Références sciences

PC
PC*

Questions de maths

- Mémentos de cours
- Questions, exercices
- Indications
- Solutions détaillées

Matthieu Fèvre

Roland Gorlier

ellipses

Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-094475
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2024
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Cet ouvrage est destiné en priorité aux étudiants en classe préparatoire PC ou PC*. Divisé en quinze chapitres, il est conçu pour être utilisé par des étudiants de tout niveau. Dans chaque chapitre, on trouvera les éléments suivants.

◇ **Un mémento du cours**
Celui-ci contient un récapitulatif exhaustif des définitions et résultats du cours. Ces éléments sont présentés assortis de perspectives sur leur utilisation. Ces perspectives sont introduites par les symboles ♥ ou ✍.
Le symbole ♥ signale des précisions sur des situations où l'on aimera appliquer le théorème ou la propriété énoncés.
Le symbole ✍ signale une remarque concernant des écueils à éviter ou des points de vigilance.

◇ **Une sélection de questions à résoudre**
Les premières questions portent sur des applications classiques et élémentaires du cours. Les suivantes demandent plus de réflexion et peuvent être plus originales. Tous les énoncés sont courts de façon à ce qu'un étudiant puisse s'y pencher dès qu'il dispose de quelques minutes.

◇ **Des éclairages**
Pour chaque question, sont proposés des liens avec le cours et des tactiques de résolution classiques, des points d'attention à la lumière desquels la résolution des questions sera facilitée.

◇ **Des réponses**
Une réponse détaillée est donnée à chaque question. Le lecteur trouvera au début de chaque réponse des renvois aux principaux résultats de cours qu'il est utile d'avoir en mémoire pour comprendre cette réponse.

L'ouvrage est conçu comme un complément et non un substitut à un cours en classe où seraient présentées les preuves des résultats. Chaque étudiant pourra s'assurer de connaître son cours avant de se lancer dans la résolution des questions.
Pour préserver le plaisir de la recherche et la possibilité de la joie de trouver sa propre solution, il est conseillé de prendre un temps suffisant pour l'étude de chaque question avant de lire les éclairages puis les solutions.

Le livre porte en priorité sur le programme de deuxième année PC-PC*. Cependant, les aspects importants ou souvent oubliés du programme de première année sont réactivés ici. Les premiers chapitres sont conçus pour être travaillés dès la fin de la première année, par exemple lors de révisions estivales.

Nous avons pris beaucoup de plaisir à mettre au point cet ouvrage et espérons susciter de l'intérêt dans l'étude des questions proposées. Nous remercions nos élèves pour leurs remarques bienveillantes et nos collègues pour leur aide amicale dans l'élaboration de cet ouvrage, notamment Laurence BOUYGE, Laura GAY, Anne GORLIER, Marie GORLIER, Frédéric MATHÉUS, Alexandre MONTAGNIER. Un merci tout particulier à Martin FATOU.

Matthieu FÈVRE et Roland GORLIER.

Table des matières

I Petits outils **15**

I.1 Cours . . . 15

I.1.1 Généralités . . . 15

I.1.2 Fonctions continues . . . 16

I.1.3 Intégration des fonctions continues . . . 17

I.1.4 Fonctions dérivables . . . 18

I.1.5 Convexité . . . 20

I.1.6 Formules de Taylor . . . 22

I.1.7 Formule de Stirling . . . 22

I.2 Questions . . . 23

I.3 Éclairages . . . 24

I.4 Réponses . . . 26

[R I. 1] (Développement) . . . 26

[R I. 2] (Inégalité triangulaire) . . . 27

[R I. 3] (Inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$) . . . 27

[R I. 4] (Calcul d'une somme classique) . . . 28

[R I. 5] (Fonction constante par morceaux) . . . 29

[R I. 6] (Encadrements usuels de sin) . . . 29

[R I. 7] (Encadrements usuels de cos et sin) . . . 30

[R I. 8] (Fonction définie par une intégrale) . . . 30

[R I. 9] (Fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$) . . . 33

[R I. 10] (Limite usuelle) . . . 34

[R I. 11] (Application de la formule de Taylor reste intégral) . . . 35

[R I. 12] (Calcul classique d'équivalent) . . . 36

II Polynômes **37**

II.1 Cours . . . 37

II.2 Questions . . . 46

II.3 Éclairages . . . 48

II.4 Réponses . . . 49

[R II. 1] (Application du théorème de Rolle) 49
[R II. 2] (Dans $\mathbb{R}[X]$, P scindé $\Longrightarrow$ P' scindé) 50
[R II. 3] (Polynômes de Tchebychev) 50
[R II. 4] (Racines des polynômes de Tchebychev) 52
[R II. 5] (Utilisation d'une décomposition en éléments simples) . . . 52
[R II. 6] (Interpolation de Lagrange : application) 53
[R II. 7] (Dérivée logarithmique) 54
[R II. 8] (Interpolation de Lagrange : application) 55
[R II. 9] (Reste dans une division euclidienne) 55
[R II. 10] (Interpolation de Lagrange : application) 56
[R II. 11] (Utilisation des relations coefficients-racines) 57
[R II. 12] (Application de la formule de Taylor) 58

III Intégration **59**
III.1 Cours 59
III.1.1 Intégrales de fonctions continues par morceaux . . . 59
III.1.2 Intégrales généralisées 61
III.1.3 Propriétés de l'intégrale généralisée 63
III.1.4 Fonctions intégrables 66
III.1.5 Critères de convergence par comparaison 68
III.2 Questions 69
III.3 Éclairages 72
III.4 Réponses 74
[R III. 1] (Fonctions continues par morceaux) 74
[R III. 2] (Calculs d'intégrales impropres) 75
[R III. 3] (Nature d'une intégrale) 77
[R III. 4] (Convergence d'intégrale et limites) 78
[R III. 5] (Intégrale d'une fonction impaire) 80
[R III. 6] (Intégrale semi-convergente) 80
[R III. 7] (Intégrale semi-convergente) 81
[R III. 8] (Nature d'une intégrale) 82
[R III. 9] (Exemples d'études d'intégrabilité) 82
[R III. 10] (Calcul d'une intégrale) 84
[R III. 11] (Équivalent d'une intégrale) 85
[R III. 12] (Intégration de o) 85
[R III. 13] (Intégration d'équivalents) 86

IV Séries numériques **87**
IV.1 Cours 87
IV.1.1 Généralités 87
IV.1.2 Séries de référence 90

IV.1.3 Séries à termes positifs 91
IV.1.4 Comparaisons séries-intégrales 92
IV.1.5 Étude des séries complexes ou de signe quelconque . 93
IV.1.6 Théorème spécial des séries alternées 94
IV.1.7 Produit de Cauchy de deux séries 95
IV.2 Questions 96
IV.3 Éclairages 99
IV.4 Réponses 104
[R IV. 1] (Découpage et epsilon) 104
[R IV. 2] (Étude d'une suite récurrente) 105
[R IV. 3] (Étude d'une suite implicite) 106
[R IV. 4] (Condition de convergence de $\sum u_n v_n$) 108
[R IV. 5] (Nature de séries) 108
[R IV. 6] (Utilisation du critère de d'Alembert) 109
[R IV. 7] (À propos du théorème d'équivalence) 111
[R IV. 8] (Utilisation d'un développement limité) 111
[R IV. 9] (Transformation d'Abel) 112
[R IV. 10] (Comparaison série-intégrale) 113
[R IV. 11] (Utilisation d'un lien suite-série) 114
[R IV. 12] (Groupement de termes) 114
[R IV. 13] (Calcul d'une intégrale) 115
[R IV. 14] (Sommes de séries exponentielles et géométriques) 117
[R IV. 15] (Un produit de Cauchy) 118
[R IV. 16] (Estimation de la série harmonique) 119
[R IV. 17] (Transformation d'Abel : le retour) 119
[R IV. 18] (Somme de la série harmonique alternée) 121
[R IV. 19] (Impact de l'ordre des termes) 121
[R IV. 20] (Équivalent d'un reste de série exponentielle) 122
[R IV. 21] (Valeur approchée d'une somme) 123
[R IV. 22] (Amélioration du critère de d'Alembert) 123
[R IV. 23] (Série-intégrale pour une fonction non monotone) 124

V Compléments d'algèbre linéaire 127
V.1 Cours 128
V.1.1 Produits d'espaces vectoriels 128
V.1.2 Sommes de sous-espaces vectoriels 128
V.1.3 Sommes directes 129
V.1.4 En dimension finie 130
V.1.5 Projecteurs et symétries 132
V.1.6 Matrices par blocs et sous-espaces stables 134

V.1.7 Matrices semblables . . . 137
V.1.8 Formes linéaires et hyperplans . . . 138
V.1.9 Trace . . . 139
V.1.10 Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées 140
V.2 Questions . . . 142
V.3 Éclairages . . . 145
V.4 Réponses . . . 147
[R V. 1] (Caractérisation d'une symétrie) . . . 147
[R V. 2] (Caractérisation d'un projecteur dans $\mathbb{R}^3$) . . . 147
[R V. 3] (Dimension de $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$) . . . 148
[R V. 4] (Déterminant d'un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$) . . . 149
[R V. 5] (Inverse d'une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$) . . . 149
[R V. 6] (Propriétés de la somme de deux projecteurs) . . . 150
[R V. 7] (Matrices par blocs) . . . 152
[R V. 8] (Matrice semblable à une matrice nilpotente) . . . 153
[R V. 9] (Déterminant d'une matrice tridiagonale) . . . 154
[R V. 10] (Chaîne des noyaux) . . . 155
[R V. 11] (Chaîne des images) . . . 155
[R V. 12] (Inverse et endomorphisme nilpotent) . . . 156
[R V. 13] (Bijection réciproque et polynôme annulateur) . . . 156
[R V. 14] (Isomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ vers son dual) . . . 157
[R V. 15] (Caractérisation d'un isomorphisme de E^* dans $\mathbb{R}^n$) . . . 157
[R V. 16] (Matrice de trace nulle) . . . 158
[R V. 17] (Puissances d'une matrice et polynôme annulateur) . . . 160

