M. Eng. Fernando Henrique Gomes Zucatelli
Gabriela Bittencourt

Manual Básico de Quatérnios e Rotações em 3D com Matlab®

Revisor(a): Ivana Soares Bandeira.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

Z94m

Zucatelli, Fernando Henrique Gomes, 1988–.
Manual básico de quatérnios e rotações em 3D com Matlab/Fernando Henrique Gomes Zucatelli, Gabriela Bittencourt. – Campinas, SP: Ed. do Autor, 2020.
81p. : il ; 21 x 29,7 cm

Bibliografia: 66-69
ISBN 978-65-81688-00-4

1. Análise numérica – Processamento de dados. 2. MATLAB (Programa de computador). 3. Quatérnios. I. Bittencourt, Gabriela, 1995–. II. Título.

CDD 519.40285

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Fernando Henrique Gomes Zucatelli
Gabriela Bittencourt

Manual Básico de Quatérnios e Rotações em 3D com Matlab®

1ª edição

Campinas
Fernando Henrique Gomes Zucatelli
2020

Nota dos autores

Este manual foi elaborado a partir de um desejo meu, Gabriela, em saber mais sobre quatérnios e suas aplicações em quadricópteros. Seguindo o anseio da Gabriela, eu, Fernando, comecei a reunir alguns materiais sobre quatérnios e suas aplicações em rotações em três dimensões.

As anotações feitas, os códigos criados e as figuras rascunhadas estão reunidos neste manual. As explicações apresentadas são aquelas que nos fizeram compreender os problemas apresentados e os exercícios propostos são aqueles que fixaram o conteúdo novo ou exploraram noções mais básicas, como as de álgebra linear, que se aplicam nos estudos de quatérnios.

A ideia deste manual é apresentar os quatérnios como um novo tipo de estrutura algébrica, abrindo a mente dos leitores para um novo mundo de tipos diferentes de números por assim dizer, que expandem as noções básicas aprendidas até o início do curso superior, o qual se restringe, em geral, o estudo dos conjuntos numéricos naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais e complexos. Uma segunda ideia desenvolvida no manual é apresentar o software Matlab® como ferramenta para se executar cálculos com os quatérnios, de tal forma a criar toda uma biblioteca de funções de quatérnios e rotações tridimensionais. A criação dessa biblioteca contribui para que o estudante entenda que pode organizar seus códigos e acessá-los conforme a necessidade. Com essa segunda ideia em mente, fornecemos todos os códigos usados nas figuras geradas em Matlab®.

Talvez para um especialista em quatérnios ou em dinâmica de rotações espaciais os tópicos abordados sejam triviais. Talvez para um especialista em Matlab® os códigos feitos sejam simples demais. Porém, para um leitor que esteja se familiarizando com um tema ou com o outro, é bem provável que este manual seja a reunião ideal de cada um dos conceitos de forma compreensível para um aprendizado eficiente.

Diante disso, mantivemos ao longo do texto diversas sugestões de materiais complementares, artigos e aulas sobre o assunto, além de curiosidades que circundam alguns dos tópicos abordados como forma de despertar o interesse dos leitores mostrando uma fração de um novo universo de possibilidades de forma atrativa e surpreendente, muitos desses comentários estão em notas de rodapé[1] para não interferirem com o texto principal.

Nota sobre propriedade do Matlab

Matlab® é um software de alta performance desenvolvida especificamente para engenheiros e cientistas com foco principal em cálculo numérico. Essas características o popularizarou nos cursos e disciplinas da área de ciências exatas. Sua linguagem é baseada em matrizes permitindo uma expressão natural de matemática computacional. Sua propriedade e marca registrada é da empresa *MathWorks*® Inc: <www.mathworks.com>.

[1] Nós, os autores, gostamos de notas de rodapé.



"Considero justa toda forma de ensino didático" (Ruas, Carlos).
Cortesia de Carlos Ruas, criador de Um Sábado Qualquer.
<https://www.umsabadoqualquer.com/dica-pra-quem-estuda/>.
Apoie as publicações originais do autor.

