ce langage (nous en utiliserons la version 3). Ce langage est devenu omniprésent, de la fin du secondaire au monde de la recherche et de l'industrie : PYTHON permet d'effectuer du calcul numérique efficace (grâce à la bibliothèque `numpy`) et symbolique (grâce à la bibliothèque `sympy`).

Cet ouvrage ne couvre pas non plus les fondements mathématiques du raisonnement, de l'algèbre, de la théorie des ensembles ou de l'arithmétique. Nous renvoyons le lecteur à l'excellent ouvrage *Mathématiques* dans la collection « Fluorescences », publié chez Dunod, pour un panorama plus exhaustif de ces notions basiques.

Une histoire lapidaire du calcul

$\simeq - 3000$	Mésopotamie, écriture cunéiforme, représentation des nombres en base 60
$\simeq - 2000$	Mésopotamie, tablettes scolaires d'apprentissage des quatre opérations, racines carrées et cubiques
$\simeq - 1000 \rightarrow 0$	Chine, numération décimale positionnelle, utilisation d'abaques et premiers algorithmes
$\simeq 600$	Inde, 0 devient un nombre, découverte des nombres négatifs, règle des signes et perfectionnement des pratiques opératoires
$800 \rightarrow 1500$	Empire arabe, introduction de l'algèbre et des polynômes, diffusion du système décimal indien, premières tables de calcul trigonométrique
xvi ^e siècle	Europe, utilisation des nombres complexes, représentation décimale « à virgule » des nombres, calcul symbolique
xvii ^e siècle	Europe, logarithmes, découverte de la dérivée
xviii ^e siècle	Europe, exponentielle, développements limités, équations différentielles
xix ^e siècle	Europe, théories des nombres réels, fondement de l'analyse mathématique
xx ^e siècle	Théorie de la calculabilité, naissance de l'informatique

Objectifs

- Discuter la nature des nombres et leur représentation dans un ordinateur.
- Définir, grâce aux machines de Turing, la notion de procédé calculable.
- Comprendre la place du calcul dans l'histoire des sciences et des techniques.
- Distinguer deux types de calculs : symbolique et numérique.