VI Réduction 161
VI.1 Cours . . . 161
VI.1.1 Éléments propres d'un endomorphisme . . . 161
VI.1.2 Éléments propres d'une matrice carrée . . . 163
VI.1.3 Éléments propres des endomorphismes en dimension finie . . . 165
VI.1.4 Théorème de Cayley-Hamilton . . . 166
VI.1.5 Multiplicité d'une valeur propre . . . 167
VI.1.6 Diagonalisation en dimension finie . . . 168
VI.1.7 Diagonalisation des matrices carrées . . . 169
VI.1.8 Trigonalisation en dimension finie . . . 171
VI.2 Questions . . . 172
VI.3 Éclairages . . . 175
VI.4 Réponses . . . 178
[R VI. 1] (Exemples de réductions de matrices) . . . 178
[R VI. 2] (Diagonalisation d'une matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$) . . . 180

[R VI. 3] (Diagonalisation d'une matrice de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$) 180
[R VI. 4] (Liberté d'une famille de fonctions) 181
[R VI. 5] (Utilisation d'un polynôme annulateur) 182
[R VI. 6] (Trigonalisation dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$) 182
[R VI. 7] (Diagonalisation d'une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$) 183
[R VI. 8] (Diagonalisation d'une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$) 184
[R VI. 9] (Étude d'une suite récurrente linéaire) 185
[R VI. 10] (Diagonalisation d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$) 187
[R VI. 11] (Résolution d'une équation matricielle) 187
[R VI. 12] (Réduction d'une matrice circulante) 189
[R VI. 13] (Diagonalisabilité d'un endomorphisme nilpotent) 191
[R VI. 14] (Réduction d'une matrice définie par blocs) 191
[R VI. 15] (Polynôme caractéristique du produit AB) 192
[R VI. 16] (Matrice A^2 diagonalisable, A non diagonalisable) 193
[R VI. 17] (Diagonalisabilité du carré d'un endomorphisme) 193
[R VI. 18] (Puissance d'une matrice A et utilisation de χ_A) 194
[R VI. 19] (Codiagonalisation) 195
[R VI. 20] (Matrice compagnon) 196
[R VI. 21] (Densité dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$) 197
[R VI. 22] (Codiagonalisation d'endomorphismes) 198
[R VI. 23] (Localisation des valeurs propres) 199
[R VI. 24] (Un critère de diagonalisabilité) 199

VII Espaces vectoriels normés 201
VII.1 Cours 201
VII.1.1 Convexité 201
VII.1.2 Normes et distances 202
VII.1.3 Parties bornées 205
VII.1.4 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé . . . 205
VII.1.5 Éléments de topologie dans un espace vectoriel normé 207
VII.1.6 Applications entre espaces vectoriels normés 209
VII.1.7 Continuité des applications multilinéaires 217
VII.2 Questions 217
VII.3 Éclairages 220
VII.4 Réponses 223
[R VII. 1] (Normes non équivalentes) 223
[R VII. 2] (Norme euclidienne sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$) 224
[R VII. 3] (Espace des suites réelles de carré sommable) 224
[R VII. 4] (Densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$) 226
[R VII. 5] (Matrices commutant avec tout élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$) . . . 226
[R VII. 6] (Divergence d'une suite de matrices) 227

[R VII. 7] (Continuité de la distance à une partie) 228
[R VII. 8] (Norme dans $\mathcal{L}(E)$) 228
[R VII. 9] (Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ fermé, borné et convexe) 230
[R VII. 10] (Limite d'une suite de matrices) 231
[R VII. 11] (Norme p sur l'espace des fonctions continues) 231
[R VII. 12] ($S_n(\mathbb{R})$ et $S_n^+(\mathbb{R})$ sont des fermés) 233
[R VII. 13] (Exponentielle de matrice) 234
[R VII. 14] (Propriétés topologiques de $O_n(\mathbb{R})$) 235
[R VII. 15] (Norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ invariante par similitude) 236
[R VII. 16] (Des propriétés topologiques de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$) 236
[R VII. 17] (Théorème de Hahn-Banach) 237

VIII Dérivation **239**
VIII.1 Cours 239
VIII.1.1 Dérivabilité 239
VIII.1.2 Opérations sur les dérivées 241
VIII.1.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ 243
VIII.2 Questions 246
VIII.3 Éclairages 247
VIII.4 Réponses 248
[R VIII. 1] (Dérivée d'une fonction matricielle) 248
[R VIII. 2] (Dérivée d'une fonction matricielle) 249
[R VIII. 3] (Dérivée d'une application) 250
[R VIII. 4] (Calcul d'un vecteur tangent) 250
[R VIII. 5] (Équation différentielle vectorielle) 251
[R VIII. 6] (Wronskien) 252

IX Suites et séries de fonctions **253**
IX.1 Cours 253
IX.1.1 Modes de convergence d'une suite de fonctions . . . 253
IX.1.2 Modes de convergence d'une série de fonctions . . . 255
IX.1.3 Régularité de la limite d'une suite de fonctions . . . 257
IX.1.4 Régularité de la somme d'une série de fonctions . . 259
IX.1.5 Dérivation terme à terme d'une série de fonctions . 260
IX.2 Questions 262
IX.3 Éclairages 265
IX.4 Réponses 267
[R IX. 1] (Convergences de suites de fonctions) 267
[R IX. 2] (Convergences de séries de fonctions) 269
[R IX. 3] (Preuve de non-convergence uniforme) 271
[R IX. 4] (Non-permutabilité des symboles lim et $\int$) 271

[R IX. 5] (Limite usuelle) 272
[R IX. 6] (Somme d'une série d'intégrales) 273
[R IX. 7] (Régularité de la somme d'une série de fonctions) 274
[R IX. 8] (Somme de classe $\mathcal{C}^1$ d'une série de fonctions) 275
[R IX. 9] (Continuité de la somme d'une série de fonctions) 276
[R IX. 10] (Étude d'une somme de série de fonctions) 277
[R IX. 11] (Étude d'une somme de séries de fonctions) 278
[R IX. 12] (Étude d'une somme d'une série de fonctions) 280
[R IX. 13] (Une série de fonctions non monotones) 282

X Endomorphismes des espaces euclidiens 285

X.1 Cours 285
X.1.1 Rappels de PCSI 285
X.1.2 Isométries vectorielles 292
X.1.3 Matrices orthogonales 294
X.1.4 Isométries vectorielles en dimension 2 296
X.1.5 Angles et rotations vectorielles 296
X.1.6 Réflexions vectorielles du plan 298
X.1.7 Endomorphismes autoadjoints, matrices symétriques 299
X.1.8 Autoadjoints positifs et définis positifs 300
X.2 Questions 301
X.3 Éclairages 304
X.4 Réponses 307
[R X. 1] (Un produit scalaire dans $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) 307
[R X. 2] (Application linéaire conservant la distance) 309
[R X. 3] (Polynômes de Tchebychev et produit scalaire) 309
[R X. 4] (Produit scalaire dans $\mathbb{R}[X]$) 311
[R X. 5] (Famille orthogonale de polynômes) 312
[R X. 6] (Un sous-espace vectoriel de $S(\mathbb{R}_n[X])$) 313
[R X. 7] (Distance à un sous-espace) 314
[R X. 8] ("Racine carrée" d'un endomorphisme de $S^+(E)$) 316
[R X. 9] ("Racine carrée" d'une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$) 318
[R X. 10] (Coefficients d'une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$) 319
[R X. 11] (Endomorphismes préservant l'orthogonalité) 319
[R X. 12] (Spectre d'une matrice de $S_n(\mathbb{R})$) 320
[R X. 13] (Co-réduction dans $S_n(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$) 321
[R X. 14] (Déterminants de matrices de $S_n(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$) 321
[R X. 15] (Une bijection de $A_n(\mathbb{R})$ vers $SO_n(\mathbb{R})$) 322
[R X. 16] (Condition de stabilité de $O_n(\mathbb{R})$ par similitude) 323

XI Séries entières **325**
XI.1 Cours . . . 325
XI.1.1 Définition et rayon de convergence . . . 325
XI.1.2 Calcul du rayon de convergence . . . 326
XI.1.3 Régularité de la somme d'une série entière . . . 328
XI.1.4 Développement en série entière . . . 330
XI.1.5 Développements usuels . . . 331
XI.1.6 Fonctions exponentielles et fonctions rationnelles d'une variable complexe . . . 333
XI.2 Questions . . . 334
XI.3 Éclairages . . . 336
XI.4 Réponses . . . 339
[R XI. 1] (Calculs de rayons de convergence) . . . 339
[R XI. 2] (Calculs de sommes) . . . 341
[R XI. 3] (Fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$) . . . 343
[R XI. 4] (Utilisation de la série de Taylor associée) . . . 344
[R XI. 5] (Utilisation d'une équation différentielle) . . . 345
[R XI. 6] (Détermination d'un rayon de convergence) . . . 346
[R XI. 7] (Continuité en R) . . . 347
[R XI. 8] (Utilisation d'une équation) . . . 348
[R XI. 9] (Utilisation d'une équation différentielle) . . . 350
[R XI. 10] (Série entière à coefficients entiers) . . . 351

XII Intégration avancée **353**
XII.1 Cours . . . 353
XII.2 Questions . . . 359
XII.3 Éclairages . . . 360
XII.4 Réponses . . . 362
[R XII. 1] (Interversion limite-intégrale) . . . 362
[R XII. 2] (Interversion limite-intégrale) . . . 363
[R XII. 3] (Interversion limite-intégrale) . . . 364
[R XII. 4] (Interversion limite-intégrale) . . . 365
[R XII. 5] (Interversion limite-intégrale) . . . 366
[R XII. 6] (Interversion somme infinie-intégrale) . . . 367
[R XII. 7] (Interversion somme infinie-intégrale) . . . 368
[R XII. 8] (Continuité de la transformée de Fourier) . . . 370
[R XII. 9] (Équivalent d'une intégrale) . . . 370
[R XII. 10] (Dérivation et intégrale à paramètre) . . . 371
[R XII. 11] (Dérivées successives et intégrale à paramètre) . . . 374

