# TSI
## 2e année

**Olivier Leuck**
Walter Damin
Michel Goumi
Ivan Gozard
Bertrand Hauchecorne

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

# MATHS

2e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés

ellipses

PRÉPAS SCIENCES

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

# Mathématiques TSI-2

## 2e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES


ouvrage coordonné par

Olivier LEUCK

*Professeur au lycée R. Follereau (Belfort)*

Walter DAMIN

*Professeur au lycée Pierre-Paul Riquet (Saint-Orens-de-Gameville)*

Michel GOUMI

*Professeur au lycée E. Perrier (Tulle)*

Ivan GOZARD

*Professeur au lycée Carnot (Dijon)*

Bertrand HAUCHECORNE

*Ancien professeur au lycée Pothier (Orléans)*



ellipses

COLLECTION
**PRÉPAS SCIENCES**

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

*Les notices culturelles « Un mathématicien » et « Un peu d'histoire » des pages de titre des chapitres ont été rédigées par Bertrand Hauchecorne.*

*Les macros de cet ouvrage ont été réalisées par Nicolas Nguyen en LaTeX.*

ISBN 9782340-066816
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

# Avant-propos

**Réussir en classes préparatoires** nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en physique-chimie comme en mathématiques ou sciences industrielles.

**Le résumé de cours** est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

**La partie « méthodes »** vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

**La partie « vrai/faux »** permet de tester votre recul par rapport au programme et de vous révéler les mauvais réflexes à rectifier. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

**Les exercices** sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi l'ouvrage de maths, comme ceux de physique, de chimie et de SII vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers **la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

# Sommaire


1. Compléments d'algèbre linéaire ..... 1
2. Déterminants ..... 49
3. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées ..... 77
4. Fonctions vectorielles d'une variable réelle ..... 127
5. Intégrales généralisées ..... 159
6. Séries numériques ..... 191
7. Équations différentielles linéaires ..... 225
8. Courbes planes ..... 275
9. Espaces préhilbertiens ..... 307
10. Espaces probabilisés ..... 339
11. Séries entières ..... 371
12. Isométries d'un espace euclidien ..... 411
13. Séries de Fourier ..... 447
14. Fonctions de deux ou trois variables réelles ..... 475
15. Variables aléatoires discrètes ..... 523

Index ..... 561

Chapitre 1

# Compléments d'algèbre linéaire

UN MATHÉMATICIEN



Très jeune, **Giuseppe Peano** (1858-1932) a compris l'importance de la nouvelle approche des mathématiques que permettait la théorie des ensembles à peine naissante. Déchiffrant l'ouvrage plutôt obscur d'Hermann Grassmann, dans lequel sont introduits les espaces vectoriels, il bâtit une axiomatique claire encore utilisée de nos jours. Il introduit les applications linéaires et montre que cette théorie ne se limite pas à la dimension finie en donnant l'exemple des polynômes.

### Un peu d'histoire

À tout nombre réel $a$, on peut faire correspondre une application toute simple, celle qui à un réel $x$ fait correspondre $ax$ soit la multiplication d'un nombre par un scalaire. Tout segment est alors transformé en un segment dont la longueur est multipliée par $a$. La variable $x$ est au premier degré, elle n'est pas affectée d'une puissance.

Les applications linéaires en sont la généralisation aux dimensions supérieures ; l'expression des images est une expression de degré un des coordonnées et elles conservent l'origine.

Le maniement de ce type d'applications s'est particulièrement développé au XVIII$^{e}$ siècle en particulier pour résoudre des systèmes linéaires, avec Gabriel Cramer, Étienne Bézout, Alexandre Vandermonde mais leur introduction formelle est l'œuvre de Peano.

# Objectifs

## les incontournables

- Justifier qu'une application est linéaire.
- Montrer qu'une famille est libre, génératrice dans un espace vectoriel de dimension quelconque.
- Déterminer la matrice d'un endomorphisme dans une base.
- Justifier qu'un sous-espace vectoriel est stable par un endomorphisme.
- Exploiter les propriétés de la trace.

## et plus si affinités

- Reconnaître un hyperplan.
- Exploiter les propriétés d'un endomorphisme induit.
- Déterminer la trace d'un endomorphisme.
- Justifier que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires à l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse.

# Résumé de cours

On désigne par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## Familles génératrices, familles libres, bases

### Combinaisons linéaires

**Définition :** *Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de vecteurs de $E$. On appelle* ***combinaison linéaire*** *de la famille $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ toute somme du type $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{i_k}$, dans laquelle $n$ est un entier non nul, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une famille de scalaires et $(i_1, \dots, i_n)$ une famille d'entiers.*

**Commentaire** ▷ L'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un sous-espace vectoriel de $E$, noté $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. On l'appelle le ***sous-espace vectoriel engendré par la famille*** $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

### Familles libres, familles génératrices

**Définition :** *Une famille $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $E$ est* ***libre*** *si la seule combinaison linéaire nulle de cette famille est la combinaison linéaire dont tous les coefficients sont nuls.*

**Commentaires** ▷ La famille $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est libre si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \forall (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{i_k} = 0 \implies \forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k = 0.$$

▷ La famille $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est dite ***liée*** lorsqu'elle n'est pas libre.

**Proposition 1.1 —** Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de $E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille libre ;
(ii) pour tout entier $n$, la famille $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ est libre.

**Exemple :** Toute famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ échelonnée en degré est libre.

**Définition :** *La famille $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $E$ est une famille* ***génératrice*** *de $E$ si tout vecteur de $E$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $x_i$.*

**Commentaire** ▷ Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $E$ ;

(ii) $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in\mathbb{N}} = E$.

### Base

**Définition :** *Une famille libre et génératrice de $E$ est appelée une* ***base*** *de $E$.*

**Proposition 1.2** — Soit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de vecteurs de $E$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base de $E$ ;

(ii) tout vecteur de $E$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $e_i$.

**Exemples :** $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ appelée ***base canonique*** de $\mathbb{K}[X]$.
▷ La famille $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, où $e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ (le 1 se trouvant en $i^{\text{ième}}$ position) forme une base de $\mathbb{K}^n$ appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.
▷ Toute famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de polynômes vérifiant, pour tout $k$, $\deg(P_k) = k$, est une base de $\mathbb{K}[X]$.

## ■ Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

**Définition :** *Soit $m$ un entier non nul et $F_1,\dots,F_m$ des sous-espaces vectoriels de $E$. On appelle **somme** des sous-espaces vectoriels $F_i$, l'ensemble des vecteurs s'écrivant $f_1+f_2+\cdots+f_m$ où pour tout $i\in[\![1,m]\!]$, $f_i$ est un vecteur de $F_i$. On le note $F_1+F_2+\cdots+F_m$ :*

$$F_1+\cdots+F_m = \big\{f_1+\cdots+f_m \;\mid\; (f_1,\cdots,f_m)\in F_1\times\cdots\times F_m\big\}.$$

**Commentaire** ▷ La somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels de $E$ est un sous-espace vectoriel de $E$ ; en effet on peut montrer qu'un tel ensemble est non vide et stable par combinaison linéaire.

**Définition :** *Soit $m$ un entier non nul et $F_1,\dots,F_m$ des sous-espaces vectoriels de $E$. On dit que la somme $F_1+\cdots+F_m$ est **directe** si pour tout vecteur $x\in F_1+\cdots+F_m$, il existe un unique $m$-uplet $(f_1,\dots,f_m)\in F_1\times\cdots\times F_m$ tel que : $x=f_1+\cdots+f_m$. On note alors :*

$$F_1+\cdots+F_n = F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_m.$$

**Proposition 1.3** — Soit $m$ un entier non nul et $F_1,\dots,F_m$ des sous-espaces vectoriels de $E$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) la somme $F_1+\cdots+F_n$ est directe ;

(ii) les hypothèses $f_1\in F_1$, $f_2\in F_2,\dots,f_m\in F_m$ et $f_1+f_2+\cdots+f_m=0$ impliquent

$$f_1=f_2=\cdots=f_m=0.$$

**Commentaire** ▷ Puisque $F_1+\cdots+F_m$ est un sous-espace vectoriel de $E$, il contient le vecteur nul ; celui-ci peut donc s'écrire sous la forme $0=f_1+\cdots+f_m$ où pour tout $i\in[\![1,m]\!]$, $f_i\in F_i$. Chaque $F_i$ étant un sous-espace vectoriel de $E$, il contient également le vecteur nul ; ce qui donne une nouvelle décomposition du vecteur nul : $0=0+\cdots 0$. Sans autre hypothèse sur la somme $F_1+\cdots+F_m$, il se peut que le vecteur nul possède plusieurs décompositions. La proposition 1.3 affirme que la somme $F_1+\cdots+F_n$ est directe si et seulement le vecteur nul admet une unique décomposition donnée par $0=0+\cdots+0$.

## ■ Décomposition en somme directe

**Définition :** *Soit $m$ un entier non nul et $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de $E$. On dit que $E$ est **somme directe** de $F_1, \dots, F_m$ lorsque :*

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_m.$$

**Commentaires** ▷ Lorsque $E$ est somme directe de $F_1, \dots, F_m$, la somme de $F_1, \dots, F_m$ est directe et égale à $E$.
▷ Dans le cas où $m = 2$, dire que $E$ est somme directe de $F_1$ et $F_2$ est équivalent à dire que $F_1$ et $F_2$ sont ***supplémentaires*** dans $E$.

Des résultats précédents, on déduit les caractérisations suivantes.

**Proposition 1.4 —** Soit $m$ un entier non nul et $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de $E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $E$ est somme directe de $F_1, \dots, F_m$ ;

(ii) pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique $m$-uplet $(f_1, \dots, f_m) \in F_1 \times \cdots \times F_m$ tel que : $x = f_1 + \cdots + f_m$ ;

(iii) $E = F_1 + F_2 + \cdots + F_m$ et les hypothèses $f_1 \in F_1$, $f_2 \in F_2, \dots, f_m \in F_m$, $f_1 + f_2 + \ldots + f_m = 0$ impliquent $f_1 = f_2 = \ldots = f_m = 0$.

## ■ Base adaptée à une décomposition en somme directe

On suppose que $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

**Proposition 1.5 —** Soit $m$ un entier non nul et $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de $E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $E$ est somme directe de $F_1, \dots, F_m$ ;

(ii) la concaténation d'une base de $F_1$, d'une base de $F_2$, ... , d'une base de $F_m$ est une base de $E$.

Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\dim(E) = \dim\left(F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_m\right) = \sum_{i=1}^{m} \dim(F_i)}.$$

**Remarque :** Par exemple, la concaténation de la famille $(e_1, \dots, e_r)$ et de la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est la famille $(e_1 \dots, e_r, f_1, \dots, f_p)$.

**Définition :** *On appelle **base adaptée à la décomposition en somme directe** $E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$ toute base obtenue comme concaténation de bases de chaque sous-espace vectoriel $F_i$.*

## ■ Caractérisation des supplémentaires en dimension finie

**Théorème 1.6 —** Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$ ;

(ii) $E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ ;

(iii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ ;

(iv) la concaténation d'une base $F$ et d'une base de $G$ est une base de $E$.

## ■ Projecteurs et symétries

### ◆ Projecteur

**Définition :** *Un endomorphisme $p$ de $E$ est un* ***projecteur*** *s'il vérifie $p^2 = p$.*

**Commentaire** ▷ Pour un projecteur $p$ de $E$, on a : $\mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{id}_E)$.