Sumário

1 Aquecimento – Sistemas de Coordenadas **1**
1.1 Coordenadas polares e cartesianas . . . 1
1.2 Coordenadas esféricas e cartesianas . . . 2

2 Introdução à Álgebra de Quatérnios **4**
2.1 Revisão de conjuntos numéricos . . . 4
2.2 Definição dos quatérnios . . . 5
2.3 Operações com quatérnios . . . 7
2.3.1 Parte escalar de um quatérnio . . . 7
2.3.2 Parte vetorial de um quatérnio . . . 7
2.3.3 Soma . . . 7
2.3.4 Multiplicação por escalar . . . 8
2.3.5 Notação de quatérnio com parte escalar e vetorial . . . 8
2.3.6 Conjugado . . . 9
2.3.7 Módulo . . . 9
2.3.8 Multiplicação entre quatérnios . . . 10
2.3.9 Divisão entre quatérnios . . . 11

3 Quatérnios como "complexo de complexo" **13**
3.1 Isomorfismo entre quatérnios, plano complexo e espaço real de 4 dimensões . . . 13
3.2 Representação de quatérnios com matrizes . . . 13

4 Rotações **16**
4.1 Rotações 2D . . . 16
4.2 Rotações 3D - Ângulos de Euler . . . 16
4.2.1 Visualizações e Exemplos de Rotações 3D com Ângulos de Euler . . . 19
4.3 Rotações 3D - Teorema de Euler . . . 23
4.3.1 Teorema de Euler . . . 23
4.4 Rotações 3D - Fórmula de Rodrigues . . . 24
4.4.1 Entendendo o grupo de rotação SO(3) . . . 27
4.5 Rotações 2D - Fórmula de Euler . . . 28
4.6 Rotações 3D - Fórmula de Euler para Quatérnios . . . 28
4.7 Rotações 3D - Fórmula de Rodrigues para Quatérnios . . . 30

A Resoluções de Exercícios Propostos **35**
A.1 Exercício 1 . . . 35
A.2 Exercício 2 . . . 35
A.3 Exercício 3 . . . 35
A.4 Exercício 6 . . . 36
A.5 Exercício 7 . . . 36
A.6 Exercício 8 . . . 36
A.7 Exercício 10 . . . 37
A.8 Exercício 11 . . . 37
A.9 Exercício 12 . . . 37
A.10 Exercício 13 . . . 37

A.11 Exercício 16 . . . 38
A.12 Exercício 17 . . . 38
A.13 Exercício 32 . . . 38
A.14 Exercícios 33, 34, 35, 36 . . . 38
A.14.1 Código de resolução . . . 39
A.15 Exercício 41 . . . 40
A.16 Exercício 42 . . . 40
A.17 Exercício 45 . . . 40
A.18 Exercício 51 . . . 41
A.19 Exercício 57 . . . 41
A.20 Exercício 59 . . . 42
A.21 Exercício 60 . . . 42

B Normas **43**

C Criando sua própria biblioteca em Matlab® **48**

D Códigos em Matlab® para Álgebra de Quatérnios **49**
D.1 Códigos com álgebra de quatérnios . . . 49
D.2 Códigos com *plot* de coordenadas . . . 51
D.3 Códigos com matrizes de rotação . . . 54
D.4 Códigos auxiliares . . . 56
D.5 Códigos geradores de Figuras . . . 56

E Outros trabalhos e bibliotecas sobre Quatérnios em Matlab® **65**

Lista de Figuras

1.1 Vetor $\vec{v}$ em duas dimensões com tamanho ρ. Elaborado em Matlab®. 1
1.2 Vetor $\vec{v}$ em três dimensões com tamanho ρ. Elaborado em Matlab®. 2

2.1 Diagrama de Venn dos principais subconjuntos numéricos com complexos. 5
2.2 Placa na ponte do *Canal Royal de Dublin* homenageando Hamilton. 6

3.1 Isomorfismos $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ e entre $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$. $\mathbb{C}^2$ pode ser interpretado como um plano em que cada eixo é um plano complexo $\mathbb{C}$. 14

4.1 Exemplo de rotação em 2D com uso de números complexos. 17
4.2 Definição matriz de rotação R_x. 17
4.3 Definição matriz de rotação R_y. 18
4.4 Definição matriz de rotação R_z. 18
4.5 Três passos da rotação **XYZ**: $\phi_X = 90°$; $\theta_Y = 90°$; $\psi_Z = 90°$. 20
4.6 Três passos da rotação **XYZ**: $\phi_X = 45°$; $\theta_Y = 90°$; $\psi_Z = 45°$. 20
4.7 Três passos da rotação **XZY**: $\phi_X = 90°$; $\theta_Z = 90°$; $\psi_Y = 90°$. 21
4.8 Três passos da rotação **YXZ**: $\phi_X = 90°$; $\theta_Y = 90°$; $\psi_Z = 90°$. 21
4.9 Três passos da rotação **ZYX**: $\phi_Z = 90°$; $\theta_Y = 90°$; $\psi_X = 90°$. 22
4.10 Três passos da rotação **ZYZ**: $\phi_Z = 90°$; $\theta_Y = 90°$; $\psi_Z = 90°$. 22
4.11 Ilustração do Teorema de Euler. 23
4.12 Rotação do vetor $\vec{v}$, decomposto em suas projeções ortogonal e perpendicular ao vetor $\hat{n}$, cujo resultado é o vetor $\vec{v'}$. Repare que as projeções paralelas são iguais antes e após a rotação ao redor de $\hat{n}$. 25
4.13 Representação do grupo SO(3) como esfera de raio π. 28
4.14 Resultado da rotação de $\hat{e}_3$ ao redor de $\hat{e}_2$ por um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ rad. 31