XIII Calcul différentiel **375**
XIII.1 Cours . . . 375
XIII.1.1 Différentielle des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ . . . 375
XIII.1.2 Différentielle et gradient . . . 377
XIII.1.3 Règle de la chaîne . . . 378
XIII.1.4 Dérivées partielles d'ordre 2 . . . 380
XIII.1.5 Recherches d'extrema . . . 382
XIII.2 Questions . . . 384
XIII.3 Éclairages . . . 386
XIII.4 Réponses . . . 388
[R XIII. 1] (Recherche d'extrema) . . . 388
[R XIII. 2] (Extrema d'une fonction) . . . 390
[R XIII. 3] (Recherche d'extrema sur un fermé) . . . 391
[R XIII. 4] (Extrema d'une fonction de $\mathbb{R}^n$) . . . 392
[R XIII. 5] (Minimum et convexité sur $\mathbb{R}^n$) . . . 395
[R XIII. 6] (Fonction strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$) . . . 395
[R XIII. 7] (Convexité et matrice hessienne) . . . 396
[R XIII. 8] (Résolution d'une équation aux dérivées partielles) . . . 397
[R XIII. 9] (Extremum relativement à la sphère unité) . . . 399
[R XIII. 10] (Gradient d'une fonction définie sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$) . . . 399
[R XIII. 11] (Minimum d'une fonction convexe) . . . 400

XIV Familles sommables **403**
XIV.1 Cours . . . 403
XIV.1.1 Dénombrabilité . . . 403
XIV.1.2 Sommes de familles de réels positifs . . . 404
XIV.1.3 Familles sommables de nombres complexes . . . 406
XIV.2 Questions . . . 409
XIV.3 Éclairages . . . 410
XIV.4 Réponses . . . 411
[R XIV. 1] (Existence d'une somme) . . . 411
[R XIV. 2] (Exemple de famille non sommable) . . . 411
[R XIV. 3] (Une interversion de sommes infinies) . . . 413
[R XIV. 4] (Un calcul de somme double de réels positifs) . . . 414
[R XIV. 5] (Somme double de réels) . . . 415
[R XIV. 6] (Sommabilité d'une famille de réels positifs) . . . 416
[R XIV. 7] (Développement en série entière) . . . 417

XV Variables aléatoires discrètes **419**
XV.1 Cours . . . 419
XV.1.1 Espaces probabilisés . . . 419
XV.1.2 Probabilité . . . 421
XV.1.3 Probabilité sur un ensemble dénombrable ou fini . . . 423
XV.1.4 Probabilités conditionnelles . . . 423
XV.1.5 Indépendance . . . 425
XV.1.6 Variables aléatoires discrètes . . . 426
XV.1.7 Couples de variables aléatoires . . . 428
XV.1.8 Espérance d'une variable aléatoire discrète . . . 429
XV.1.9 Variance d'une variable aléatoire réelle discrète . . . 432
XV.1.10 Indépendance de variables aléatoires . . . 435
XV.1.11 Séries génératrices d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$ . . . 438
XV.1.12 Lois usuelles . . . 439
XV.1.13 Inégalités probabilistes . . . 441
XV.2 Questions . . . 442
XV.3 Éclairages . . . 447
XV.4 Réponses . . . 450
[R XV. 1] (Tirages dans une urne) . . . 450
[R XV. 2] (Fonctions de variables de même loi géométrique) . . . 451
[R XV. 3] (Espérance conditionnelle) . . . 454
[R XV. 4] (Loi binomiale négative) . . . 455
[R XV. 5] (Points fixes d'une permutation de $[\![1, n]\!]$) . . . 456
[R XV. 6] (Variables décorrélées mais non indépendantes) . . . 457
[R XV. 7] (Autour des propriétés de l'espérance) . . . 457
[R XV. 8] (Couplage loi de Poisson - loi binomiale) . . . 458
[R XV. 9] (Fonctions génératrices et lois de Poisson) . . . 459
[R XV. 10] (Les événements rares) . . . 459
[R XV. 11] (Somme d'un nombre variable de termes) . . . 461
[R XV. 12] (Une première inégalité) . . . 462
[R XV. 13] (Encore deux inégalités) . . . 463
[R XV. 14] (Utilisation des fonctions génératrices) . . . 464
[R XV. 15] (Espèce en voie d'extinction) . . . 465
[R XV. 16] (La bestiole se promène sur un triangle) . . . 467
[R XV. 17] (Convergence uniforme d'une suite de polynômes) . . . 469
[R XV. 18] (Somme de variables et fonction génératrice) . . . 471
[R XV. 19] (Convergence presque sûre) . . . 473
[R XV. 20] (Calcul d'un équivalent) . . . 474

Chapitre I
Petits outils

Ce chapitre a pour objectif de réviser quelques notions et techniques usuelles développées pendant l'année de sup. Il ne se veut pas une révision exhaustive du programme de PCSI mais permet un retour sur des notions essentielles ou parfois vite oubliées. On revient en particulier dans ce chapitre sur un certain nombre de points de calculs et sur des méthodes permettant d'obtenir des majorations ou minorations.

I.1 - Cours

I.1.1 - Généralités

[Définition I.1] Segment de $\mathbb{R}$
On appelle **segment** de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme
$[a,b] = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leq x \leq b \right\}$, où a et b sont deux réels tels que $a \leq b$.

[Définition I.2] Intervalle
On appelle **intervalle** de $\mathbb{R}$ les ensembles de l'une des formes suivantes :
$]a,b[= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a < x < b \right\}$, $[a,b[= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leq x < b \right\}$,
$]a,b] = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a < x \leq b \right\}$, $[a,b] = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leq x \leq b \right\}$,
$]-\infty,b] = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \leq b \right\}$, $]-\infty,b[= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x < b \right\}$,
$[a,+\infty[= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leq x \right\}$, $]a,+\infty[= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a < x \right\}$,
$]-\infty,+\infty[= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\infty < x < +\infty \right\}$. (Où a et b désignent deux réels).

[Propriété I.3] Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$
Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les convexes de $\mathbb{R}$. Autrement dit, un sous-ensemble K de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\forall (x,y) \in K^2, [x,y] \subset K$.

✍ *On veillera à bien distinguer les trois notions : sous-ensemble (ou partie de $\mathbb{R}$), intervalle de $\mathbb{R}$, segment de $\mathbb{R}$. On comprendra qu'un intervalle est un type particulier de sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Un segment de $\mathbb{R}$ est un exemple d'intervalle de $\mathbb{R}$: c'est un intervalle fermé et borné.*

[Propriété I.4] Inégalités triangulaires
Si u et v sont deux complexes alors :

$$|u+v| \leq |u| + |v|.$$

$$||u| - |v|| \leq |u-v| \leq |u| + |v|\,.$$

On a l'égalité $|u+v| = |u| + |v|$ si et seulement si u et v sont positivement liés, c'est-à-dire s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$.

Si $u_1, \ldots, u_n$ sont des complexes, alors : $\left|\sum_{i=1}^{n} u_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |u_i|\,.$

I.1.2 - Fonctions continues

Dans toute la suite, la lettre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle.

[Définition I.5] Continuité sur un intervalle de $\mathbb{R}$
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de I vers $\mathbb{C}$. On dit que la fonction f est **continue** sur I si et seulement si elle est continue en tout point de I.

✍ *On évitera de parler de fonctions continues sur des ensembles de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas des intervalles, on risquerait alors d'être tenté d'utiliser les théorèmes qui suivent dans des cas où ils ne sont pas valables.*

[Propriété I.6] Théorème des valeurs intermédiaires
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue de I vers $\mathbb{R}$.
Soient α et β deux éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si α et β appartiennent à $f(I)$ ou sont limites de suites d'éléments de $f(I)$, alors tout réel strictement compris entre α et β appartient à $f(I)$. On retient que l'image d'un intervalle par une fonction réelle continue est un intervalle.

[Propriété I.7] Théorème des bornes atteintes
Toute fonction (réelle ou complexe) continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.
L'image d'un segment par une fonction réelle continue est un segment.

♥ *En particulier, si f est une fonction réelle ou complexe de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment K, alors sa dérivée f' est bornée sur K.*

I.1.3 - Intégration des fonctions continues

[Propriété I.8] Théorème fondamental de l'analyse
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue de I vers $\mathbb{C}$.
Alors f admet des primitives, et l'on peut, pour tout réel a de I, définir la fonction de I vers $\mathbb{C}$: $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ qui est l'une des primitives de f.
C'est la seule primitive de la fonction f qui s'annule en a.

♥ *Voir l'exercice :* [Q I.8 p. 24]

[Propriété I.9] Intégrale de fonctions positives
Soient a et b deux réels avec $a \leq b$. Soit f une fonction continue du segment $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$.

(−) Si la fonction f est positive sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.

(−) Si la fonction f est positive sur $[a, b]$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$,
alors : $\forall t \in [a, b], f(t) = 0$.

✍ *On déduit du premier item que si f et g sont continues sur le segment $[a, b]$ et $a \leq b$, alors : $f \leq g \implies \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.*
Il faudra cependant veiller à ce que les bornes a et b soient dans l'ordre croissant. [Q I.7 p. 23], [Q I.8 p. 24]

[Propriété I.10] Sommes de Riemann
Soient a et b deux réels avec $a \leq b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs complexes. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

♥ *On doit penser à cette formule lorsque l'on s'intéresse aux calculs de limites d'expressions de la forme* $\sum_{k=0}^{n} u_{n,k}$.

♥ *On peut se ramener à* $a = 0$ *et* $b = 1$ *avec une fonction* f *ad hoc.*

I.1.4 - Fonctions dérivables

[Propriété I.11] Dérivabilité d'une fonction
Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur un intervalle ouvert contenant le réel a. Les propositions suivantes sont équivalentes.

i) La fonction f est dérivable en a.

ii) Il existe $d \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = d$.

iii) La fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 en a, c'est-à-dire qu'il existe un complexe d tel qu'au voisinage de a on ait :

$$f(x) = f(a) + d(x - a) + \underset{a}{o}(x - a).$$

Dans ce cas, $f'(a) = d$.

Une fonction est dérivable sur un intervalle si et seulement si elle est dérivable en tout point de cet intervalle.

[Propriété I.12] Caractérisation des fonctions constantes, monotones
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction dérivable sur I.
$(-)$ La fonction f est constante sur l'intervalle I si et seulement si sa dérivée f' est nulle sur l'intervalle I.
$(-)$ La fonction f est croissante sur l'intervalle I si et seulement si sa fonction dérivée f' est positive sur l'intervalle I.
$(-)$ La fonction f est décroissante sur l'intervalle I si et seulement si sa fonction dérivée f' est négative sur l'intervalle I.
$(-)$ Si la fonction f' est strictement positive (respectivement strictement négative), sauf éventuellement en un nombre fini de points de I, alors la fonction f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I.