**Théorème 1.7 —** Soit $p$ un projecteur de $E$. Les sous-espaces vectoriels $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires dans $E$ :

$$E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p).$$

### ◆ Projecteur associé à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires

**Théorème-Définition 1.8 —** Étant donné deux sous-espaces vectoriels supplémentaires $F_1$ et $F_2$ de $E$, l'application qui à tout $x = x_1 + x_2$ de $E$ (où $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$) fait correspondre $x_1$ est un projecteur d'image $F_1$, de noyau $F_2$.
Cette application linéaire s'appelle la ***projection sur $F_1$ parallèlement à $F_2$.***

### ◆ Symétrie

**Définition :** *Un endomorphisme $s$ de $E$ est une* ***symétrie*** *s'il vérifie $s^2 = \mathrm{id}_E$.*

**Commentaire** ▷ Toute symétrie de $E$ est un endomorphisme bijectif, égal à son inverse.

**Théorème 1.9 —** Soit $s$ un projecteur de $E$. Les sous-espaces vectoriels $\ker(s - \mathrm{id}_E)$ et $\ker(s + \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans $E$ :

$$E = \ker(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Im}(s + \mathrm{id}_E).$$

◆ **Symétrie associée à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires**

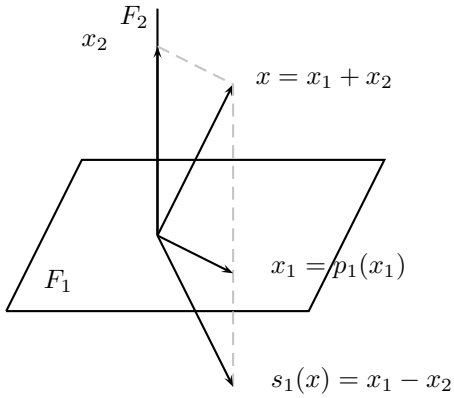
**Théorème-Définition 1.10 —** Soit $F_1$ et $F_2$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$. L'application $s$ qui à tout $x = x_1 + x_2$ de $E$ (où $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$) fait correspondre $x_1 - x_2$ est une symétrie vérifiant :

$$\ker(s - \mathrm{id}_E) = F_1 \qquad \text{et} \qquad \ker(s + \mathrm{id}_E) = F_2.$$

Cette application linéaire s'appelle la ***symétrie par rapport à*** $F_1$ ***parallèlement à*** $F_2$.

**Commentaire** ▷ Soit $F_1$ et $F_2$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$, $p_1$ le projecteur sur $F_1$ parallèlement à $F_2$ et $s_1$ la symétrie par rapport à $F_1$ parallèlement à $F_2$. On a :

$$\boxed{s_1 = 2p_1 - \mathrm{id}_E}$$




## ■ Sous-espace stable

**Définition :** *Soit $g$ un endomorphisme de $E$, et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. On dit que $F$ est* ***stable*** *par $g$ si pour tout vecteur $x$ de $F$, le vecteur $g(x)$ appartient à $F$.*

**Commentaire** ▷ Le sous-espace vectoriel $F$ est stable par $g$ si et seulement si $g(F) \subset F$.

**Proposition 1.11 —** Soit $g$ un endomorphisme de $E$, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $F$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $F$ est stable par $g$ ;

(ii) pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\quad g(e_i) \in F$.

**Théorème 1.12** (caractérisation matricielle) **—** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$, $F$ un sous-espace vectoriel de dimension $p$ et $g$ un endomorphisme de $E$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $F$ est stable par $g$ ;

(ii) pour tout supplémentaire $G$ de $F$ dans $E$, la matrice de $g$ dans toute base $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$ est de la forme :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

**Commentaire** ▷ Une telle base $\mathscr{B}$ s'obtient par concaténation d'une base $\mathscr{C}$ de $F$ et d'une base de $G$.

## ■ Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme

**Définition :** *On appelle* ***trace*** *d'une matrice $A$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la somme des coefficients diagonaux de cette matrice. Elle est notée* $\mathrm{Tr}(A)$.

**Proposition 1.13 —** L'application trace définie par

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Tr}: & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & A & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A) \end{array}$$

est linéaire.

**Proposition 1.14 —** Soit $n$ et $p$ deux entiers non nuls et soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On a :

$$\boxed{\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)}$$

**Corollaire 1.15 —** Deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ont même trace.

**Définition :** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $g$ un endomorphisme de $E$. On appelle* ***trace*** *de $g$ la trace d'une matrice représentant $g$ dans une base de $E$. On la note* $\mathrm{Tr}(g)$.

**Commentaire** ▷ Deux matrices semblables ayant même trace, la définition précédente est bien cohérente. En effet, le choix d'une base de $E$ n'intervient pas dans la valeur de la trace de l'endomorphisme $g$.

## ■ Matrice symétrique, antisymétrique

### ◆ Transposée d'une matrice

**Définition :** *Soit $p$ et $n$ deux entiers naturels non nuls et soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice. On appelle* ***transposée*** *de la matrice $A$, la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée $A^\mathsf{T}$, définie par :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \qquad \left(A^\mathsf{T}\right)_{ij} = a_{ji}.$$

**Exemple :** Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, alors $A^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

**Commentaire** ▷ L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^\mathsf{T} \end{array}$$

est appelée ***transposition***. On détaille ses propriétés dans la proposition suivante.

**Proposition 1.16 —** Soit $p$ et $n$ deux entiers naturels non nuls.

(i) Pour toutes matrices $A$ et $B$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ :

$$\boxed{(A+\lambda B)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} + \lambda B^{\mathsf{T}}}$$

(ii) Pour toute matrice $A$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et toute matrice $B$ de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on a :

$$\boxed{(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}}}$$

(iii) Pour toute matrice de $A$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$A \text{ inversible} \iff A^{\mathsf{T}} \text{ inversible.}$$

Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\left(A^{\mathsf{T}}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\mathsf{T}}}$$

### ◆ Matrice symétrique, matrice antisymétrique

Soit $n \geqslant 1$ un entier.

**Définition :** *Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **symétrique** si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si elle vérifie : $A = A^{\mathsf{T}}$.*

**Notation :** *On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

**Proposition 1.17 —** $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

**Définition :** *Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **antisymétrique** si elle est égale à l'opposé de sa transposée, c'est-à-dire si elle vérifie : $A = -A^{\mathsf{T}}$.*

**Notation :** *On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

**Proposition 1.18 —** $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

**Théorème 1.19 —** Les sous-espaces vectoriels $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ :

$$\boxed{\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{S}_n(\mathbb{R})}$$

**Commentaire** ▷ Toute matrice $A$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique :

$$A = \frac{A + A^{\mathsf{T}}}{2} + \frac{A - A^{\mathsf{T}}}{2}.$$

La matrice $\dfrac{A + A^{\mathsf{T}}}{2}$ est symétrique, la matrice $\dfrac{A - A^{\mathsf{T}}}{2}$ est antisymétrique.

## ■ Polynôme de matrice

Soit $p$ et $n$ deux entiers naturels non nuls.

**Notation :** *Étant donné* $R = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ *un polynôme de* $\mathbb{K}[X]$ *et* $A$ *une matrice de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*, on note* $R(A)$ *la matrice de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *définie par :*

$$R(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k = a_p A^p + \cdots + a_0 I_n.$$

**Définition :** *Soit* $R \in \mathbb{K}[X]$ *et* $A$ *une matrice de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*. On dit que* $R$ *est un polynôme annulateur de* $A$ *lorsque* $R(A) = 0$*.*

**Exemple :** Si $A$ est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{K}^n$, alors $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de $A$.

**Proposition 1.20 —** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $R \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de $A$. Si 0 n'est pas racine de $R$, alors la matrice $A$ est inversible.

**Commentaires** ▷ Une matrice inversible peut admettre un polynôme annulateur ayant 0 pour racine. Par exemple, si $A$ est la matrice d'une symétrie de $\mathbb{K}^n$, alors $X(X^2-1)$ est un polynôme annulateur de $A$ admettant 0 pour racine. Pourtant $A$ est une matrice inversible, car elle vérifie $A^2 = I_n$. Elle admet donc $X^2-1$ pour polynôme annulateur, et celui-ci n'admet pas 0 pour racine.
▷ Supposons que $R = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ soit un polynôme annulateur de $A$ tel que $a_0 \neq 0$.
On a alors $R(0) = a_0 \neq 0$ : la matrice $A$ est inversible et

$$A^{-1} = \frac{-1}{a_0} \sum_{k=1}^{p} a_k A^{k-1}.$$

# Méthodes

## ■ Comment établir qu'un ensemble $F$ est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel $E$

❑ **Méthode 1.1** — ▸ On vérifie que $F$ est contenu dans $E$ ; puis qu'il est non vide et stable par combinaison linéaire.

▸ *Autre possibilité lorsque $F$ est décrit en extension* : on détermine des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ de $E$ tels que $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

**Mise en œuvre : exercice 1.7**, **exercice 1.9** et **exercice 1.10**.

**Exemple 1.1 –** *Justifier que* $F = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}, (\alpha, a, b, c, d) \in \mathbb{R}^5 \right\}$ *est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

On constate que $F \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et :

$$F = \text{Vect}(E_{11}, E_{22}, E_{23}, E_{32}, E_{33}).$$

On en déduit que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ; c'est en particulier un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

## ■ Comment montrer qu'une famille $\mathscr{B}$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$

❑ **Méthode 1.2** — ▸ On utilise la définition : on montre que $\mathscr{B}$ est libre et génératrice dans $E$.

▸ Si $\dim(E) = n$ et si $\mathscr{B}$ est de cardinal $n$, il suffit de montrer que $\mathscr{B}$ est libre (respectivement génératrice).

▸ On peut montrer que $\mathscr{B}$ est une base adaptée à une décomposition en somme directe de $E$.

▸ On peut aussi montrer que $\mathscr{B}$ est l'image d'une base d'un espace vectoriel $F$ par un isomorphisme de $F$ dans $E$.

**Mise en œuvre : exercice 1.3**, **exercice 1.5**, et **exercice 1.10**.

**Exemple 1.2 –** *Soit $E$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices diagonales.*

***1.*** *Déterminer la dimension de $E$.*

***2.*** *Soit $A = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$. Montrer que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ est une base de $E$.*

**1.** On a $E = \left\{ \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \mid (a_1, \dots a_n) \in \mathbb{R}^n \right\} = \text{Vect}(E_{11}, \dots, E_{nn})$.
La famille $(E_{ii})_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille génératrice de $E$, elle est libre car c'est une sous-famille de la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi cette famille est une base de $E$, elle est de cardinal $n$ donc $\dim(E) = n$.

**2.** Soit $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$A^i = \mathrm{diag}(1, 2^i, \ldots, n^i) \in E.$$

Puisque la famille $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$ est de cardinal $n$, il suffit de justifier qu'elle est libre pour établir qu'elle forme une base de $E$. Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ des réels tels que :

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \cdots + \lambda_{n-1} A^{n-1} = 0. \qquad (*)$$

On en déduit alors que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ :

$$\lambda_0 + \lambda_1 k + \cdots + \lambda_{n-1} k^{n-1} = 0.$$

On pose $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{n-1} X^{n-1}$, $P$ est un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant d'après la relation précédente :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad P(k) = 0.$$

Le polynôme $P$ possède alors $n$ racines distinctes ; étant de degré inférieur ou égal à $n-1$, il est nul. Tous les $\lambda_i$ sont donc nuls et la famille $(I_n, A, \cdots, A^{n-1})$ est libre.

▷ Finalement la famille $(I_n, A, \cdots, A^{n-1})$ est une base de $E$.

## ■ Comment montrer que $E = F \oplus G$

❑ **Méthode 1.3 —** ▸ On choisit un vecteur $x$ quelconque de $E$ et on montre qu'il s'écrit de manière unique sous la forme $x = f + g$ avec $(f, g) \in F \times G$. Pour cela, on peut procéder par *analyse-synthèse*.

- *Analyse* – On suppose qu'un tel couple existe et on cherche à exprimer $f$ et $g$ uniquement en fonction de $x$.
- *Synthèse* – On vérifie que les vecteurs $f$ et $g$ trouvés précédemment conviennent ; c'est-à-dire que $(f, g) \in F \times G$ et $f + g = x$.

▸ On peut aussi montrer que la concaténation d'une base de $F$ et d'une base de $G$ est une base de $E$.