B.1 Desigualdade triangular. 43
B.2 Ilustração dos casos com $\|\cdot\|_p = 1$ para as normas $p = \{1, 2, \infty\}$. 44
B.3 Exemplo de normas. 45

C.1 Adicionando pastas e subpastas para criar biblioteca do usuário. 48
C.2 Chamando funções a partir da biblioteca. 48

Lista de Algoritmos

2.1 Exemplo de extração da parte escalar de quatérnios em Matlab® . . . 7
2.2 Exemplo de extração da parte vetorial de quatérnios em Matlab® . . . 7
2.3 Exemplo soma de quatérnios em Matlab® . . . 8
2.4 Exemplo produto por escalar de quatérnios em Matlab® . . . 8
2.5 Exemplo de soma de escalar com vetor no Matlab® . . . 8
3.1 Exemplo do isomorfismo descrito pela Eq. (3.6). . . . 14
3.2 Exemplo do isomorfismo descrito pela Eq. (3.9). . . . 15
4.1 Exemplo de teste básico de tempo de execução em Matlab® . . . 19
A.1 Resolução dos Exercícios 35, 34, 35 e 36 com uso de simbólico no Matlab® e integração com LaTeX . . . 39
A.2 Código de resolução com Matlab® simbólico do Exercício 51. . . . 41
D.1 Rotação de um vetor por um ângulo com quatérnios. . . . 49
D.2 Conjugado de quatérnio. . . . 49
D.3 Divisão de quatérnio à direita. . . . 49
D.4 Divisão de quatérnio à esquerda. . . . 49
D.5 Inverso de quatérnio. . . . 49
D.6 Módulo de quatérnio. . . . 50
D.7 Exponencial de quatérnio. . . . 50
D.8 Plot coordenadas 3D com quatérnios. . . . 50
D.9 Produto de quatérnios. . . . 51
D.10 Rotação de quatérnios. . . . 51
D.11 Plot de coordenadas 2D. . . . 51
D.12 Plot de coordenadas 3D. . . . 52
D.13 Plot setas 2D. . . . 52
D.14 Plot setas 3D. . . . 53
D.15 Plot de vetor em 3D com identificação. . . . 54
D.16 Rotação Fórmula de Rodrigues. . . . 54
D.17 Matriz de rotação sobre eixo **X**. . . . 54
D.18 Matriz de rotação sobre eixo **Y**. . . . 54
D.19 Matriz de rotação sobre eixo **Z**. . . . 54
D.20 Matriz de rotação na sequência **XYZ**. . . . 54
D.21 Matriz de rotação na sequência **XZY**. . . . 55
D.22 Matriz de rotação na sequência **YXZ**. . . . 55
D.23 Matriz de rotação na sequência **YZX**. . . . 55
D.24 Matriz de rotação na sequência **ZXY**. . . . 55
D.25 Matriz de rotação na sequência **ZYX**. . . . 55
D.26 Matriz de rotação na sequência **ZXZ**. . . . 56
D.27 Matriz de rotação na sequência **ZYZ**. . . . 56
D.28 Encapsulamento da função que gera arquivos em LaTeX a partir de uma *string*. . . . 56
D.29 Nomenclatura e padronização dos rótulos dos eixos **XYZ** . . . 56
D.30 Figura do exemplo de coordenadas 2D em Matlab®. . . . 56
D.31 Inserção da ponta da seta em um ponto qualquer em 2D. . . . 57
D.32 Figura do exemplo de coordenadas 3D em Matlab®. . . . 57
D.33 Inserção da ponta da seta em um ponto qualquer em 3D. . . . 58
D.34 Figura do isomorfismo $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. . . . 59