✍ *Attention, ce théorème ne s'applique pas lorsque l'on remplace l'intervalle* I *par une réunion d'intervalles.* [Q I.5 p. 23]

✍ *Le dernier point permet d'affirmer qu'une fonction est strictement monotone même si sa dérivée s'annule en un nombre fini de points. Par exemple :* $x \mapsto x^3$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

[Propriété I.13] Théorème de la bijection
Si f est une fonction réelle strictement monotone définie et continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ de bornes a et b, alors f est bijective.
Les bornes de l'intervalle image sont les limites de f en a et b.
La bijection réciproque est de même monotonie que f, définie et continue sur l'intervalle image.

[Propriété I.14] Théorème de Rolle
Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction du segment $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$. Si
$(-)$ la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$,
$(-)$ dérivable (au moins) sur l'ouvert $]a, b[$,
$(-)$ et vérifie $f(a) = f(b)$,
alors,
il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

✍ *Le résultat n'est pas valable pour une application à valeurs complexes.*
♥ *Ce théorème permet de prouver l'existence de zéros des dérivées successives d'une fonction réelle qui s'annule plusieurs fois.*

[Propriété I.15] Inégalité des accroissements finis
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une application de I vers $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons que le réel K soit un majorant de $|f'|$ sur l'intervalle I. Alors, la fonction f est K-**lipschitzienne** sur I, autrement dit :

$$\forall (a, b) \in I^2, |f(a) - f(b)| \leq K |b - a| .$$

♥ *S'il existe $k \in [0, 1[$ tel que $|f'| \leq k$, on dit que f est* ***contractante****, et l'on peut utiliser ce théorème pour prouver que des suites récurrentes vérifiant une relation de type $u_{n+1} = f(u_n)$ convergent.*
On peut aussi en déduire une estimation de l'écart entre u_n et sa limite pour une valeur de n donnée.

[Propriété I.16] Théorème limite de la dérivée
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit f une fonction de I vers $\mathbb{C}$. Si
$(-)$ la fonction f est continue sur I,
$(-)$ la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$,
$(-)$ il existe un complexe ℓ tel que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell$,
alors,

la fonction f est dérivable en a et $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$.
La fonction f' est donc continue en a et la fonction f est ainsi de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

♥ *Si f est une fonction à valeurs réelles continue sur I, dérivable sur $I\setminus\{a\}$ avec $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$.*

[Propriété I.17] Théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^k$
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de I vers $\mathbb{C}$ et $k\in\mathbb{N}$. Soit $a\in I$. Si
$(-)$ la fonction f est continue sur I,
$(-)$ la fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I\setminus\{a\}$,
$(-)$ si pour tout $i\in[\![0,k]\!]$, il existe un complexe ℓ_i tel que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f^{(i)}(x) = \ell_i$,
alors,
la fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et pour tout $i\in[\![0,k]\!]$, $f^{(i)}(a) = \ell_i$.

♥ *Soit f une fonction définie par une expression de type :*
$f : x \mapsto \begin{cases} \varphi(x) \text{ si } x\in I\setminus\{a\} \\ \ell \text{ si } x = a \end{cases}$.
Si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,a[\cap I$ et $[a,+\infty[\cap I$, ce théorème permet, s'il s'applique, de prouver rapidement que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I (et même de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I). [Q I.9 p. 24]

I.1.5 - Convexité

[Définition I.18] Fonction convexe, concave
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de I vers $\mathbb{R}$, on dit que la fonction f est **convexe** sur I si l'on a :
$\forall (x,y)\in I^2, \forall\lambda\in[0,1],\ f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$. La fonction f est **concave** si et seulement si $-f$ est convexe et l'on a :
$\forall (x,y)\in I^2, \forall\lambda\in[0,1],\ f(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

[Propriété I.19] Interprétation graphique
La fonction f est convexe sur l'intervalle I si et seulement si quels que soient les réels x et y de I, pour les abscisses comprises entre x et y, la courbe représentative de f est au-dessous de la corde reliant les points de coordonnées $(x,f(x))$ et $(y,f(y))$.

La fonction f est concave si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus de la corde reliant les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.

♥ *Cette propriété est rarement utilisée pour prouver qu'une fonction réelle est convexe. Si la régularité de la fonction le permet, on utilise le plus souvent la propriété [P I.21] pour prouver qu'une fonction est convexe.* [Q I.6 p. 23]

[Propriété I.20] Convexité des fonctions dérivables
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de I vers $\mathbb{R}$, dérivable sur I.

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) La fonction f est convexe sur I.
ii) La fonction f' est croissante sur I.
iii) La courbe représentative de la fonction f est au-dessus de ses tangentes, c'est-à-dire :

$$\forall x_0 \in I,\ \forall x \in I,\ f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) La fonction f est concave sur I.
ii) La fonction f' est décroissante sur I.
iii) L ; ;t a courbe représentative de la fonction f est en-dessous de ses tangentes, c'est-à-dire :

$$\forall x_0 \in I,\ \forall x \in I,\ f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

♥ *Voir l'exercice :* [Q I.6 p. 23]

[Propriété I.21] Convexité des fonctions deux fois dérivables
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de I vers $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur l'intervalle I. On note f'' sa dérivée seconde.
$(-)$ La fonction f est convexe si et seulement si f'' est positive sur I.
$(-)$ La fonction f est concave si et seulement si f'' est négative sur I.

♥ *Ces propriétés permettent d'établir des inégalités assez fines.*
On montre qu'une fonction f donnée est convexe à l'aide du signe de f'', on établit ensuite un encadrement de f à l'aide des propriétés [P I.19] et [P I.20]. [Q I.6 p. 23]

I.1.6 - Formules de Taylor

[Propriété I.22] Formule de Taylor-Young
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction réelle ou complexe de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant a. On a le développement limité suivant :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \underset{a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

✍ *Cette formule, comme le sparadrap, est à usage local. Elle ne permet pas, par exemple, d'établir une égalité sur tout un intervalle.*

[Propriété I.23] Formule de Taylor avec reste intégral
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction réelle ou complexe de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux réels de I. On a l'égalité suivante :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t.$$

♥ *Voir l'exercice :* [Q I.11 p. 24]

[Propriété I.24] Inégalité de Taylor-Lagrange
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction réelle ou complexe de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux réels de I. Soit M un majorant de $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur le segment de bornes a et b. Alors :

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!}\right| \leq M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

✍ *la fonction f étant de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment de bornes a et b. Le théorème des bornes atteintes [P I.7] garantit l'existence d'un majorant M.*
✍ *Pour ces deux dernières formules, on peut avoir $a \leq b$ ou $b \leq a$.*
✍ *Pour obtenir ces deux dernières formules à l'ordre n, on remarque qu'on utilise une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*

I.1.7 - Formule de Stirling

[Propriété I.25] Équivalent de la factorielle

$$n! \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}.$$

♥ *Voir l'exercice :* [Q I.12 p. 24]

I.2 - Questions

[Question I.1] Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels. Développer la somme $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$.

(*Éclairage page* 24, *Réponse page* 26)

[Question I.2] Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels.
Montrer que $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$ si et seulement si les réels de la famille $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont tous de même signe. (*Éclairage page* 25, *Réponse page* 27)

[Question I.3] Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes non nuls.
Montrer que $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$ si et seulement si les complexes de la famille $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont tous de même argument. (*Éclairage page* 25, *Réponse page* 27)

[Question I.4] Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Résoudre l'équation d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$: $\sum_{k=1}^{n} \exp(\mathrm{i}k\theta) = 0$. (*Éclairage page* 25, *Réponse page* 28)

[Question I.5] Simplifier pour $x \in \mathbb{R}^*$, l'expression :
$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. (*Éclairage page* 25, *Réponse page* 29)

[Question I.6] Montrer que, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$. (*Éclairage page* 25, *Réponse page* 29)

[Question I.7] Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1$ et $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$. (*Éclairage page* 25, *Réponse page* 30)

[Question I.8] Étudier aussi complètement que possible la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$. (*Éclairage page* 25, *Réponse page* 30)

[Question I.9] Trouver une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in]a,b[, f(t) > 0 \text{ et } \forall t \notin]a,b[, f(t) = 0.$$

(*Éclairage page* 25, *Réponse page* 33)

[Question I.10] Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \mathrm{e}^z$.
(*Éclairage page* 26, *Réponse page* 34)

[Question I.11] Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,a[$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. (*Éclairage page* 26, *Réponse page* 35)

[Question I.12] Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n}$.
(*Éclairage page* 26, *Réponse page* 36)

I.3 - Éclairages

[Éclairage I.1] Remarquons que l'on peut écrire :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right).$$

Il est nécessaire de ne pas mettre le même indice dans deux sommes dont on fait le produit pour bien faire apparaître les doubles produits. (*Réponse page* 26)

[Éclairage I.2] Utilisons le résultat de la question 1 et mettons au carré.
(*Réponse page* 27)

[Éclairage I.3] Utilisons dans un premier temps le résultat de la question 1 en élevant au carré, puis remarquons que : $\forall z \in \mathbb{C} : z\overline{z} = |z|^2$.
(*Réponse page* 27)

[Éclairage I.4] Pensons aux sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique.
(*Réponse page* 28)

[Éclairage I.5] Dérivons la fonction : $x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
(*Réponse page* 29)

[Éclairage I.6] On pense aux inégalités liées à la convexité. [P I.19] et [P I.20].
(*Réponse page* 29)

[Éclairage I.7] Pour l'inégalité de gauche du premier encadrement, on peut, par exemple, utiliser une étude de fonction.
Pour le deuxième encadrement, on peut intégrer entre 0 et x le résultat précédent.
(*Réponse page* 30)

[Éclairage I.8] Il n'est pas possible de calculer cette intégrale par des moyens classiques (primitivation, intégration par parties, changement de variable). On est donc conduit à utiliser des moyens indirects et à étudier successivement :
(−) la définition et la monotonie de g,
(−) les limites à partir d'encadrements de l'intégrande.
Pour la recherche d'équivalents d'intégrales, il peut être habile d'utiliser une intégration par parties de la forme $\int uv' = [uv'] - \int v'u$, en s'efforçant d'avoir $\int uv' \sim [uv']$. [P I.9].
(*Réponse page* 30)

[Éclairage I.9] On peut d'abord chercher une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f(t) > 0 \text{ et } \forall t \notin \mathbb{R}_+,\ f(t) = 0.$$

(−) On peut par exemple, s'intéresser à la fonction g définie par $g(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$.