▸ Si $E$ est de dimension finie, on peut utiliser le **théorème 1.6**. Dans la plupart des cas, on essaiera de montrer que $F \cap G = \{0_E\}$ puis que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

**Mise en œuvre : exercice 1.11**, **exercice 1.12**, et **exercice 1.13**.

**Exemple 1.3 –** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u$ un endomorphisme de $E$ vérifiant $u + u^3 = 0$. Montrer que $\ker(u)$ et $\ker(u^2 + \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans $E$.*

Soit $x \in E$.

▷ *Analyse* – On suppose qu'il existe deux vecteurs $y$ et $z$ vérifiant :

(i) $x = y + z$ ;

(ii) $y \in \ker(u)$, c'est-à-dire $u(y) = 0$ ;

(iii) $z \in \ker(u^2 + \mathrm{id}_E)$, c'est-à-dire $u^2(z) + z = 0$.

La linéarité de $u$ implique que $u^2(x) = u^2(y) + u^2(z)$. Or $u(y) = 0$ et donc $u^2(y) = 0$. Puisque $u^2(z) = -z$, il vient :

$$z = -u^2(x) \quad \text{et} \quad y = x - z = x + u^2(x).$$

▷ *Synthèse* – Posons $y = x + u^2(x)$ et $z = -u^2(x)$.

(i) On a bien $y + z = x$.

(ii) Puisque $u + u^3 = 0$, alors $u(y) = 0$ et $y \in \ker(u)$.

(iii) On a : $(u^2 + \mathrm{id}_E)(z) = -(u^4 + u^2)(x) = -u\big(u^3(x) + u(x)\big) = 0$ car $u^3 + u = 0$; ainsi $z \in \ker(u^2 + \mathrm{id}_E)$.

Tout vecteur de $E$ s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $\ker(u)$ et d'un vecteur de $\ker(u^2 + \mathrm{id}_E)$ : $E = \ker(u) \oplus \ker(u^2 + \mathrm{id}_E)$.

## ■ Comment montrer que $F$ est stable par $u$

❑ **Méthode 1.4 —** ▸ On montre que l'image par $u$ d'un vecteur quelconque de $F$ est encore un vecteur de $F$.

▸ Si on sait que $F = \mathrm{Vect}\,(f_1, \ldots, f_n)$, il suffit de montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(f_i)$ est un vecteur de $F$.

**Mise en œuvre : exercice 1.18**, **exercice 1.19** et **exercice 1.29**.

**Exemple 1.4 –** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par l'application linéaire $\Delta$ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par :*

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \Delta(P) = (X^2 + 1)P' - nXP.$$

Puisque $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, pour justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par $\Delta$ il suffit de vérifier que, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on a : $\Delta(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Soit $k \in [\![0, n]\!]$ on a :

$$\Delta(X^k) = (k - n)X^{k+1} + kX^{k-1}.$$

▷ Si $k < n$, on a $\deg\big(\Delta(X^k)\big) = k + 1 \leqslant n$ et par conséquent $\Delta(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$.

▷ Pour $k = n$, on a $\Delta(X^n) = nX^{n-1} \in \mathbb{R}_n[X]$.

Finalement $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par $\Delta$.

## ■ Comment calculer la trace d'un endomorphisme $f$ de $E$

❑ **Méthode 1.5 —** On choisit une base de $E$ et on détermine la matrice de $f$ dans cette base. La trace de $f$ est alors la somme des coefficients diagonaux de cette matrice.

**Mise en œuvre : exercice 1.20** et **exercice 1.22**.

**Exemple 1.5 –** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :*

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad f(P) = P'.$$

*Déterminer la trace de $f$.*

On note $\mathscr{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On a :

$$f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, n]\!], \qquad f(X^k) = kX^{k-1}.$$

On en déduit que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tous les coefficients diagonaux de cette matrice sont nuls, donc $\mathrm{Tr}(f) = 0$.

## ■ Comment appliquer le théorème du rang à une matrice $A$ appartenant à $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

❑ **Méthode 1.6 —** On applique ce théorème à l'application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à la matrice $A$, ce qui donne :

$$p = \dim\big(\ker(A)\big) + \mathrm{rg}(A)$$

où $p$ est le nombre de **colonnes** de la matrice $A$.

**Mise en œuvre : exercice 1.27**.

**Exemple 1.6 –** *Soit $a$ et $b$ deux réels et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \\ a^2 & b^2 \end{pmatrix}$. Déterminer la dimension de* $\ker(A)$.

On applique le théorème du rang, la matrice $A$ possède deux colonnes donc

$$\dim\big(\ker(A)\big) = 2 - \mathrm{rg}(A).$$

Il reste à déterminer le rang de $A$.
▷ Si $a = b$, la matrice $A$ possède deux colonnes égales (et non nulles) donc elle est de rang 1. Ainsi : $\dim\big(\ker(A)\big) = 1$.
▷ Si $a \neq b$, les colonnes de $A$ ne sont pas proportionnelles donc la matrice $A$ est de rang 2. Par conséquent $\dim\big(\ker(A)\big) = 0$.

# Vrai/Faux

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F$, $G$ et $H$ des sous-espaces vectoriels de $E$, $u$ un endomorphisme de $E$, $A$ et $B$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1.** L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+2y=3\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. | ☐ | ☐ |
| **2.** L'ensemble $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x=y\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. | ☐ | ☐ |
| **3.** Soit $x \in E$, alors $\mathrm{Vect}(x)$ est de dimension 1. | ☐ | ☐ |
| **4.** Soit $D_1$, $D_2$, $D_3$ des droites de $\mathbb{R}^3$ deux à deux distinctes. La somme $D_1 + D_2 + D_3$ est directe. | ☐ | ☐ |
| **5.** L'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension $n^2 - 1$. | ☐ | ☐ |
| **6.** Si $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$ alors $A = B$. | ☐ | ☐ |
| **7.** Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et si $\mathrm{Tr}(A^{\mathsf{T}}A) = 0$, alors $A = 0$. | ☐ | ☐ |
| **8.** L'image de $u$ est stable par $u$. | ☐ | ☐ |
| **9.** Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $E$, alors $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\big(u(e_1), \ldots, u(e_n)\big)$. | ☐ | ☐ |
| **10.** $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont en somme directe. | ☐ | ☐ |
| **11.** $\mathrm{Tr}(A^2) = \big(\mathrm{Tr}(A)\big)^2$. | ☐ | ☐ |
| **12.** $\mathrm{Tr}(A^{\mathsf{T}}A) = \mathrm{Tr}(AA^{\mathsf{T}})$. | ☐ | ☐ |
| **13.** L'application trace est surjective. | ☐ | ☐ |

# Énoncé des exercices

## Famille de vecteurs

**Exercice 1.1 :** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**1.** Soit $(a, b, c)$ une famille de vecteurs de $E$. Montrer que

$$\text{Vect}(a, b, c) = \text{Vect}(a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad c \in \text{Vect}(a, b).$$

**2.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ une famille de vecteurs de $E$. On suppose que $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre et que $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ est liée. Montrer que $e_{n+1} \in \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n)$.

**Exercice 1.2 :** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p$ et $q$ deux projecteurs non nuls de de $E$ tels que $p \circ q = 0$. Montrer que la famille $(p, q)$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

**Exercice 1.3 :** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $\varepsilon_k = \sum_{i=1}^{n} e_i - e_k$.

**1.** Justifier que la famille $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base de $E$.

**2.** Soit $P$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$. Déterminer $P$ et $P^{-1}$.

**Exercice 1.4 :** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $u$ un endomorphisme de $E$. On suppose qu'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que

$$u^{p-1} \neq 0 \quad \text{et} \quad u^p = 0.$$

**1.** Justifier l'existence d'un vecteur $x$ de $E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.

**2.** Montrer que la famille $\big(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{p-1}(x)\big)$ est libre.

**3.** En déduire que $p \leqslant n$, puis que $u^n = 0$.

**Exercice 1.5 :** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$, on note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires sur $E$.

**1.** Quelle est la dimension de $E^*$ ?

**2.** Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$.

**a.** Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Justifier l'existence d'une unique forme linéaire $\varphi_k$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \varphi_k(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**b.** Montrer que la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $E^*$.

**c.** Soit $\psi$ une forme linéaire sur $E$, déterminer les coordonnées de $\psi$ dans la base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

## Sous-espace vectoriel

**Exercice 1.6 :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x\cos(x)$ et $g(x) = x\sin(x)$. Déterminer la dimension de $\text{Vect}(\cos, \sin, f, g)$.

**Exercice 1.7 :** Justifier que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels, puis préciser leur dimension :

**1.** $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ ;

**2.** $F = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}, (\alpha,a,b,c,d) \in \mathbb{R}^5 \right\}$.

**Exercice 1.8 :** Vérifier que les parties suivantes sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. Déterminer pour chacun d'eux sa dimension, et une de ses bases.

**1.** $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-z+t=0\}$.

**2.** $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=z+t=0\}$.

**Exercice 1.9 :** On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

**1.** Justifier que $\Delta$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**2.** En déterminer une base.

**Exercice 1.10** :** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$.

**1.** Montrer que $\Delta = \{f \in \mathcal{L}(E), F \subset \ker(f)\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**2.** On suppose dans cette question que $F$ est de dimension $n-1$ ; on note alors $D$ un supplémentaire de $F$ dans $E$. Soit $\mathscr{B}$ une base adaptée à la décomposition en somme directe $E = F \oplus D$.

**a.** Soit $f \in \Delta$, déterminer la forme de la matrice de $f$ dans $\mathscr{B}$.

**b.** Déterminer la dimension de $\Delta$.

## ■ Somme, somme directe de sous-espaces vectoriels

**Exercice 1.11 :** Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x+y+z=0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x=-y=z\}$.

**1.** Justifier que $E$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, puis préciser leur dimension.

**2.** Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

**Exercice 1.12 :** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^3 + f^2 + f = 0$. Montrer que $\ker(f)$ et $\ker(f^2 + f + \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans $E$.

**Exercice 1.13 :** Soit $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel constitué des fonctions à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On pose $F = \{f : x \mapsto \lambda\cos(x) + \beta\sin(x) \mid (\lambda,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$ et $G = \{g \in E,\ g(0) = g(\pi/2) = 0\}$.

**1.** Montrer que $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$.

**2.** Justifier qu'ils sont supplémentaires dans $E$.

## ■ Application linéaire

**Exercice 1.14 :** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $E$. Soit $u$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

**1.** Montrer que $u$ est un projecteur de $E$. Quel est son rang ?
**2.** Déterminer une base de $\ker(u)$ et de $\mathrm{Im}(u)$.
**3.** Justifier que la matrice $A$ est semblable à la matrice diagonale $\Delta = \mathrm{diag}(0,1,1)$.
**4.** Déterminer une matrice inversible $P$ telle que $P^{-1}AP = \Delta$.

**Exercice 1.15 :** Soit $b$ et $c$ deux réels.

**1.** Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Déterminer une base de $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

**2.** Soit $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ canoniquement associé à la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 3 & 3b & 3c \end{pmatrix}$.
Déterminer une base de $\ker(v)$ et de $\mathrm{Im}(v)$.

**3.** Déterminer $b$ et $c$ afin que $\mathrm{Im}(u) = \ker(v)$.

**Exercice 1.16 :** Soit $f$ définie par

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+2y, x-y, x+y) \end{array}.$$

**1.** Montrer que $f$ est linéaire.
**2.** L'application $f$ est-elle surjective ?
**3.** Relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, déterminer une équation de $\mathrm{Im}(f)$.
**4.** L'application $f$ est-elle injective ?
**5.** Déterminer, sans les résoudre, le nombre de solutions des systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ x-y=1 \\ x+y=3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x+2y=4 \\ x-y=3 \\ x+y=1 \end{cases}.$$

**Exercice 1.17* :** On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ et soit $f$ l'application définie par :

$$\forall P \in E, \qquad f(P) = P(1)X(X-1) + P(-1)X(X+1).$$

**1.** Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$.
**2.** Montrer que $\big(X(X-1), X(X+1)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
**3.** Déterminer une base de $\ker(f)$.
**4.** Établir que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $E$.
**5.** Dans une base adaptée à la décomposition $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, déterminer la matrice de $f$.

**Exercice 1.18 :** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
**1.** Soit $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$ qui commutent : $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont stables par $g$.
**2.** Soit $p$ un projecteur de $E$ et $u$ un endomorphisme de $E$. Montrer que $u$ et $p$ commutent si et seulement si, $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par $u$.

**Exercice 1.19 :** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f$ un endomorphisme de $E$.

**1.** Justifier que $\mathrm{Im}(f)$ est stable par $f$.

**2.** Soit $g$ l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$ défini par :

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathrm{Im}(f) & \longrightarrow & \mathrm{Im}(f) \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}.$$

Déterminer $\ker(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$.

**3.** En déduire que : $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f) - \dim\big(\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)\big)$.

**4.** Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ ;

(ii) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$ ;

(iii) $\ker(f) = \ker(f^2)$.

## ■ Trace d'un endomorphisme, d'une matrice

**Exercice 1.20 :** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $f$ un endomorphisme de $E$ de rang 1.

**1.** Déterminer la dimension de $\ker(f)$.

**2.** Montrer que $f^2 = \mathrm{Tr}(f)f$.

**3.** Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$.

**a.** Montrer qu'il existe deux matrices colonnes $U$ et $V$ telles que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = UV^{\mathsf{T}}$.

**b.** En déduire que $\mathrm{Tr}(f) = V^{\mathsf{T}}U$.

**Exercice 1.21 :** On note $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

**1.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Déterminer $\mathrm{Tr}(AE_{ij})$.

**2.** Soit $A$ et $B$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant la propriété :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(BM).$$

Établir que $A = B$.

**3.** Pour toute matrice $A$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on considère l'application $\varphi_A$ définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \varphi_A(M) = \mathrm{Tr}(AM).$$

**a.** Justifier que $\varphi_A$ est linéaire.

**b.** Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{L}\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\big) \\ & A & \longmapsto & \varphi_A \end{array}$$

est un isomorphisme.

**Exercice 1.22 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Pour toute matrice $M$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on pose

$$f(M) = AMB.$$

**1.** Montrer que l'application $f : M \mapsto f(M)$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

**2.** Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

**3.** Déterminer une base du noyau et de l'image de $f$.

**4.** Calculer $\mathrm{Tr}(f)$.

**Exercice 1.23 :** Soit $n \geqslant 2$ un entier. On désigne par $u$ l'application définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \qquad u(A) = A + \mathrm{Tr}(A) I_n.$$

**1.** Montrer que $u$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
**2.** Établir que $u$ est un automorphisme.
**3.** Montrer que $u^2 - (n+2)u + (n+1)\,\mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} = 0$.
**4.** En déduire une expression de $u^{-1}$ en fonction de $u$, $n$ et $\mathrm{id}_E$.
**5.** On suppose dans cette question que $n = 2$.
**a.** Déterminer la matrice de $u$ dans la base $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
**b.** Justifier que cette matrice est inversible, puis déterminer son inverse.

## ■ Calcul matriciel

**Exercice 1.24 :** Pour tous réels $a$, $b$ et $c$, on pose :

$$F_1(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad F_2(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}.$$

**1.** Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Effectuer les produits $F_1(a,b)A$ et $F_2(c)A$.
**2.** Justifier que les matrices $F_1(a,b)$ et $F_2(c)$ sont inversibles, déterminer leurs inverses.
**3.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.
**a.** Déterminer trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que $F_2(c)F_1(a,b)A$ soit une matrice triangulaire supérieure.
**b.** Trouver deux matrices $L$ et $U$, respectivement triangulaire inférieure et supérieure, telles que $A = LU$.
**c.** Résoudre le système $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

**Exercice 1.25 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ -1 & -2 & 5 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

**1.** Calculer $A^2$.
**2.** Justifier que $A$ est inversible, puis déterminer $A^{-1}$.
**3.** Soit $n \in \mathbb{N}$, justifier que $A^n \in \mathrm{Vect}(I_3, A)$.
**4.** Soit $n \in \mathbb{Z}$, justifier que $A^n \in \mathrm{Vect}(I_3, A)$.

**Exercice 1.26 :** Soit $V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $V^{\mathsf{T}}V = 1$. On pose $S = I_n - 2VV^{\mathsf{T}}$.

**1.** Montrer que $S$ est une matrice symétrique.
**2.** Justifier que $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de $S$.
**3.** En déduire que $S$ est inversible et déterminer $S^{-1}$.

**Exercice 1.27 :** Soit $n \geqslant 2$ un entier et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

**1.** Déterminer la dimension de $\ker(A)$.

**2.** Déterminer un réel $\gamma$ de sorte que $X^3 - \gamma X$ soit un polynôme annulateur de $A$.

**Exercice 1.28 :** Soit $n \geqslant 2$ un entier et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note

$$\Gamma_1 = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = M\right\} \quad \text{et} \quad \Gamma_2 = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^2M = AM\right\}$$

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) la matrice $A$ est inversible ;

(ii) $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

**Exercice 1.29 :** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle. On considère les applications $\varphi$ et $\psi$ définies par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = AM + MA^{\mathsf{T}} \qquad \text{et} \qquad \psi(M) = AMA^{\mathsf{T}}.$$

**1.** Montrer que $\varphi$ et $\psi$ sont des endomorphismes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

**2.** Établir que $\varphi$ et $\psi$ commutent, c'est-à-dire que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

**3.** Justifier que les sous-espaces vectoriels $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont stables par $\varphi$ et $\psi$.

**Exercice 1.30* :** Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel non nul.

**1.** Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne. Établir que

$$X^{\mathsf{T}}X = 0 \quad \iff \quad X = 0.$$

**2.** Montrer que pour toute matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et pour toute matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ :

$$X^{\mathsf{T}}BX = X^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}}X.$$

**3.** Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

**a.** Montrer que pour toute matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^{\mathsf{T}}AX = 0$.

**b.** Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne telle que $(A + I_n)X = 0$. En calculant $X^{\mathsf{T}}(A + I_n)X$ de deux manières différentes, montrer que $X = 0$.

**c.** En déduire que $A + I_n$ est une matrice inversible.

**4.** Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, on pose $B = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.

**a.** Calculer $B^{\mathsf{T}}B$ ; en déduire que $B$ est inversible et déterminer $B^{-1}$.

**b.** Calculer $(I_n + B)(I_n + A)$ ; en déduire que $I_n + B$ est inversible.

# Indications

**Ex. 1.1**

**2.** *Justifier l'existence d'une famille de réels* $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$ *non tous nuls vérifiant* $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k e_k = 0$. *Supposer* $\lambda_{n+1} = 0$ *et aboutir à une contradiction.*

**Ex. 1.3**

**1.** *Montrer que la famille* $\mathscr{C}$ *est libre.*
**2.** *On rappelle que* $P$ *est une matrice de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *dont la* $j$*-ième colonne est constituée par les coordonnées de* $\varepsilon_j$ *dans* $\mathscr{B}$. *La matrice* $P^{-1}$ *est la matrice de passage entre la base* $\mathscr{C}$ *et la base* $\mathscr{B}$.

**Ex. 1.4**

**2.** *Déterminer le cardinal de la famille* $\big(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{p-1}(x)\big)$.

**Ex. 1.5**

**2. a.** *On rappelle qu'une application linéaire est totalement déterminée par l'image d'une base.*

**Ex. 1.6**

*Pour établir que* $(\cos, \sin, f, g)$ *est libre, on pourra utiliser les développements limités.*

**Ex. 1.7**

*Les ensembles* $E$ *et* $F$ *sont décrits en extension, appliquer la* ***méthode 1.1***.

**Ex. 1.10**

**2. b.** *À l'aide de la question précédente, établir que*

$$f \in \Delta \iff \exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

*Pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, *définir l'endomorphisme* $f_i$ *de* $E$ *dont la matrice dans* $\mathscr{B}$ *est* $E_{in}$. *Justifier alors que* $(f_1, \dots, f_n)$ *est une base de* $\Delta$.

**Ex. 1.14**

**3.** *Penser à utiliser les déterminants.*
**4.** *On rappelle que* $\ker(u)$ *et* $\mathrm{Im}(u)$ *sont supplémentaires dans* $E$ *car* $u$ *est un projecteur de* $E$.

**Ex. 1.15**

**3.** *Justifier que* $\mathrm{Im}(u) = \ker(v)$ *si et seulement si* $BA = 0$.

**Ex. 1.17**

**2.** *Procéder par double inclusion.*
**3.** *Déterminer la dimension de* $\ker(f)$ *puis déterminer deux polynômes de* $E$ *non proportionnels qui s'annulent en* $1$ *et en* $-1$.

**Ex. 1.18**

**2.** *On rappelle que* $\ker(p)$ *et* $\mathrm{Im}(p)$ *sont supplémentaires dans* $E$.

**Ex. 1.19**

**2.** *Établir que* $\ker(g) = \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f)$ *et* $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f^2)$.

**Ex. 1.20**

**2.** *Choisir une droite $\Delta$ supplémentaire de $\ker(f)$ dans $E$ et se placer dans une base adaptée à $E = \ker(f) \oplus \Delta$.*

**Ex. 1.23**

**2.** *Pour toute matrice $A$ de $\ker(u)$, déterminer $\mathrm{Tr}\big(u(A)\big)$.*

**Ex. 1.25**

**2.** *Déterminer un polynôme annulateur de $A$ de degré 2.*

**3.** *Raisonner par récurrence.*

**4.** *Si $n \in \mathbb{N}$, alors $A^{-n} = \big(A^{-1}\big)^n$ ; utiliser alors les questions 2 et 3, ainsi que la formule du binôme de Newton.*

**Ex. 1.28**

*(ii) $\Longrightarrow$ (i) – Pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $AX = 0$, introduire la matrice $M$ dont toutes les colonnes sont nulles sauf la première qui elle, est égale à $X$ ; vérifier que cette matrice appartient à $\Gamma_2$.*

**Ex. 1.30**

**2.** *Une matrice de $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ est symétrique, donc égale à sa transposée.*

**4. a.** *Si $M$ est une matrice, alors la matrice $M^{\mathsf{T}}$ est inversible et $\big(M^{\mathsf{T}}\big)^{-1} = \big(M^{-1}\big)^{\mathsf{T}}$.*

*Utiliser également l'égalité : $(MN)^{\mathsf{T}} = N^{\mathsf{T}}M^{\mathsf{T}}$.*

# Corrigé des vrai/faux

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | V | F | F | V | F | V | V | V | F | F | V | V |

**1.** Cet ensemble ne contient pas $(0,0)$.
**2.** On constate que

$$\big\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x=y\big\}=\big\{(x,x,z,t)\mid(x,z,t)\in\mathbb{R}^3\big\}=\mathrm{Vect}\big((1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\big).$$

C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et c'est en particulier un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
**3.** Si $x=0$, alors $\mathrm{Vect}(x)=\{0\}$ et sa dimension est nulle. Si $x\neq 0$, alors $\mathrm{Vect}(x)$ est de dimension 1.
**4.** On pose $i=(1,0,0)$ et $j=(0,1,0)$. Notons $D_1=\mathrm{Vect}(i)$, $D_2=\mathrm{Vect}(j)$ et $D_3=\mathrm{Vect}(i+j)$. Ces trois droites sont bien deux à deux distinctes, mais on a $i+j-(i+j)=0$, avec $i\in D_1$, $j\in D_2$ et $i+j\in D_3$. Le vecteur nul ne se décompose pas de manière unique, la somme $D_1+D_2+D_3$ n'est pas directe.
**5.** On note $F$ l'ensemble des matrices de trace nulle : $F=\ker(\mathrm{Tr})$. Puisque Tr est linéaire, alors $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On applique alors le théorème du rang :

$$\dim\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\big)=\dim(F)+\mathrm{rg}(\mathrm{Tr}).$$