On peut montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en exprimant ses dérivées successives comme des produits d'expressions polynomiales en $\dfrac{1}{x}$ par $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ puis appliquer le théorème limite de la dérivée [P I.16] ou théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^k$ [P I.17].

$(-)$ Dans un deuxième temps, on essaie, à partir de la fonction g, de construire une fonction f qui réponde à la question. (*Réponse page* 33)

[Éclairage I.10] Soit $z \in \mathbb{C}$. On peut utiliser la forme trigonométrique de z : il existe $r \in \mathbb{R}_*^+$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$ tels que

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r\cos(\theta) + \mathrm{i}r\sin(\theta).$$

On détermine alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'écriture trigonométrique de $1 + \dfrac{z}{n}$ puis on applique la formule de Moivre. Il ne reste qu'à conclure. (*Réponse page* 34)

[Éclairage I.11] La forme du terme général de la suite nous incite à utiliser une formule de Taylor [P I.23]. (*Réponse page* 35)

[Éclairage I.12] La présence de factorielles nous suggère l'utilisation de la formule de Stirling [P I.25]. (*Réponse page* 36)

I.4 - Réponses

[Réponse I.1] (**Développement**)

(*Relire la question : page* 23)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j.$

Donc $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j + \sum_{1\le j<i\le n} a_i a_j.$

D'où :

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j.}$$

[Réponse I.2] (**Inégalité triangulaire**)

(*Relire la question : page* 23)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Les sommes proposées vérifient : $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \in \mathbb{R}_+$ et $\sum_{i=1}^{n} |a_i| \in \mathbb{R}_+$. Donc

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| &\iff \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\right)^2 \\ &\iff \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} |a_i a_j| \\ &\iff \sum_{1\le i<j\le n} (|a_i a_j| - a_i a_j) = 0 \\ &\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j,\ |a_i a_j| - a_i a_j = 0.\end{aligned}$$

En effet, pour tous les indices i et j, par définition de la valeur absolue, les nombres $|a_i a_j| - a_i a_j$ sont positifs.

Conclusion : Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si tous les réels de la famille $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont de même signe.

[Réponse I.3] (**Inégalité triangulaire dans** $\mathbb{C}$)

(*Relire la question : page* 23)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{C}^\star)^n$. $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \in \mathbb{R}_+$ et $\sum_{i=1}^{n} |a_i| \in \mathbb{R}_+$.

On a donc : $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \iff \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\right)^2$

$$\iff \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{a_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} |a_i a_j|$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{a_i}^{=} + \sum_{1\le i<j\le n} (a_i \overline{a_j} + \overline{a_i} a_j) = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} |a_i a_j|$$

$$\iff \sum_{1\le i<j\le n} 2\,|a_i \overline{a_j}| - 2\mathcal{R}\mathrm{e}\,(a_i \overline{a_j}) = 0.$$

Or tous les réels $|a_i \overline{a_j}| - \mathcal{R}\mathrm{e}\,(a_i \overline{a_j})$ sont positifs, donc leur somme est nulle si et seulement si ils sont tous nuls.

Donc : $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$
$\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $\mathcal{R}\mathrm{e}\,(a_i\overline{a_j}) = |a_i a_j|$
$\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $a_i\overline{a_j} \in \mathbb{R}_+$
$\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $\exists \lambda_{ij} \in \mathbb{R}_+$, $a_i\overline{a_j} = \lambda_{ij}$
$\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $\exists \lambda_{ij} \in \mathbb{R}_+$, $a_i = \dfrac{\lambda_{ij}}{\overline{a_j}}$ (car a_j est non nul)
$\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $\exists \lambda_{ij} \in \mathbb{R}_+$, $a_i = \dfrac{\lambda_{ij} a_j}{|a_j|^2}$
$\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $\exists \mu_{ij} \in \mathbb{R}_+$, $a_i = \mu_{ij} a_j$
$\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, a_i et a_j ont le même argument.
En conséquence, pour $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de nombres complexes non nuls, on a l'égalité : $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$ si et seulement si les complexes de la famille $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont tous de même argument.

[Réponse I.4] (**Calcul d'une somme classique**)

(*Relire la question : page* 23)
Soient $n \in [\![2,+\infty[\![$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
$(-)$ Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, on a : $\sum_{k=1}^{n} \exp(\mathrm{i}k\theta) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n \neq 0$. Donc θ n'est pas solution de cette équation.
$(-)$ Si $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, alors $\exp(\mathrm{i}k\theta) \neq 1$. Le complexe $\sum_{k=1}^{n} \exp(\mathrm{i}k\theta)$ est alors la somme de n termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme $\exp(\mathrm{i}\theta)$. Sa raison $\exp(\mathrm{i}\theta)$ vérifie $\exp(\mathrm{i}\theta) \neq 1$. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} \exp(\mathrm{i}k\theta) = \exp(\mathrm{i}\theta) \times \frac{1-\exp(\mathrm{i}n\theta)}{1-\exp(\mathrm{i}\theta)}.$$

Or, $1-\exp(\mathrm{i}n\theta) = \exp\left(\mathrm{i}\frac{n\theta}{2}\right)\left(\exp\left(-\mathrm{i}\frac{n\theta}{2}\right) - \exp\left(\mathrm{i}\frac{n\theta}{2}\right)\right) = -2\mathrm{i}\exp\left(\mathrm{i}\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$ et l'on a de même : $1-\exp(\mathrm{i}\theta) = -2\mathrm{i}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
On en déduit : $\sum_{k=1}^{n} \exp(\mathrm{i}k\theta) = \exp(\mathrm{i}\theta) \times \dfrac{\exp\left(\mathrm{i}\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\exp\left(\mathrm{i}\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

$$\boxed{\text{Ainsi } \sum_{k=1}^{n} \exp(\mathrm{i}k\theta) = \exp\left(\mathrm{i}\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.}$$

Dès lors : $\sum_{k=1}^{n} \exp(\mathrm{i}k\theta) = 0 \iff \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) = 0 \iff \frac{n\theta}{2} \equiv 0\ [\pi]$. Donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \exp(\mathrm{i}k\theta) = 0 \iff \theta \equiv 0\ \left[\frac{2\pi}{n}\right] \text{ et } \theta \not\equiv 0\ [2\pi].}$$

[Réponse I.5] (**Fonction constante par morceaux**)

(*Relire la question : page* 23, *le cours :* [P I.12 p.18])

La fonction arctan est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $i : x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ et $\mathbb{R}_*^-$. La fonction $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ et $\mathbb{R}_*^-$.

Les fonctions arctan et i étant impaires, la fonction f est impaire. On peut donc limiter l'étude à $\mathbb{R}_*^+$.

$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \times \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$

La fonction f est donc constante sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ [P I.12].

$f(1) = \arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ f(x) = \frac{\pi}{2}} \text{ et par parité : } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}_*^-,\ f(x) = -\frac{\pi}{2}.}$$

[Réponse I.6] (**Encadrements usuels de** sin)

(*Relire la question : page* 23, *le cours :* [P I.19 p.20], [P I.20 p.21], [P I.21 p.21])

La fonction sinus est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$\forall x \in I,\ \sin''(x) = -\sin(x) \leq 0$. Donc d'après la propriété [P I.21], la fonction sinus est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est $y = x$.

Une équation de la corde passant par les points $(0,0)$ et $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ est $y = \frac{2}{\pi}x$.

D'après les propriétés [P I.19] et [P I.20], par concavité sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la courbe de la fonction sinus est en dessous de la tangente et au-dessus de cette corde, ce qui se traduit par : $\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x.}$

[Réponse I.7] (**Encadrements usuels de** cos **et** sin)

(*Relire la question : page* 23, *le cours :* [P I.9 p.17])

(−) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1$.
$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \cos(x) \leq 1$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f : x \mapsto \cos(x) - 1 + \dfrac{x^2}{2}$.
f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = -\sin(x) + x$.
D'après l'exercice précédent, $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \leq x$ et pour $x \geq \dfrac{\pi}{2}$, on a : $\sin(x) \leq 1 \leq x$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sin(x) \leq x$. D'où : $\forall x \in \mathbb{R}_+\ f'(x) \geq 0$.
La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et comme $f(0) = 0$:
$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \geq 0$ d'où : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos(x)$. Donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1.}$$

☞ Les fonctions cos et $x \mapsto x^2$ étant paires sur $\mathbb{R}$, la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$, donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1$.

(−) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$.

☞ L'intérêt de la méthode développée dans ce deuxième point est qu'elle réutilise le résultat précédent, et pourrait donc s'appliquer sans connaître au préalable l'encadrement à prouver.

D'après le résultat précédent : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 1 - \dfrac{t^2}{2} \leq \cos(t) \leq 1$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+$, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant [P I.9] : $\displaystyle\int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t \leq \int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x 1\,\mathrm{d}t$, ce qui revient à :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x.}$$

[Réponse I.8] (**Fonction définie par une intégrale**)

(*Relire la question : page* 24, *le cours :* [P I.8 p.17], [P I.9 p.17])

☞ Il est impossible de calculer cette intégrale, c'est pour cela que l'on emploie les méthodes qui suivent.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est définie et continue sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

$(-)$ Étudions la définition et les variations de la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.
Si $x < 0$, $x^2 > 0$ et $f(t)$ n'a pas de sens pour $t \in [x, 0]$.
Si $x \in]0,1[$, alors $[x^2, x]$ est inclus dans l'intervalle $]0,1[$ sur lequel f est continue.
Si $x > 1$, alors le segment $[x, x^2]$ est inclus dans l'intervalle $]1,+\infty[$ sur lequel la fonction f est continue. La fonction g est donc définie sur $D_g =]0,1[\cup]1,+\infty[$.

La fonction f étant continue sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$, elle y admet des primitives [P I.8]. Soit F une primitive (nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$) de f sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.
Alors $\forall x \in D_g$, $g(x) = F(x^2) - F(x)$.
Ainsi par composition, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$, et l'on a :
$\forall x \in D_g$, $g'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \dfrac{2x}{\ln(x^2)} - \dfrac{1}{\ln(x)} = \dfrac{x-1}{\ln(x)}$.
Pour $x \in D_g$, $x - 1$ et $\ln(x)$ sont de même signe, d'où : $\forall x \in D_g$, $g'(x) > 0$.

$$\boxed{\text{Donc } g \text{ est croissante sur }]0,1[\text{ et sur }]1,+\infty[.}$$

$(-)$ Calculons la limite de $g(x)$ en 0.
Pour tout $x \in]0,1[$, $0 < x^2 < x < 1$. Par croissance de la fonction ln et décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$, f est décroissante sur $]0,1[$.
Donc : $\forall t \in [x^2, x]$, $\dfrac{1}{\ln(x)} \leq \dfrac{1}{\ln(t)} \leq \dfrac{1}{2\ln(x)}$.
On obtient par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(x^2 < x)$ [P I.9] : $\displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}t \leq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \leq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{2\ln(x)}\,\mathrm{d}t$. Donc

$$\frac{x - x^2}{\ln(x)} \leq -g(x) \leq \frac{x - x^2}{2\ln(x)}.$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x}{\ln(x)} = 0$, donc, par encadrement, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x) = 0.}$

$(-)$ Pour rechercher un équivalent de g en 0^+, l'encadrement ci-dessus est insuffisant, nous allons donc utiliser une intégration par parties.
Soit $x \in]0,1[$. Utilisons les fonctions $f : t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ et $v : t \mapsto t$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x^2, x]$. Donc par intégration par parties on a :
$g(x) = \left[\dfrac{t}{\ln(t)}\right]_x^{x^2} + \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2\ln(x)} - \frac{x}{\ln(x)} + \int_x^{x^2} \frac{1}{(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t$.

Notons $K(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t$.
Pour $t \in [x^2, x]$, on a : $0 \leq \dfrac{1}{(\ln(t))^2} \leq \dfrac{1}{(\ln(x))^2}$. Donc par croissance de l'intégrale on a : $0 \leq -K(x) \leq \displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{1}{(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}t = \frac{x - x^2}{(\ln(x))^2}$.
Donc $K(x) = \underset{x\to 0^+}{o}\left(\dfrac{x}{\ln(x)}\right)$. De plus, $\dfrac{x^2}{2\ln(x)} = \underset{x\to 0^+}{o}\left(\dfrac{x}{\ln(x)}\right)$.

$$\boxed{\text{Donc } g(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x}{\ln(x)}.}$$

$(-)$ Déterminons un équivalent et la limite de $g(x)$ en $+\infty$.
Pour x au voisinage de $+\infty$, on a $x^2 > x$. Les fonctions f et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, x^2]$. La même intégration par parties, donne :
$g(x) = \dfrac{x^2}{2\ln(x)} - \dfrac{x}{\ln(x)} + K(x)$ où $K(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t$.
$\forall x > 1$, $\forall t \in [x, x^2]$, $\ln(x) \leq \ln(t)$.
Comme : $\forall t > 1$, $\ln(t) > 0$, on a : $\ln(x)\ln(t) \leq (\ln(t))^2$.
Donc par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$: $\dfrac{1}{(\ln(t))^2} \leq \dfrac{1}{\ln(t)\ln(x)}$.
Par croissance de l'intégrale, pour $x < x^2$ on a donc : $0 \leq K(x) \leq \dfrac{1}{\ln(x)} g(x)$.
D'où $K(x) = \underset{+\infty}{o}(g(x))$. Ainsi $g(x) = \dfrac{x^2}{2\ln(x)} - \dfrac{x}{\ln(x)} + \underset{+\infty}{o}(g(x))$.
Comme $\dfrac{x}{\ln(x)} = \underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{x^2}{2\ln(x)}\right)$, on obtient : $\boxed{g(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2\ln(x)}.}$
On a donc par croissances comparées : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2\ln(x)} = +\infty.}$

$(-)$ Calculons les limites en 1.
En 1, $\ln(t) \underset{1}{\sim} t - 1$ d'où $\dfrac{1}{\ln(t)} \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{t-1}$.
On peut alors imaginer que $g(x)$ se comporte comme $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t$.
On va donc étudier $g(x) - \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x^2} \left(f(t) - \frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t$.
Notons que pour $t \in D_g$:
$f(t) - \dfrac{1}{t-1} = \dfrac{(t-1) - \ln(1+(t-1))}{(t-1)\ln(t)} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{\frac{1}{2}(t-1)^2}{(t-1)^2} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{2}$.

La fonction $\varphi : t \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \begin{cases} f(t) - \dfrac{1}{t-1} \text{ si } t \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } t = 1 \end{cases}$ est donc continue sur $\mathbb{R}_*^+$.
Elle admet donc des primitives de classe $\mathcal{C}^1$. Soit ϕ l'une d'entre elles. On a donc, pour tout $x \in D_g$, $g(x) - \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t = \phi(x^2) - \phi(x)$.
Par continuité de ϕ en 1 : $\lim\limits_{x\to 1} \phi(x^2) - \phi(x) = 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t = \ln(2).}$$

[Réponse I.9] (**Fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$**)

(*Relire la question : page* 24, *le cours :* [P I.17 p.20])
Soit g la fonction définie par $g(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$.

$(-)$ Montrons que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur les intervalles $\mathbb{R}_*^-$ et $\mathbb{R}_*^+$ et pour tout $x < 0$, $g^{(n)}(x) = 0$.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, comme $\lim\limits_{x\to 0^-} g^{(n)}(x) = 0$, il suffit de prouver que $g^{(n)}$ admet la même limite nulle à droite de 0 pour appliquer le théorème [P I.17].

$\diamond$ Déterminons, pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $g^{(n)}(x)$.
$\forall x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ et $g''(x) = \left(\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{2}{x^3}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.
On conjecture alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$, $\forall x > 0$, $g^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.
Montrons par récurrence que la propriété : H_n « il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x > 0$, $g^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$: $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, g(x) = P_0\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$, avec $P_0 = 1$. Donc H_0 est vérifiée.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vraie. Il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x > 0$, $g^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$. Alors :
$\forall x > 0$, $g^{(n+1)}(x) = \left(\dfrac{1}{x^2}P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x^2}P_n'\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.
Notons alors $P_{n+1} = X^2P_n - X^2P_n' \in \mathbb{R}[X]$.

Ainsi : $\forall x > 0$, $g^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$. La relation est donc vraie au rang $n+1$.
Donc H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que : } \forall x > 0,\ g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.}$$

$\diamond$ Par croissances comparées : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to 0^+} g^{(n)}(x) = 0$. Comme pour $x < 0$ $g^{(n)}(x) = 0$, on a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to 0^+} g^{(n)}(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} g^{(n)}(x) = 0.}$
D'après le théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^k$ [P I.17], la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$(-)$ Élaborons une solution à partir de la fonction g.
Soient h et k les fonctions définies pour tout réel x par : $h(x) = g(x-a)$ et $k(x) = g(b-x)$. C'est-à-dire :

$$h : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x-a}} > 0 & \text{si } x > a \end{cases} \quad \text{et} \quad k : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq b \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{b-x}} > 0 & \text{si } x < b \end{cases}.$$

D'après le premier résultat, les fonctions h et k sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Considérons alors la fonction f définie par : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = h(x)k(x).}$
Si $x \leq a$: $h(x) = 0$ donc $f(x) = 0$.
Si $x \geq b$: $k(x) = 0$ donc $f(x) = 0$, donc :

$$\boxed{\forall x \notin]a,b[,\ f(x) = 0 \text{ et } \forall x \in]a,b[\ :\ f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x-a}} \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{b-x}} > 0.}$$

La fonction f ainsi construite est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont.

[Réponse I.10] (**Limite usuelle**)

(*Relire la question : page* 24)
Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe $r \in \mathbb{R}_*^+$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$ tels que :

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r\cos(\theta) + \mathrm{i}r\sin(\theta).$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \dfrac{z}{n} = \rho_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n}$ avec $\rho_n = \sqrt{1 + \dfrac{r^2}{n^2} + 2\dfrac{r}{n}\cos(\theta)}$ et $\alpha_n \in]-\pi, \pi]$ tels que :

$$\boxed{\sin(\alpha_n) = \frac{r\sin(\theta)}{n\rho_n},\ \cos(\alpha_n) = \frac{1 + \frac{r}{n}\cos(\theta)}{\rho_n} \text{ et } \tan(\alpha_n) = \frac{r\sin(\theta)}{n + r\cos(\theta)}.}$$

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \rho_n^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha_n}$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\rho_n^n = \mathrm{e}^{\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{r^2}{n^2}+2\frac{r}{n}\cos(\theta)\right)}$.
$\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{r^2}{n^2}+2\frac{r}{n}\cos(\theta)\right) = r\cos(\theta) + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.
Par continuité de la fonction exponentielle, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_n^n = \mathrm{e}^{r\cos(\theta)}$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{r}{n}\cos(\theta)}{\rho_n} = 1$. $\boxed{\text{Donc } \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(\alpha_n) = 1.}$
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n \in]-\pi, \pi]$, on en déduit l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$ alors $\alpha_n \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Alors :

$$\alpha_n = \arctan\left(\frac{\sin(\alpha_n)}{\cos(\alpha_n)}\right) = \arctan\left(\frac{r\sin(\theta)}{n+r\cos(\theta)}\right).$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{r\sin(\theta)}{n+r\cos(\theta)} = 0$. Donc par continuité de la fonction arctan on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0.}$$

On a ainsi : $\sin(\alpha_n) \sim \alpha_n$ donc $n\sin(\alpha_n) \sim n\alpha_n$ d'où : $n\alpha_n \sim \dfrac{r\sin(\theta)}{\rho_n}$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_n = 1$ on a $n\alpha_n \sim r\sin(\theta)$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha_n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}r\sin(\theta)}$.
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{r\cos(\theta)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}r\sin(\theta)} = \mathrm{e}^{r\cos(\theta)+\mathrm{i}r\sin(\theta)}$. Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{r\cos(\theta)+\mathrm{i}r\sin(\theta)} = \mathrm{e}^z.}$$

[Réponse I.11] (**Application de la formule de Taylor reste intégral**)

(*Relire la question : page* 24, *le cours :* [P I.23 p.22])
(−) Montrons que la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, a[$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$. Soit $x \in [0, a[$.
$\forall k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} \geq 0$. Donc la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
D'après la formule de Taylor reste intégral [P I.23], on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, a[$: $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + \int_0^x (x-t)^n \dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,\mathrm{d}t = f(x)$.