Ainsi : $\dim(F)=n^2-\mathrm{rg}(\mathrm{Tr})$.
On sait que $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr})\subset\mathbb{R}$ et donc $\mathrm{rg}(\mathrm{Tr})\leqslant\dim(\mathbb{R})=1$. Puisque Tr n'est pas l'application nulle, alors $\mathrm{rg}(\mathrm{Tr})\geqslant 1$. Finalement, Tr est de rang 1 et $F$ est de dimension $n^2-1$.
**6.** On note $A=\mathrm{diag}(1,-1,0,\dots,0)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B=\mathrm{diag}(-1,1,0,\dots,0)$ ; on a $\mathrm{Tr}(A)=\mathrm{Tr}(B)$ et $A\neq B$.
**7.** Si $M$ est une matrice, on note $L_i(M)$ sa $i$-ème ligne et $C_j(M)$ sa $j$-ième colonne. On pose $A=(a_{ij})$ et $A^{\mathsf{T}}A=(b_{ij})$. Pour tout entier $k\in[\![1,n]\!]$ :

$$b_{kk}=L_k(A^{\mathsf{T}})C_k(A)=\big(C_k(A)\big)^{\mathsf{T}}C_k(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}^2.$$

On en déduit que : $\mathrm{Tr}(A^{\mathsf{T}}A)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ik}^2$. Puisque $A$ est à coefficients réels, on a donc :

$$\forall(i,k)\in[\![1,n]\!],\qquad 0\leqslant a_{ik}^2\leqslant\mathrm{Tr}(A^{\mathsf{T}}A).$$

Puisque $\mathrm{Tr}(A^{\mathsf{T}}A)=0$, alors tous les coefficients de $A$ sont nuls et $A=0$.
**8.** Soit $x\in\mathrm{Im}(u)$, alors $u(x)\in\mathrm{Im}(u)$.
**9.** ▹ Montrons que $\mathrm{Vect}\big(u(e_1),\dots,u(e_n)\big)\subset\mathrm{Im}(u)$. Soit $y\in\mathrm{Vect}\big(u(e_1),\dots,u(e_n)\big)$, il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $y=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k u(e_k)$. La linéarité de $u$ implique alors :

$$y=u\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right)\in\mathrm{Im}(u).$$

▷ Montrons que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Vect}\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Il existe un vecteur $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Puisque $\mathscr{B}$ est une base de $E$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. Comme précédemment, on utilise la linéarité de $u$ :

$$y = u(x) = u\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda u(e_k) \in \mathrm{Vect}\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big).$$

**10.** En général, on n'a pas $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$ ; en effet supposons que $y \in \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u)$. On a :

$$u(y) = 0 \quad \text{et} \quad \exists x \in E, \quad u(x) = y.$$

On en déduit que $u^2(x) = 0$. Cependant, pour établir que $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$, on a besoin de justifier que $y = 0$ et donc $x \in \ker(u)$. Cependant, on sait uniquement que $x \in \ker(u^2)$ et en général, cela n'implique pas que $x \in \ker(u)$.
**11.** On pose $A = \mathrm{diag}(1, -1, 0, \dots, 0) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi $A^2 = \mathrm{diag}(1, 1, 0, \dots, 0)$ et on a $\mathrm{Tr}(A^2) = 2$ et $\big(\mathrm{Tr}(A)\big)^2 = 0$.
**12.** Il suffit d'appliquer la **proposition 1.14**.
**13.** Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, on pose $A = \mathrm{diag}(\alpha, 0, \dots, 0) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on a $\mathrm{Tr}(A) = \alpha$. Ainsi pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = \alpha$ : l'application Tr est surjective.

❑ **Erreurs classiques**

- Pour montrer que la somme de plus de deux sous-espaces vectoriels est directe, il ne suffit pas de montrer que leurs intersections deux à deux sont réduites à $\{0_E\}$.
- Croire que l'image et le noyau d'une application sont toujours supplémentaires.
- Oublier que l'image d'une application linéaire est, en dimension finie, le sous-espace vectoriel engendré par les images des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel de départ.
- Penser que la trace d'un produit est égale au produit des traces.
- Croire que l'application trace est injective.

Corrigé

# Corrigé des exercices

## Exercice 1.1

**1.** ( $\Longrightarrow$ ) Puisque $c \in \text{Vect}(a,b,c)$, alors $c \in \text{Vect}(a,b)$.

▷ ($\Longleftarrow$) On a $\text{Vect}(a,b) \subset \text{Vect}(a,b,c)$. Montrons que $\text{Vect}(a,b,c) \subset \text{Vect}(a,b)$. Soit $x \in \text{Vect}(a,b,c)$. Il existe $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ des réels tels que :

$$x = \alpha a + \beta b + \gamma c.$$

Or par hypothèse $c \in \text{Vect}(a,b)$, donc il existe $\lambda$ et $\mu$ tels que : $c = \lambda a + \mu b$. Finalement :

$$x = (\alpha + \lambda)a + (\beta + \mu)b.$$

On en déduit que $x \in \text{Vect}(a,b)$ ; finalement : $\text{Vect}(a,b) = \text{Vect}(a,b,c)$.

**2.** Puisque $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ est une famille liée, il existe une famille de scalaires non tous nuls $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$ tels que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k e_k = 0.$$

▷ Supposons que $\lambda_{n+1} = 0$, on a alors : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0$.

Or les $\lambda_k$, $k \in [\![1,n]\!]$, ne sont pas tous nuls. La relation précédente implique alors que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est liée ; ce qui est impossible par hypothèse. Ainsi $\lambda_{n+1} \neq 0$ et on a :

$$e_{n+1} = \frac{-1}{\lambda_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \in \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n)\,.$$

## Exercice 1.2

✎ $p^2 = p$ *et* $p \circ q = 0$

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ tels que $ap + bq = 0$. On compose cette relation à gauche par $p$, il vient $ap = 0$. Puisque $p$ est non nul, alors $a = 0$. Il vient alors $bq = 0$ et, puisque $q$ est non nul, on a $b = 0$.
Finalement, la famille $(p,q)$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

## Exercice 1.3

**1.** La famille $\mathscr{C}$ est de cardinal $n = \dim(E)$ ; pour établir que cette famille est une base de $E$, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ des réels tels que : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varepsilon_k = 0$. Montrons que pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_k = 0$.

✎ $\forall k \in [\![1,n]\!]$ : $\varepsilon_k = x - e_k$.

On note $x = \sum_{i=1}^{n} e_i$ et $s = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x - e_k) = x \sum_{k=1}^{n} \lambda_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

Or $x\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = sx = s\sum_{k=1}^{n}e_k = \sum_{k=1}^{n}se_k$. Ainsi $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n}(s-\lambda_k)e_k$ et

$$\sum_{k=1}^{n}(s-\lambda_k)e_k = 0.$$

Puisque la famille $(e_1,\dots,e_n)$ est libre, la relation précédente implique :

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\qquad s-\lambda_k = 0.$$

On en déduit alors que : $\sum_{k=1}^{n}(s-\lambda_k) = 0$ et donc que $(n-1)s = 0$.
Puisque $n\geqslant 2$, il vient $s = 0$.
Finalement, pour tout entier $k\in[\![1,n]\!]$, on a $\lambda_k = 0$. La famille $\mathscr{C}$ est une base de $E$.

**2.** On sait que $P$ est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la $j$-ième colonne est constituée par les coordonnées de $\varepsilon_j$ dans $\mathscr{B}$, ainsi :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

▷ La matrice $P^{-1}$ est la matrice de passage entre la base $\mathscr{C}$ et la base $\mathscr{B}$. Avec les notations précédentes, on sait que

*Pour tout entier $k\in[\![1,n]\!]$, on doit déterminer les coordonnées de $e_k$ dans $\mathscr{C}$.*

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\qquad \varepsilon_k = x - e_k.$$

On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k = nx - \sum_{k=1}^{n}e_k = (n-1)x.$$

Ainsi :

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\qquad e_k = x-\varepsilon_k = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i - \varepsilon_k.$$

Finalement :

$$P^{-1} = \frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 2-n\end{pmatrix}.$$

## Exercice 1.4

**1.** Puisque $u^{p-1}$ n'est pas l'application nulle, il existe un vecteur $x$ de $E$ tel que $u^{p-1}(x)\neq 0$

**2.** Soit $(\lambda_k)_{k\in[\![0,p-1]\!]}$ une famille de réels telle que :

$$\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \cdots + \lambda_{p-1}u^{p-1}(x) = 0. \qquad (*)$$

Corrigé

On compose l'égalité $(*)$ par $\mathrm{id}_E, u, u^2, \dots, u^{p-1}$. Puisque pour tout entier $k \geqslant p$, $u^k(x) = 0$, il vient :

$$\begin{cases} \lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0 \\ \lambda_0 u(x) + \lambda_1 u^2(x) + \cdots + \lambda_{p-2} u^{p-1}(x) = 0 \\ \vdots \\ \lambda_0 u^{p-2}(x) + \lambda_1 u^{p-1}(x) = 0 \\ \lambda_0 u^{p-1}(x) = 0 \end{cases}.$$

Puisque $u^{p-1}(x) \neq 0$, le système précédent conduit successivement à $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_{p-1} = 0$. La famille $\big(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\big)$ est libre.

**3.** La famille $\big(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{p-1}(x)\big)$ est de cardinal $p$, elle est libre dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n$ donc $n \geqslant p$. Puisque $u^p = 0$, on a donc :

$$u^n = u^{n-p} \circ u^p = 0.$$

## Exercice 1.5

✎ $\dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim(E)\dim(\mathbb{K})$.

**1.** $\dim(E^*) = n$.

**2. a.** Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base, ce qui justifie l'existence et l'unicité de $\varphi_k$.

✎ ***Méthode 1.2***

**b.** Puisque $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est de cardinal $n = \dim(E^*)$, il suffit d'établir qu'elle est libre pour justifier qu'elle forme une base de $E^*$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ des scalaires tels que :

$$\forall x \in E, \qquad \lambda_1 \varphi_1(x) + \cdots + \lambda_n \varphi_n(x) = 0.$$

En particulier pour $x = e_k$, $k \in [\![1, n]\!]$, il vient $\lambda_k = 0$. La famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre.

▷ On vient de prouver que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $E^*$.

**c.** Il existe une unique famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de scalaires telle que :

$$\forall x \in E, \quad \psi(x) = \lambda_1 \varphi_1(x) + \cdots + \lambda_n \varphi_n(x).$$

✎ *$(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est appelée la base duale de la base $(e_1, \dots, e_n)$ de $E$.*

En particulier pour $x = e_k$, $k \in [\![1, n]\!]$, il vient $\lambda_k = \psi(e_k)$. $\psi$ a pour coordonnées dans la base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ : $\big(\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)\big)$.

## Exercice 1.6

Notons $E = \mathrm{Vect}(\cos, \sin, f, g)$ ; la famille $(\cos, \sin, f, g)$ est génératrice de $E$, montrons qu'elle est libre. Soit $\lambda$, $\beta$, $\alpha$ et $\gamma$ des réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda f(x) + \alpha g(x) + \beta \cos(x) + \gamma \sin(x) = 0.$$

✎ *Au voisinage de 0,* $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$ $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$.

La fonction $h : x \mapsto \lambda f(x) + \alpha g(x) + \beta \cos(x) + \gamma \sin(x)$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$, elle admet donc un développement limité en 0 à l'ordre 3 :

✎ *On en déduit que* $f(x) = x - \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)$ $g(x) = x^2 + o\left(x^3\right)$.

$$h(x) = \beta + (\gamma + \lambda)x + \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)x^2 - \left(\frac{\gamma}{6} + \frac{\lambda}{2}\right)x^3 + o\left(x^3\right).$$

Puisque $h$ est nulle, l'unicité du développement limité entraîne que :

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma + \lambda = 0 \\ \alpha - \dfrac{\beta}{2} = 0 \\ \dfrac{\gamma}{6} + \dfrac{\lambda}{2} = 0 \end{cases} \iff \beta = \gamma = \alpha = \lambda = 0.$$

La famille $(f, g, \cos, \sin)$ est libre ; c'est une base de $E$.
Finalement, $\dim(E) = 4$.