Notons $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)^n \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,\mathrm{d}t$.
La positivité de $f^{(n+1)}$ implique : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, a[$, $R_n(x) \geq 0$.
Donc la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $f(x)$. Ainsi, le théorème de la limite monotone assure la convergence de cette suite. Donc la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente.
$(-)$ Soit maintenant $y \in [0, x[$. On a pour tout $t \in]0, y[$, $\dfrac{y-t}{x-t} < \dfrac{y}{x} < 1$. Donc par croissance de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq R_n(y) \leq \left(\frac{y}{x}\right)^n \int_0^y \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \leq \left(\frac{y}{x}\right)^n R_n(x).$$

De plus, la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{y}{x}\right)^n = 0$ car $\left|\dfrac{y}{x}\right| < 1$. Donc par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(y) = 0$. On en déduit, d'après la formule de Taylor, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)y^k}{k!} = f(y)$. Pour $y \in [0, a[$, on peut toujours introduire $x \in]y, a[$, on a donc prouvé :

$$\boxed{\forall y \in [0, a[, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)y^k}{k!} = f(y).}$$

[Réponse I.12] (**Calcul classique d'équivalent**)

(*Relire la question : page* 24, *le cours :* [P I.25 p.22])
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n} = \dfrac{\sqrt{n}(2n)!}{4^n(n!)^2} \sim \dfrac{\sqrt{n}\mathrm{e}^{-2n}(2n)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{4^n(\mathrm{e}^{-n}n^n\sqrt{2\pi n})^2}$ d'après la formule de Stirling.
Donc $\dfrac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n} \sim \dfrac{\sqrt{n}\mathrm{e}^{-2n}4^n n^{2n}\sqrt{4\pi n}}{4^n\mathrm{e}^{-2n}n^{2n}(\sqrt{2\pi n})^2}$. Ainsi $\dfrac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$. Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.}$$

Chapitre II
Polynômes

II.1 - Cours

La lettre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels, ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.
Si P est un polynôme, il existe alors une unique suite (notée, par exemple, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$) presque nulle telle que $P = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n X^n$. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite des coefficients du polynôme P. Le fait que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque nulle signifie que tous ses termes sont nuls à partir d'un certain rang. La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n X^n$ ne comporte donc qu'un nombre fini de termes non nuls.
Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle, alors on dit que P est le polynôme nul noté $\widetilde{0}$.
Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont la même suite de coefficients.

Pour tout élément $x \in \mathbb{K}$, on peut définir le scalaire noté $P(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k$.
On définit ainsi la fonction polynomiale de $\mathbb{K}$ vers $\mathbb{K}$, qui à un scalaire x associe le scalaire $P(x)$. On notera $\widetilde{P}$ ou simplement P cette fonction.

Une fraction rationnelle s'écrit sous la forme $\frac{P}{Q}$ où P et Q sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$, Q n'étant pas le polynôme nul. Cette écriture n'est pas unique.
Si Q_1 et Q_2 sont deux polynômes non nuls, si P_1 et P_2 sont deux polynômes, alors $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$ si et seulement si $P_1Q_2 - Q_1P_2 = \widetilde{0}$.
Si $F = \frac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle et $x \in \mathbb{K}$ vérifie $Q(x) \neq 0$, alors on peut définir le scalaire $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ qui ne dépend pas de l'écriture de F.

[Définition II.1] Opérations sur les polynômes

Soient $P = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n X^n$ et $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n X^n$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

On définit alors les polynômes : $\lambda.P = \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda p_n) X^n$,

$$P + Q = \sum_{n=0}^{+\infty} (p_n + q_n) X^n \quad \text{et} \quad PQ = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \right) X^n.$$

(On écrit souvent λP au lieu de $\lambda.P$).

✍ *Rappel : si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, on a :*
(−) $PQ = QP$.
(−) Si $PQ = \widetilde{0}$, alors $P = \widetilde{0}$ ou $Q = \widetilde{0}$.

[Propriété II.2] Espace vectoriel des polynômes

Muni des opérations + et . définies ci-dessus, l'ensemble $(\mathbb{K}[X], +, .)$ est un espace vectoriel. De plus, on a pour tous polynômes P et Q appartenant à $\mathbb{K}[X]$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda.(PQ) = (\lambda.P)Q = P(\lambda.Q).$$

[Définition II.3] Puissance et composition de deux polynômes

Soient $P = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n X^n$ et $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n X^n$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

On note pour $j \in \mathbb{N}^*$, $P^j = \underbrace{P \times \cdots \times P}_{j \text{ fois}}$. On pose $P^0 = X^0 = 1$.

On définit : $P \circ Q = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n Q^n$.

[Définition II.4] Polynôme dérivé

Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On appelle **polynôme dérivé** de P le polynôme

$$P' = \sum_{k=1}^{+\infty} k p_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) p_{k+1} X^k.$$

On définit par récurrence la suite des polynômes dérivés en posant :

$$P^{(0)} = P \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ P^{(n+1)} = \left(P^{(n)}\right)'.$$

[Propriété II.5] Lien avec la dérivée de la fonction P

Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. La fonction polynomiale $x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k$ associée au polynôme P est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est la fonction polynomiale associée au polynôme dérivé P'.

[Propriété II.6] Opérations sur les polynômes dérivés

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$(P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q', \qquad (PQ)' = P'Q + PQ'.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, (PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

[Propriété II.7] Formule de Taylor polynomiale

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \forall a \in \mathbb{K},\ P = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!}.$$

♥ *Voir l'exercice :* [Q II.12 p. 48]

[Définition II.8] Degré, coefficient dominant

Soit $P = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul. On appelle **degré** de P, et l'on note $\deg(P)$, l'indice du dernier terme non nul de la suite de ses coefficients, c'est-à-dire :

$$\deg(P) = \max\left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; p_n \neq 0 \right\}.$$

Si P est un polynôme de degré n, alors on dit que p_n est son **coefficient dominant**.
Si le coefficient dominant est égal à 1, alors on dit que P est **unitaire**.
Le degré du polynôme nul est $-\infty$.

[Propriété II.9] Opérations sur les degrés
Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.
$(-)$ $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.
$(-)$ Si $\deg(P) < \deg(Q)$, alors $\deg(P+Q) = \deg(Q)$.
$(-)$ Si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\deg(\lambda P) = \deg(P)$.
$(-)$ $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
$(-)$ Si $\deg(Q) \geq 1$, $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.
$(-)$ Si $\deg(P) \geq 1$, $\deg(P') = \deg(P) - 1$. Si $\deg(P) \leq 0$, $P' = \widetilde{0}$.

Ces opérations sur les degrés s'effectuent dans $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ de façon à prendre en compte le cas du polynôme nul.

[Propriété II.10] Sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur à n
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
$(-)$ L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}[X], +, .)$.
$(-)$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivation $P \mapsto P'$ est une application linéaire surjective de $\mathbb{K}_n[X]$ vers $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

[Propriété II.11] Familles libres de polynômes
$(-)$ Toute famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est une famille libre.
$(-)$ Toute famille $(P_0, \ldots, P_n)$ de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_i) = i$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

[Définition II.12] Relation de divisibilité
Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.
On dit que le polynôme P **divise** le polynôme Q (ou que le polynôme Q est divisible par le polynôme P), s'il existe un polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$, tel que

$$Q = PA.$$

[Propriété II.13] Divisibilité et degré
Si P et Q sont deux polynômes non nuls tels que P divise Q, alors leurs degrés vérifient $\deg(P) \leq \deg(Q)$.

[Propriété II.14] Théorème de division euclidienne
Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, B n'étant pas le polynôme nul. Dans ce cas, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que :

$$A = BQ + R \quad \text{et } \deg(R) < \deg(B).$$

♥ *On peut, lorsque l'on doit déterminer le couple formé du quotient et du reste dans la division euclidienne par le polynôme B, utiliser l'algorithme de division euclidienne calqué sur celui de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$. Lorsque l'on ne cherche que le reste R, il peut-être utile de chercher les coefficients de R à partir des relations obtenues en évaluant le polynôme $BQ + R$ en chacune des racines de B.* [Q II.9 p. 47]

[Définition II.15] Racine
Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.
On dit que x est une **racine** de P si $P(x) = 0$.

[Propriété II.16] Divisibilité par $X - a$
Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Soit $a \in \mathbb{K}$.
Le polynôme P est divisible par $X - a$ si et seulement si $P(a) = 0$.

[Propriété II.17] Ordre de multiplicité d'une racine
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Soit $a \in \mathbb{K}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) Le polynôme $(X - a)^k$ divise P et $(X - a)^{k+1}$ ne divise pas P.
ii) Pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $P^{(j)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$.

Il existe alors un unique entier k qui vérifie ces deux propriétés, on l'appelle **ordre de multiplicité** de la racine a de P. On peut le noter $\text{ord}_a(P)$.
Lorsque $\text{ord}_a(P) = 1$, on dit que a est une **racine simple** du polynôme P.
Si a est une racine de P, alors $\text{ord}_a(P') = \text{ord}_a(P) - 1$.

♥ *Voir les exercices :* [Q II.2 p. 46], [Q II.9 p. 47]
♥ *Les racines complexes conjuguées d'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ ont le même ordre de multiplicité.*

[Propriété II.18] Liens entre divisibilité, degré et racines
(−) Un polynôme de degré n admet au maximum n racines deux à deux distinctes.
(−) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, si $\deg(P) \leq n$ et si P admet au moins $n+1$ racines, alors P est le polynôme nul.
(−) Soit $n \in \mathbb{N}$. Deux polynômes de degré inférieur ou égal à n dont les fonctions polynomiales coïncident en strictement plus de n points sont égaux.
(−) Si les scalaires $r_1, \ldots, r_k$ sont des racines deux à deux distinctes du polynôme P, d'ordres de multiplicité respectifs $m_1, \ldots, m_k$, alors le polynôme P est divisible par $\prod_{i=1}^{k} (X - r_i)^{m_i}$.

Si le polynôme P est non nul, on a donc $\sum_{i=1}^{k} m_i \leq \deg(P)$.

♥ *Si l'on trouve n racines d'un polynôme de degré n, alors on sait que l'on a trouvé toutes les racines de ce polynôme.* [Q II.4 p. 46]
♥ *Un des moyens les plus utilisés pour prouver qu'un polynôme P est nul est de prouver qu'il admet strictement plus de* $\deg(P)$ *racines.* [Q II.7 p. 47]
♥ *Pour prouver que deux polynômes sont égaux, on prouve que leurs fonctions polynomiales coïncident en strictement plus de points que le maximum des degrés des polynômes.* [Q II.3 p. 46]

[Définition II.19] Polynôme scindé
On dit qu'un polynôme est **scindé** lorsqu'il est constant ou qu'il s'écrit comme un produit de polynômes de degré 1.