## Exercice 1.7

*Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel est un espace vectoriel.*

*$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$*

**1.** On a $E \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $E = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, I_2\right)$. Ainsi, $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Les matrices $A$ et $I_2$ ne sont pas proportionnelles donc la famille $(A, I_2)$ est libre. Puisqu'elle engendre $E$, cette famille est une base de $E$ et donc $\dim(E) = 2$.
**2.** On a $F \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $F = \text{Vect}(E_{11}, E_{22}, E_{23}, E_{32}, E_{33})$ : $F$ est sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. La famille $(E_{11}, E_{22}, E_{23}, E_{32}, E_{33})$ est libre car c'est une sous-famille de la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ; et donc $\dim(F) = 5$.

## Exercice 1.8

**1.** On constate que

$$F = \big\{(x, y, x + y + t, t) \mid (x, y, t) \in \mathbb{R}^3\big\}.$$

Pour tout $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(x, y, x + y + t, t) = x(1, 0, 1, 0) + y(1, 0, 1, 0) + t(0, 0, 1, 1).$$

On en déduit que

$$F = \text{Vect}\big((1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0)\big).$$

Ainsi $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
▷ *Vérifions que la famille $\big((1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0)\big)$ est libre.*
Soit $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$x(1, 0, 1, 0) + y(1, 0, 1, 0) + t(0, 0, 1, 1) = (0, 0, 0, 0).$$

On en déduit que

$$(x, y, x + y + t, t) = (0, 0, 0, 0).$$

Ainsi : $x = y = t = 0$ et la famille $\big((1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0)\big)$ est libre.
▷ Cette famille est génératrice de $F$ et elle est libre : c'est une base de $F$ et donc

$$\dim(F) = 3.$$

**2.** On constate que

$$G = \big\{(x, -x, z, -z) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\big\} = \text{Vect}\big((1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\big).$$

Corrigé

▷ La famille $\big((1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\big)$ est une famille génératrice de $G$, elle est libre car les vecteurs $(1,-1,0,0)$ et $(0,0,1,-1)$ ne sont pas proportionnels : c'est une base de $G$ et

$$\dim(G) = 2.$$

## Exercice 1.9

**1.** Puisque $\Delta \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, montrons alors que $\Delta$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

*Autre méthode : on montre que l'application $f : M \mapsto AM - MA$ est linéaire. Puisque $\Delta = \ker(f)$, alors $\Delta$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, c'est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

▷ La matrice nulle appartient à $\Delta$ car $A\,0 = 0\,A = 0$ : $\Delta$ est non vide.

▷ Soit $M$ et $N$ deux matrices appartenant à $\Delta$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $M + \lambda N \in \Delta$.

Puisque $AM = MA$ et $AN = NA$, on a

$$(M + \lambda N)A = MA + \lambda NA = AM + \lambda AN = A(M + \lambda N).$$

Ainsi $M + \lambda N \in \Delta$ et $\Delta$ est stable par combinaison linéaire.

**2.** Notons $M = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$. Alors $AM = \begin{pmatrix} y & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$.

On en déduit :

$$AM = MA \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = t \end{cases}.$$

On en déduit que :

$$\Delta = \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid (x,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}(I_2, A).$$

La famille $(I_2, A)$ engendre $\Delta$, elle est libre (les matrices $I_2$ et $A$ ne sont pas proportionnelles) : c'est une base de $\Delta$.

## Exercice 1.10

**1.** Montrons que $\Delta$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

▷ On note $o$ l'application nulle de $\mathcal{L}(E)$, on a alors $\ker(o) = E$ et puisque $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, $F \subset \ker(o)$ : $\Delta$ est non vide.

*$x \in F$ donc $x \in \ker(f)$ et $x \in \ker(g)$.*

▷ Soit $f, g \in \Delta$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $F \subset \ker(f + \lambda g)$. Soit $x \in F$, on a :

$$(f + \lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x) = 0.$$

Ainsi $f + \lambda g$ appartient à $\Delta$ et $\Delta$ est stable par combinaison linéaire.

▷ Finalement, $\Delta$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ ; c'est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**2. a.** La base $\mathscr{B}$ est formée par la concaténation d'une base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ de $F$ et d'une base $(w)$ de $D$. Puisque $F \subset \ker(f)$, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $f(e_i) = 0$. On désigne par $(a_1, \ldots, a_n)$ les coordonnées de $f(w)$ dans $\mathscr{B}$ et on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

**b.** Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

On sait alors que : $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $f(e_i) = 0$. Puisque $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$, on a $F \subset \ker(f)$ et $f \in \Delta$.
On vient d'établir l'équivalence suivante :

*On note $(E_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

$$f \in \Delta \iff \exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$, on note $f_i$ l'endomorphisme de $E$ défini par $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f_i) = E_{in}$. On a alors :

$$f \in \Delta \iff \exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f_i).$$

Puisque $\sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f_i) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\Big)$, et puisqu'un endomorphisme de $E$ est uniquement déterminé par la donnée de sa matrice dans $\mathscr{B}$, on a :

$$f \in \Delta \iff \exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i.$$

Finalement, on vient d'établir que $\Delta = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_n)$.
▷ Montrons que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} a_i f_i = 0$. On en déduit que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\Big)$ et par conséquent :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} = 0.$$

Ainsi, $a_1 = \cdots = a_n = 0$ : la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre et engendre $\Delta$, c'est une base de $\Delta$.
▷ Finalement, $\Delta$ est $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n$.

## Exercice 1.11

**1.** ▷ On constate que

$$F = \big\{(x, y, -x-y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\big\} = \mathrm{Vect}\big((1, 0, -1), (0, 1, -1)\big).$$

On en déduit que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. De plus, la famille $\big((1, 0, -1), (0, 1, -1)\big)$ est libre et génératrice de $F$ : c'est une base de $F$ et $F$ est de dimension 2.

*Les vecteurs $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, -1)$ ne sont pas proportionnels.*

▷ On constate que

$$G = \big\{(x, -x, x) \mid x \in \mathbb{R}\big\} = \mathrm{Vect}\big((1, -1, 1)\big).$$

On en déduit que $G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1.

Corrigé

**2.** ▷ De la question précédente, on déduit que :

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3).$$

✎ *$F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, donc* $(0,0,0) \in F \cap G$.

▷ Montrons que $F \cap G = \{0\}$. Soit $(x,y,z) \in F \cap G$. On a alors :

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x=-y \\ x=z \end{cases}.$$

On en déduit que : $0 = x+y+z = 2x$ ; ainsi $x=0$ et par suite $y=z=0$. Finalement $F \cap G = \{0\}$.
▷ On vient de prouver que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

✎ *On applique la* ***méthode 1.3***.

## Exercice 1.12

Soit $x \in E$.
▷ *Analyse* – On suppose qu'il existe $(y,z) \in E^2$ tel que :

(i) $x = y+z$ ;

(ii) $y \in \ker(f)$, c'est-à-dire $f(y)=0$ ;

(iii) $z \in \ker(f^2+f+\mathrm{id}_E)$, c'est-à-dire $f^2(z)+f(z)+z=0$.

On a :

$$\begin{aligned} z &= -f^2(z) - f(z) \\ z &= -f^2(x-y) - f(x-y) \\ z &= -f^2(x) - f(x) + f^2(y) + f(y) && \text{(linéarité de } f\text{)} \\ z &= -f^2(x) - f(x) && f(y) = f^2(y) = 0 \text{ (car } y \in \ker(f)\text{)} \end{aligned}$$

On en déduit que $z = -f(x) - f^2(x)$ et que $y = x - z = x + f(x) + f^2(x)$. La décomposition, si elle existe, est unique.
▷ *Synthèse* – On pose $z = -f(x) - f^2(x)$ et $y = x + f(x) + f^2(x)$. On a :

(i) $x = y+z$ ;

(ii) $y \in \ker(f)$ ; en effet $f(y) = f(x) + f^2(x) + f^3(x) = 0$ car $f^3 + f^2 + f = 0$ ;

(iii) $z \in \ker(f^2+f+\mathrm{id}_E)$ car

$$\begin{aligned} f^2(z) + f(z) + z &= -f^3(x) - f^4(x) - f^2(x) - f^3(x) - f(x) - f^2(x) \\ &= \underbrace{-f^4(x) - f^3(x) - f^2(x)}_{-f(0)=0} - \underbrace{f^3(x) - f^2(x) - f(x)}_{=0}. \end{aligned}$$

On vient de prouver que : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2+f+\mathrm{id}_E)$.

## Exercice 1.13

✎ $\dim(F) = 2$

**1.** ▷ Puisque $F = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$, $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
▷ Les applications $\varphi : g \mapsto g(0)$ et $\psi : g \mapsto g(\pi/2)$ sont des applications linéaires de $E$ dans $\mathbb{R}$. Puisque $G = \ker(\varphi) \cap \ker(\psi)$, $G$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**2.** Soit $h \in E$.

*On raisonne par analyse-synthèse, voir* **Méthode 1.3**

▷ *Analyse* – On suppose qu'il existe un couple $(f,g) \in E^2$ tel que

(i) $h = f + g$, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = f(x) + g(x)$ ;

(ii) $f \in F$, c'est-à-dire : $\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)$ ;

(iii) $g \in G$, c'est-à-dire $g(0) = g(\pi/2) = 0$.

On en déduit que :

$$h(0) = f(0) \qquad \text{et} \qquad h(\pi/2) = f(\pi/2).$$

Or par définition de $f$, on a : $\alpha = f(0)$ et $\beta = f(\pi/2)$. Finalement, les fonctions $f$ et $g$ sont définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = h(0)\cos(x) + h(\pi/2)\sin(x) \quad \text{et} \quad g(x) = h(x) - f(x).$$

La décomposition, si elle est existe, est unique.

▷ *Synthèse* – Soit $f$ et $g$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = h(0)\cos(x) + h(\pi/2)\sin(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = h(x) - f(x).$$

(i) On a bien $h = f + g$.

(ii) Puisque $f$ est une combinaison linéaire des fonctions cos et sin, $f$ appartient à $F$.

(iii) Puisque $g(0) = g(\pi/2) = 0$, $g$ appartient à $G$.

*$h(0) = f(0)$ et $h(\pi/2) = f(\pi/2)$*

▷ Finalement les sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$.

## Exercice 1.14

**1.** Puisque $A^2 = A$, alors $u^2 = u$ et $u$ est un projecteur. La matrice $A$ est de rang 2, car $(C_1, C_2)$ forme une famille libre de $\mathbb{R}^3$ et $C_1 = -C_3$. Ainsi $u$ est de rang 2.

*$C_j$ désigne la $j^{ième}$ colonne de $A$.*

**2.** Du théorème du rang, on déduit que $\ker(u)$ est de dimension 1. On constate que $u(e_1) = -u(e_3)$, soit $u(e_1 + e_3) = 0$. Ainsi $e_1 + e_3 \in \ker(u)$ donc $e_1 + e_3$ est une base de $\ker(u)$.

On a $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}\big(u(e_1), u(e_2)\big) = \operatorname{Vect}(e_1 - e_3, e_1 + e_2 + e_3)$ ; la famille $(e_1 - e_3, e_1 + e_2 + e_3)$ engendre $\operatorname{Im}(u)$, elle est de cardinal $2 = \operatorname{rg}(u)$ : c'est une base de $\operatorname{Im}(u)$.

**3.** Puisque $u$ est un projecteur de $E$, on sait que $\operatorname{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont supplémentaires dans $E$. La famille $\mathcal{B}' = \big(e_1 + e_3, e_1 - e_3, e_1 + e_2 + e_3\big)$ est alors une base de $E$ car c'est la concaténation d'une base de $\ker(u)$ et d'une base de $\operatorname{Im}(u)$.

Dans cette base, la matrice de $u$ est $\operatorname{diag}(0,1,1)$. Les matrices $A$ et $\Delta$ représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes : elles sont semblables.

*Pour tout vecteur $y$ de $\operatorname{Im}(u)$, on a $u(y) = y$.*

**4.** $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice de passage entre les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, convient.

En effet les formules de changement de bases nous donnent : $P^{-1}AP = \Delta$.

Corrigé

## Exercice 1.15

**1.** Le rang d'une matrice est invariant par opérations élémentaires :

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

La matrice $A$ est de rang 2. Ses deux premières colonnes ne sont pas colinéaires : elles forment une base de $\operatorname{Im}(A)$. On en déduit que :

*D'après le théorème du rang, $\ker(u)$ est de dimension 2.*

$$\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}\big((1,1,1),(1,2,3)\big).$$

▷ *Recherche de* $\ker(u)$ : agir sur les lignes de $A$ par opérations élémentaires équivaut à multiplier $A$ à gauche par des matrices d'opérations élémentaires. Il s'agit de matrices inversibles et donc :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ \qquad y - z - t = 0 \end{cases}.$$

On en déduit que :

$$(x,y,z,t) \in \ker(u) \iff \begin{cases} x = -2z - 3t \\ y = z + t \end{cases}.$$

*Ils correspondent aux choix $(z,t) = (1,0)$ et $(z,t) = (0,1)$.*

Les vecteurs $(-2,1,1,0)$ et $(-3,1,0,1)$ appartiennent à $\ker(u)$, ils sont linéairement indépendants. Puisque $\ker(u)$ est de dimension 2, ils forment une base de $\ker(u)$ :

$$\ker(u) = \operatorname{Vect}\big((-2,1,1,0),(-3,1,0,1)\big).$$

**2.** $B$ n'est pas la matrice nulle donc $\operatorname{rg}(B) \geqslant 1$. Toutes les colonnes de $B$ sont proportionnelles à $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ : $\operatorname{rg}(B) \leqslant 1$. Finalement, $\operatorname{rg}(B) = 1$ ; on en déduit que :

$$\operatorname{Im}(v) = \operatorname{Vect}\big((1,3)\big).$$

*D'après le théorème du rang, $ker(v)$ est de dimension 2.*

▷ *Recherche de* $\ker(v)$ *:*

$$(x,y,z) \in \ker(v) \iff x + by + cz = 0.$$

Les vecteurs $(-b,1,0)$ et $(-c,0,1)$ appartiennent à $\ker(v)$ et sont non colinéaires. Puisque $\ker(v)$ est de dimension 2, ils forment une base de $\ker(v)$ :

$$\ker(v) = \operatorname{Vect}\big((-b,1,0),(-c,0,1)\big).$$

**3.** Puisque $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(v)$ ont même dimension, on a :

$$\mathrm{Im}(u) = \ker(v) \iff \mathrm{Im}(u) \subset \ker(v) \iff v \circ u = 0.$$

✎ $\mathrm{Im}(u)$ *et* $\ker(v)$ *sont deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$.

Finalement : $\mathrm{Im}(u) = \ker(v) \iff BA = 0$.
On a :

$$BA = \begin{pmatrix} 1+b+c & 1+2b+3c & 1-c & 2+b \\ 3(1+b+c) & 3(1+2b+3c) & 3(1-c) & 3(2+b) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$BA = 0 \iff \begin{cases} 1+b+c=0 \\ 1+2b+3c=0 \\ 1-c=0 \\ 2+b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} c=1 \\ b=-2 \end{cases}.$$

## Exercice 1.16

**1.** Soit $u=(x,y)$, $v=(z,t)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ :

✎ $u+\lambda v = (x+\lambda z, y+\lambda t)$.

$$f(u+\lambda v) = \big(x+\lambda z+2(y+\lambda t), x+\lambda z-(y+\lambda t), x+\lambda z+y+\lambda t\big);$$

$$f(u+\lambda v) = (x+2y, x-y, x+y) + \lambda(z+2t, z-t, z+t).$$

Finalement, $f(u+\lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$ : l'application $f$ est linéaire.
**2.** On applique le théorème du rang :

$$2 = \dim\big(\ker(f)\big) + \mathrm{rg}(f).$$

Ainsi $\mathrm{rg}(f) < 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ : $f$ n'est pas surjective.
**3.** Notons $A$ la matrice de $f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

▷ Cette matrice est de rang 2 donc $\mathrm{Im}(f)$ est un plan. Il est engendré par les vecteurs $(1,1,1)$ et $(2,-1,1)$ ; il admet pour équation cartésienne :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 1 & -1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{soit} \qquad 2x+y-3z=0.$$

**4.** Le théorème du rang implique $\dim\big(\ker(f)\big) = 0$ : $f$ est injective.
**5.** On a $8+1-9=0$ donc $(4,1,3)$ appartient à l'image de $f$ : le premier système admet une unique solution.
▷ $8+3-3=8 \neq 0$, donc $(4,3,1)$ n'appartient pas à l'image de $f$ : le second système n'admet pas de solution.

✎ *$f$ étant injective, pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, l'équation $f(x,y) = (a,b,c)$ admet au plus une solution $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*

Corrigé

## Exercice 1.17

**1.** On sait que l'application $P \mapsto P(1)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ vers $\mathbb{R}$. Puisque $X(X-1) \in \mathbb{R}_3[X]$, l'application $P \mapsto P(1)X(X-1)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

*On justifie de même que $P \mapsto P(-1)X(X+1)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.*

▷ Ainsi $f$ est la somme de deux endomorphismes de $\mathbb{R}_3[X]$ : c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

**2.** Par construction, on a :

$$\forall P \in E, \qquad f(P) \in \text{Vect}\big(X(X-1), X(X+1)\big).$$

On en déduit que $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}\big(X(X-1), X(X+1)\big)$.

▷ Pour établir l'inclusion réciproque, il suffit de justifier que $X(X-1) \in \text{Im}(f)$ et que $X(X+1) \in \text{Im}(f)$.

Posons $P = X+1$, de sorte que $P(1) = 2$ et $P(-1) = 0$ ; ainsi :

$$f(P) = 2X(X-1) \qquad \text{soit} \qquad X(X-1) = f\left(\frac{P}{2}\right).$$

De même, en posant $Q = X-1$, on constate que :

$$f\left(-\frac{Q}{2}\right) = X(X+1).$$

Les polynômes $X(X-1)$ et $X(X+1)$ appartiennent à l'image de $f$ ; donc :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}\big(X(X-1), X(X+1)\big).$$

▷ Il reste à établir que ces deux polynômes forment une famille libre. Ils ne sont pas proportionnels car l'un s'annule en 1 et l'autre non : ils sont donc linéairement indépendants. La famille $\big(X(X-1), X(X+1)\big)$ est une famille de $\text{Im}(f)$ qui est libre et génératrice de $\text{Im}(f)$ : c'est une base de cet espace.

**3.** On applique le théorème du rang : $\ker(f)$ est de dimension 2.

Puisque $X^2-1$ et $X(X^2-1)$ s'annulent en 1 et en $-1$, on a :

$$f(X^2-1) = f\big(X(X^2-1)\big) = 0.$$

Ainsi la famille $\big(X^2-1, X(X^2-1)\big)$ est constituée de polynômes de degrés étagés, elle est donc libre. Ainsi la famille $\big(X^2-1, X(X^2-1)\big)$ est une famille de $\ker(f)$ de cardinal $2 = \dim\big(\ker(f)\big)$ : c'est une base de $\ker(f)$.

**4.** On sait, par le théorème du rang, que :

$$\dim(E) = \dim\big(\text{Im}(f)\big) + \dim\big(\ker(f)\big).$$

Il reste à établir que $\text{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$.

▷ Soit $P$ un polynôme appartenant à l'intersection $\text{Im}(f) \cap \ker(f)$.

On a :

$$P \in \text{Im}(f) \implies \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad P = \lambda X(X-1) + \mu X(X+1)$$

et

$$P \in \ker(f) \implies \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad P = aX^2 - 1 + bX(X^2-1) \implies P(1) = P(-1) = 0.$$

Puisque

$$P(1) = 2\mu \qquad \text{et} \qquad P(-1) = 2\lambda$$

on a $\lambda = \mu = 0$.
▷ On vient d'établir que $\operatorname{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$.
Finalement :

$$E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f).$$

**5.** On se place dans la base

$$\mathscr{B} = \big(X^2-1, X(X^2-1), X(X-1), X(X+1)\big).$$

On a

$$f(X^2-1) = f\big(X(X^2-1)\big) = 0$$

et

$$f(X(X-1)) = 2X(X+1), \quad f(X(X+1)) = 2X(X-1).$$

On en déduit que

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Exercice 1.18

**1.** ▷ Soit $x \in \ker(g)$, on a :

$$g\big(f(x)\big) = f\big(g(x)\big) = f(0) = 0.$$

Ainsi $f(x) \in \ker(g)$ et $\ker(g)$ est stable par $f$.
▷ Soit $y \in \operatorname{Im}(g)$, il existe un vecteur $x \in E$ tel que $y = g(x)$. On a : $f(y) = f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big)$. Ainsi $f(y) \in \operatorname{Im}(g)$ et $\operatorname{Im}(g)$ est stable par $f$.
**2.** Supposons que $\ker(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$ soient stables par $u$. Soit $x \in E$. On sait qu'il existe un unique couple $(y,z) \in \ker(p) \times \operatorname{Im}(p)$ tel que :

$$x = y + z. \qquad (*)$$

✎ *$p$ est un projecteur de $E$ donc :* $E = \ker(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$.

On rappelle que pour tout $z \in \operatorname{Im}(p)$ on a $p(z) = z$, ainsi :

$$u\big(p(x)\big) = u\big(p(z)\big) = u(z).$$

D'autre part, puisque $u(y) \in \ker(p)$ et $u(z) \in \operatorname{Im}(p)$, on a :

✎ *$u\big(\ker(p)\big) \subset \ker(p)$ et $u\big(\operatorname{Im}(p)\big) \subset \operatorname{Im}(p)$.*

$$p\big(u(x)\big) = p\big(u(y)\big) + p\big(u(z)\big) = u(z).$$

On vient de prouver que pour tout $x \in E$ : $u\big(p(x)\big) = p\big(u(x)\big)$ ; les endomorphismes $p$ et $u$ commutent.
La réciproque a été établie à la question précédente.

Corrigé

## Exercice 1.19

**1.** Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$, on a $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ ; ainsi $\mathrm{Im}(f)$ est stable par $f$.

**2.** ▷ Soit $x \in E$. On a :

$$x \in \ker(g) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \mathrm{Im}(f) \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) = 0.$$

Ainsi : $\ker(g) = \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f)$.

▷ *Montrons que* $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f^2)$.

▷ Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$. Il existe alors $x \in \mathrm{Im}(f)$ tel que $y = g(x) = f(x)$. Puisque $x \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $t \in E$ tel que $x = f(t)$ et ainsi $y = f^2(t) \in \mathrm{Im}(f^2)$.

▷ Soit $y \in \mathrm{Im}(f^2)$, il existe alors $x \in E$ tel que $y = f^2(x) = f\big(f(x)\big)$. Puisque $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, on a : $f\big(f(x)\big) = g\big(f(x)\big)$ et ainsi $y = g\big(f(x)\big) \in \mathrm{Im}(g)$.

Finalement, on vient d'établir par double inclusion que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f^2)$.

**3.** Puisque $E$ est de dimension finie, $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie. Le théorème du rang appliqué à $g$ nous donne :

$$\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(g)\big) + \dim\big(\ker(g)\big).$$

✎ *Rappel :* $\mathrm{rg}(f) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$.

De la question précédente, on déduit alors :

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2) + \dim\big(\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)\big).$$

**4.** ▷ (i) $\Longrightarrow$ (ii) – Puisque $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires, on sait que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. La question précédente implique alors que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$. Puisque $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$, on a bien $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

✎ *Si* $y \in \mathrm{Im}(f^2)$, *il existe* $x \in E$ *tel que* $y = f^2(x) = f(f(x))$ *et donc* $y \in \mathrm{Im}(f)$.