[Propriété II.20] Caractérisation des polynômes scindés
Un polynôme non nul P est scindé si et seulement si la somme des ordres de multiplicité de ses racines deux à deux distinctes est égale à son degré.
Si $r_1, \ldots, r_k$ sont les racines deux à deux distinctes du polynôme P, d'ordres de multiplicité respectifs $m_1, \ldots, m_k$, alors : $\sum_{i=1}^{k} m_i = \deg(P)$.

♥ *La somme des ordres de multiplicités des racines distinctes d'un polynôme non nul ne peut excéder le degré de ce polynôme. Donc, si l'on trouve p racines deux à deux distinctes dont la somme des ordres de multiplicité est égale au degré du polynôme P, alors on sait que P est scindé et qu'il n'admet pas d'autres racines.* [Q II.1 p. 46], [Q II.2 p. 46]

[Propriété II.21] Relations coefficients-racines pour un polynôme unitaire
Soit P un polynôme scindé unitaire non constant de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe alors des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (qui sont les racines de P répétées suivant leur ordre de multiplicité) tels que $P = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$. Si l'on note $p_0, \dots, p_n$ la liste des $(n+1)$ premiers coefficients de P avec $p_n = 1$, de sorte que $P = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k$, alors on a : $p_0 = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$ et $p_{n-1} = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_i$.

♥ *Ces relations découlent directement de l'identification du développement de* $\prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$ *avec l'écriture* $P = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k$.

De manière générale : $p_{n-k} = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \left(\prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j} \right)$.

En particulier $p_{n-2} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j$. [Q II.11 p. 48]

♥ *Dans le cas où* $n = 2$, *si* a, b, c, x_1 *et* x_2 *sont des scalaires tels que* $a \neq 0$ *et* $aX^2 + bX + c = a(X - x_1)(X - x_2)$, *alors on retrouve les relations :* $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$ *et* $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$.

[Définition II.22] Polynôme irréductible
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que le polynôme P est **irréductible** s'il est de degré supérieur ou égal à 1, et ne peut pas s'écrire comme le produit de deux polynômes non constants.

[Propriété II.23] Décomposition en irréductibles
(−) Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes du second degré de discriminant strictement négatif.
(−) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
(−) Tout polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ admet une décomposition en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$.

♥ *Voir l'exercice :* [Q II.11 p. 48]

[Propriété II.24] Décomposition de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines de ce polynôme étant les n racines de l'unité, on a :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \exp\left(\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n} \right) \right).$$

♥ *Voir l'exercice :* [Q II.11 p. 48]

[Propriété II.25] Polynômes premiers entre eux
Soient P, Q et A trois polynômes de $\mathbb{K}[X]$.
Les conditions suivantes sont équivalentes.

i) Les polynômes P et Q n'ont aucune racine complexe commune.
ii) Si A divise P et Q, alors A est un polynôme constant non nul.
iii) Il n'existe aucun polynôme irréductible de degré 1 ou 2 qui divise P et Q.

On dit alors que les polynômes P et Q sont **premiers entre eux**.

♥ *Voir l'exercice :* [Q II.11 p. 48]

[Propriété II.26] Interpolation de Lagrange
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ une famille de scalaires deux à deux distincts. On appelle **polynômes d'interpolation de Lagrange** les polynômes $L_1, \ldots, L_n$ définis par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ L_i = \prod_{k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} \frac{(X - x_k)}{(x_i - x_k)}.$$

$(-)$ Pour tout $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ vérifiant pour tout $i \in [\![1, n]\!], P(x_i) = y_i$, c'est le polynôme $P = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i$.
$(-)$ L'application $E : \mathbb{K}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{K}^n,\ P \longmapsto (P(x_1), \ldots, P(x_n))$ est un isomorphisme de $(\mathbb{K}_{n-1}[X], +, .)$ vers $\mathbb{K}^n$. Sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{K}^n$ est la matrice inversible $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$.
On l'appelle **matrice de Vandermonde**.

Son déterminant vaut : $\prod_{1\leq i<k\leq n}(x_k - x_i)$.

(−) Il y a une infinité de polynômes P vérifiant, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$, ce sont les polynômes de la forme $K\prod_{i=1}^{n}(X - x_i) + \sum_{i=1}^{n} y_i L_i$, avec $K \in \mathbb{K}$.

♥ *Avec les mêmes notations, la matrice de Vandermonde est de déterminant nul si les scalaires $x_1, \ldots, x_n$ ne sont pas deux à deux distincts.* [Q II.6 p. 47], [Q II.8 p. 47], [Q II.10 p. 47]

[Propriété II.27] Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux.

(−) S'il existe des scalaires λ_1, ..., λ_n deux à deux distincts tels que Q s'écrive $\prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$, alors la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ admet une **décomposition en éléments simples** de la forme $\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{X - \lambda_i}$ où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i = \frac{P(\lambda_i)}{\prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}}(\lambda_i - \lambda_j)} = \frac{P(\lambda_i)}{Q'(\lambda_i)}$.

(−) Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, si Q s'écrit $\prod_{i=1}^{n} Q_i$ où les Q_i sont des polynômes irréductibles deux à deux premiers entre eux, alors la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ admet une décomposition en éléments simples de la forme $\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{Q_i}$ où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, P_i est un polynôme de degré 1 si Q_i est un trinôme irréductible du second degré et P_i est une constante si Q_i est un polynôme de degré 1, c'est-à-dire : $\deg(P_i) = \deg(Q_i) - 1$.

♥ *Dans la situation de la première proposition de cette propriété, il existe une méthode simple pour calculer le scalaire a_i : il suffit de multiplier chaque membre de l'égalité $\frac{P}{Q} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{X - \lambda_k}$ par $(X - \lambda_i)$. Après simplification, on obtient une fraction rationnelle que l'on peut évaluer en λ_i, ce qui donne directement la valeur de a_i.* [Q II.5 p. 47]

✍ *Complément : si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, si le polynôme Q s'écrit $Q = \prod_{i=1}^{r} Q_i^{k_i}$ où $k_1, \ldots, k_r$ sont des entiers et $Q_1, \ldots, Q_r$ sont des polynômes irréductibles deux à deux premiers entre eux, alors la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ admet une décomposition en éléments simples de la forme $\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{k_i} \frac{U_{i,j}}{Q_i^j} \right)$ où pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, pour tout $j \in [\![1, k_i]\!]$, la notation $U_{i,j}$ désigne un polynôme de degré strictement inférieur à* $\deg(Q_i)$.

II.2 - Questions

[Question II.1] Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé, de degré n et à racines simples. Montrer que son polynôme dérivé est encore scindé et à racines simples. (*Éclairage page* 48, *Réponse page* 49)

[Question II.2] Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé de degré n, montrer que son polynôme dérivé est encore scindé.
(*Éclairage page* 48, *Réponse page* 50)

[Question II.3] Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme à coefficients réels T_n de degré n tel que, pour tout réel θ :

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(1 - X^2)T_n'' - XT_n' + n^2 T_n = \widetilde{0}$.
(*Éclairage page* 48, *Réponse page* 50)

[Question II.4] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelles sont les racines du polynôme T_n défini à la question précédente ? (*Éclairage page* 48, *Réponse page* 52)

[Question II.5] On rappelle l'existence d'une constante réelle γ telle que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.
Que vaut $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(2k+1)}$? (*Éclairage page* 48, *Réponse page* 52)

[Question II.6] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A et B deux matrices diagonales de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = B$?
(*Éclairage page* 49, *Réponse page* 53)

[Question II.7] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Soient $m_1, \dots, m_n$ des entiers naturels. Soit P un polynôme unitaire à coefficients réels.
Montrer que $P = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)^{m_i}$ si et seulement si $\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{X - x_i}$.
(*Éclairage page* 49, *Réponse page* 54)

[Question II.8] Soient $n \in [\![2, +\infty[\![$ et $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite de n réels 2 à 2 distincts. On note $(L_j)_{1\leq j\leq n}$ les polynômes de Lagrange associés :

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ L_j(X) = \prod_{k\in[\![1,n]\!]\setminus\{j\}} \frac{X - x_k}{x_j - x_k}.$$

Déterminer, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$: $\sum_{j=1}^{n} x_j^k L_j$.
(*Éclairage page* 49, *Réponse page* 55)

[Question II.9] Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $B = (X-2)^2(X-3)$. (*Éclairage page* 49, *Réponse page* 55)

[Question II.10] Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(k) = \frac{n+1-k}{k+1}$. Calculer $P(n+1)$. (*Éclairage page* 49, *Réponse page* 56)

[Question II.11] Quels sont les couples de complexes (p, q) pour lesquels les racines du polynôme $X^3 + pX + q$ sont toutes de même module ?

(*Éclairage page* 49, *Réponse page* 57)

[Question II.12] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n admettant n racines deux à distinctes que l'on note $x_1, \ldots, x_n$.
Montrer que pour tout i fixé dans $[\![1, n]\!]$: $\displaystyle 2 \sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} \frac{1}{x_j - x_i} = \frac{P''(x_i)}{P'(x_i)}$.

(*Éclairage page* 49, *Réponse page* 58)

II.3 - Éclairages

[Éclairage II.1] On peut utiliser la fonction polynomiale associée à P et utiliser le théorème de Rolle pour découvrir entre deux racines consécutives de P une racine de P'. (*Réponse page* 49)

[Éclairage II.2] On peut reprendre les racines de P' trouvées dans l'exercice précédent et remarquer que P' admet aussi pour racines les racines multiples de P. (*Réponse page* 50)

[Éclairage II.3] L'unicité de T_n peut être prouvée à l'aide de la propriété [P II.18]. On peut prouver son existence en remarquant que
$\cos(n\theta) = \mathcal{R}\mathrm{e}\left((\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n\right)$ et en utilisant ensuite la formule du binôme de Newton. (*Réponse page* 50)

[Éclairage II.4] On peut commencer par chercher les racines de T_n qui s'écrivent sous forme $\cos(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. (*Réponse page* 52)

[Éclairage II.5] On peut effectuer une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(X+1)(2X+1)}$ qui permettra d'exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(2k+1)}$ en fonction de sommes de la forme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.