▷ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) – La linéarité de $f$ implique que

$$\forall x \in \ker(f), \qquad f^2(x) = f\big(f(x)\big) = f(0) = 0.$$

Ainsi : $\ker(f) \subset \ker(f^2)$. En appliquant le théorème du rang $f$ et à $f^2$, on a :

$$\dim\big(\ker(f)\big) + \mathrm{rg}(f) = \dim\big(\ker(f^2)\big) + \mathrm{rg}(f^2).$$

Puisque $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$, il vient : $\dim\big(\ker(f)\big) = \dim\big(\ker(f^2)\big)$, ce qui établit la propriété (iii).

✎ *On applique le* ***théorème 1.6***.

▷ (iii) $\Longrightarrow$ (i) – Le théorème du rang appliqué à $f$ nous donne :

$$\dim(E) = \dim\big(\ker(f)\big) + \mathrm{rg}(f).$$

✎ *Puisque* $\ker(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *sont des sous-espaces vectoriels de* $E$, *on a :* $0 \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

Montrons que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Soit $y \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ :

$$f(y) = 0 \quad \text{et} \quad \exists x \in E, \quad y = f(x).$$

On en déduit que $f^2(x) = 0$ et ainsi $x \in \ker(f^2)$. La propriété (iii) implique alors que $x \in \ker(f)$ et donc $f(x) = 0$. Finalement, $y = 0$ ; les espaces $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $E$.

## Exercice 1.20

**1.** On applique le théorème du rang :

$$\dim\big(\ker(f)\big) = \dim(E) - \operatorname{rg}(f) = n-1.$$

*On dit que* $\ker(f)$ *est un hyperplan de* $E$.

**2.** Soit $\Delta = \operatorname{Vect}(a)$ une droite supplémentaire de $\ker(f)$ dans $E$. On note $(e_1,\dots,e_{n-1})$ une base de $\ker(f)$. La famille $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_{n-1},a)$ est une base de $E$ adaptée à la décomposition $E = \ker(f) \oplus \Delta$. Si on désigne par $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ les coordonnées de $f(a)$ dans la base $\mathscr{B}$, on a :

*Voir au besoin la propriété (iv) du* ***théorème 1.6***.

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \alpha_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

On désigne par $A$ cette matrice. Puisque $\operatorname{Tr}(f) = \operatorname{Tr}(A)$, il vient $\alpha_n = \operatorname{Tr}(f)$. Puisque $\ker(f) \subset \ker(f^2)$, on a :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \quad f^2(e_i) = 0.$$

Par linéarité de $f$, il vient :

$$f^2(a) = f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i + \alpha_n a\right) = \alpha_n f(a).$$

On en déduit que :

*On peut également effectuer un produit matriciel et constater que* $A^2 = \alpha_n A$.

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f^2) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_n\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \alpha_n\alpha_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n^2 \end{pmatrix} = \alpha_n \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f).$$

Un endomorphisme est déterminé par sa matrice dans une base de $E$, donc $f^2 = \alpha_n f = \operatorname{Tr}(f) f$.

**3. a.** Notons $u$ un vecteur non nul appartenant à $\operatorname{Im}(f)$. Puisque $\operatorname{Im}(f)$ est de dimension 1, alors $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(u)$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, il existe $v_i \in \mathbb{R}$ tel que $f(e_i) = v_i u$. On désigne par $(u_1,\dots,u_n)$ les coordonnées de $u$ dans la base $\mathscr{B}$ et on pose $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Si on note $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \qquad C_i = v_i U.$$

On en déduit que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = UV^{\mathsf{T}}$.

**b.** Par définition de la trace d'un endomorphisme, et d'après les propriétés de l'application trace :

*Voir* ***proposition 1.14***

$$\operatorname{Tr}(f) = \operatorname{Tr}(UV^{\mathsf{T}}) = \operatorname{Tr}(V^{\mathsf{T}}U) = V^{\mathsf{T}}U$$

car $V^{\mathsf{T}}U$ est un réel.

Corrigé

## Exercice 1.21

**1.** Désignons par $(C_1, \dots, C_n)$ les colonnes de la matrice $E_{ij}$ : elles sont toutes nulles sauf la $j^{\text{ième}}$. Puisque $AE_{ij}$ est la matrice formée des colonnes $AC_1, \dots, AC_n$, seule la $j^{\text{ième}}$ est non nulle :

$$AE_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & AC_j & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

✎ $A = (a_{ij})$

D'autre part, tous les coefficients de $C_j$ sont nuls sauf le $i^{\text{ième}}$ et par conséquent $AC_j$ est la $i^{\text{ième}}$ colonne de $A$ :

$$AC_j = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}.$$

La trace d'une matrice est la somme des coefficients diagonaux de cette matrice et par conséquent :

$$\operatorname{Tr}(AE_{ij}) = \big(AC_j\big)_j = a_{ji}.$$

**2.** Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Pour $M = E_{ij}$, il vient d'après la question précédente :

✎ $B = (b_{ij})$

$$a_{ji} = b_{ji}.$$

Les matrices $A$ et $B$ ont les mêmes coefficients, elles sont égales.

**3. a.** L'application trace est linéaire donc $\varphi_A$ l'est.

**b.** ▷ Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour toute matrice $M$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a par linéarité de la trace :

$$\varphi_{A+\lambda B}(M) = \operatorname{Tr}\big((A + \lambda B)M\big) = \operatorname{Tr}(AM) + \lambda \operatorname{Tr}(BM) = \big(\varphi_A + \lambda\varphi_B\big)(M).$$

On en déduit donc que $\varphi_{A+\lambda B} = \varphi_A + \lambda\varphi_B$ ; l'application $\varphi$ est linéaire.

▷ Puisque $\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \dim\big(\mathcal{L}\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\big)\big)$, pour montrer que $\varphi$ est isomorphisme il suffit de prouver que $\varphi$ est injectif. Soit $A \in \ker(\varphi)$. Pour toute matrice $M$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ on a : $\operatorname{Tr}(AM) = 0$. De la question précédente, on déduit alors que $A = 0$.

✎ *On applique la question précédente avec $B = 0$.*

▷ $\varphi$ est un isomorphisme.

## Exercice 1.22

**1.** ▷ Soit $M$ et $N$ deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\lambda$ un réel. On a, d'après les propriétés de la multiplication matricielle :

$$f(M + \lambda N) = A\big(M + \lambda N\big)B = AMB + \lambda ANB = f(M) + \lambda f(N).$$

L'application $f$ est linéaire.

▷ Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, puisque $A$ et $B$ sont des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, alors $f(M)$ appartient à $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ : $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est stable par $f$.

Finalement, $f$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

**2.** Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, que l'on note $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. On a :

$$f(M) = (AM)B = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ x+z & y+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = (x+z-y-t)A.$$

Notons $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(M)) = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

✎ *On a :* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(M) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

On en déduit que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**3.** ▷ On constate que $\mathrm{rg}(f) = 1$, en effet toutes les colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ sont proportionnelles à la première et non toutes nulles. Ainsi,

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(E_{11})\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}(A).$$

✎ *Du théorème du rang, on déduit que* $\ker(f)$ *est de dimension* 3.

▷ Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, que l'on note $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. On a, d'après les calculs effectués à la question 2 :

$$M \in \ker(f) \iff f(M) = 0 \iff x + z - y - t = 0.$$

Ainsi $\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x & x+z-t \\ z & t \end{pmatrix} \ ; \ (x,z,t) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ et par conséquent

$$\ker(f) = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

La famille $\left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ engendre $\ker(f)$, espace vectoriel de dimension 3 : c'est donc une base de cet espace.

**4.** On sait que

$$\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right) = 0.$$

## Exercice 1.23

**1.** $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est stable par $u$. Puisque l'application Tr est linéaire, $u$ l'est également.
Finalement $u$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

✎ *$u(A)$ est une somme de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

Corrigé

✎ *Puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, on sait que $u$ est bijectif si et seulement s'il est injectif.*

**2.** Soit $A \in \ker(u)$. On a donc $\operatorname{Tr}\big(u(A)\big) = 0$, or par linéarité de l'application Tr, on a :

$$\operatorname{Tr}\big(u(A)\big) = \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(A)\operatorname{Tr}(I_n) = (n+1)\operatorname{Tr}(A).$$

Ainsi $\operatorname{Tr}(A) = 0$, or $A + \operatorname{Tr}(A)I_n = 0$ et par conséquent $A = 0$.
Finalement : $\ker(u) = \big\{0\big\}$.
L'application $u$ est un endomorphisme injectif d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, il est donc bijectif.

✎ $u(I_n) = (n+1)I_n$.

**3.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a par linéarité de $u$ :

$$\begin{aligned} u^2(A) &= u(A) + \operatorname{Tr}(A)u(I_n) \\ &= A + (n+2)\operatorname{Tr}(A)I_n \\ &= A + (n+2)\big(u(A) - A\big) \\ &= (n+2)u(A) - (n+1)A. \end{aligned}$$

On en déduit que pour toute matrice $A$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ :

$$\big(u^2 - (n+2)u + (n+1)\operatorname{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\big)(A) = 0$$

et donc que $u^2 - (n+2)u + (n+1)\operatorname{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} = 0$.

**4.** On vient de prouver que $u^2 - (n+2)u + (n+1)\operatorname{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} = 0$ ce qui s'écrit sous la forme :

$$u \circ \frac{(n+2)\operatorname{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} - u}{n+1} = \operatorname{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}.$$

Et par conséquent on a :

$$u^{-1} = \frac{(n+2)\operatorname{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} - u}{n+1}$$

**5. a.** On a : $u(E_{11}) = E_{11} + I_2$, $u(E_{12}) = E_{12}$, $u(E_{21}) = E_{21}$ et $u(E_{22}) = E_{22} + I_2$. Puisque $I_2 = E_{11} + E_{22}$, la matrice de $u$ dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**b.** Cette matrice est inversible puisque c'est la matrice d'un isomorphisme. De plus, on a prouvé que

✎ *On a :* $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u^{-1}) = M^{-1}$.

$$M^{-1} = \frac{4I_4 - M}{3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

## Exercice 1.24

**1.** Désignons par $L_i(A)$ les lignes de la matrice $A$ :

$$F_1(a,b)A = \begin{pmatrix} L_1(A) \\ aL_1(A)+L_2(A) \\ bL_1(A)+L_3(A) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad F_2(c)A = \begin{pmatrix} L_1(A) \\ L_2(A) \\ cL_2(A)+L_3(A) \end{pmatrix}.$$

**2.** Des calculs précédents, on déduit que :

$$F_1(a,b)F_1(-a,-b) = I_3 \qquad \text{et} \qquad F_2(c)F_2(-c) = I_3.$$

Les matrices $F_1(a,b)$ et $F_2(c)$ sont inversibles d'inverse respectif $F_1(-a,-b)$, $F_2(-c)$.

**3. a.** On a, par opérations élémentaires

$$F_1(-4,-7)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \end{matrix}$$

$$F_2(-2)F_1(-4,-7)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

**b.** Posons $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, l'égalité précédente peut encore s'écrire :

$$A = F_1(4,7)F_2(2)U.$$

*Les matrices $F_2(-2)$ et $F_1(-4,-7)$ sont inversibles, d'inverse respectif $F_2(2)$ et $F_1(4,7)$.*

On effectue le produit $F_1(4,7)F_2(2)$ en utilisant la première question et on obtient :

$$F_1(4,7)F_2(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En notant $L$ cette matrice, on vient d'obtenir $A = LU$.

**c.** Notons $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a :

$$AX = W \iff LUX = W \iff \begin{cases} UX = Y \\ LY = W \end{cases}.$$

Il nous reste à résoudre deux systèmes triangulaires : $LY = W$, puis $UX = Y$.

$$L\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = W \iff \begin{cases} a = 1 \\ 4a+b = 1 \\ 7a+2b+c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \end{cases}.$$

$$UX = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x+2y+3z = 1 \\ -3y-6z = -3 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ y = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

$(-1,1,0)$ est l'unique solution de l'équation $AX = W$.

Corrigé