

Margarita Cabrera - Javier Rodriguez
Juan A. Fernandez - Jaume Riba

Comunicaciones II

Ejercicios resueltos

Margarita Cabrera - Javier Rodriguez
Juan A. Fernandez - Jaume Riba

Comunicaciones II

Ejercicios resueltos

Primera edición: septiembre de 2005

Diseño de la cubierta: Jordi Calvet

© Los autores, 2005
© Edicions UPC, 2005
Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL
Jordi Girona, 31, 08034 Barcelona
Tel.: 934 016 883 Fax: 934 015 885
Edicions Virtuals: www.edicionsupc.es
e-mail: edicions-upc@upc.edu

ISBN: 84-8301-825-X

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, así como la exportación e importación de ejemplares para su distribución y venta fuera del ámbito de la Unión Europea.

ÍNDICE

1	INTRODUCCIÓN	5
2	MODULACIONES DIGITALES SOBRE CANALES AWGN	7
2.1	Ejercicio de examen de control noviembre 2002 (M. Cabrera).....	7
2.1.1	Enunciado	7
2.1.2	Resolución	8
2.2	Ejercicio de examen de control noviembre 2003 (M. Cabrera).....	11
2.2.1	Enunciado	11
2.2.2	Resolución	13
2.3	Ejercicio de examen de control noviembre 2001 (M. Cabrera).....	18
2.3.1	Enunciado	18
2.3.2	Resolución	21
2.4	Ejercicio de examen de control octubre 2004 (J. Rodríguez Fonollosa)	28
2.4.1	Enunciado	28
2.4.2	Resolución:	30
2.5	Ejercicio de examen final enero 2005 (M. Cabrera).....	33
2.5.1	Enunciado	33
2.5.2	Resolución	35
2.6	Ejercicio de control abril 2001 (J. Riba).....	41
2.6.1	Enunciado	41
2.6.2	Resolución	42
2.7	Ejercicio de control abril 2004 (J. Riba).....	48
2.7.1	Enunciado	48
2.7.2	Resolución	50
2.8	Ejercicio 1 de control abril 2005 (J. Riba).....	57
2.8.1	Enunciado	57
2.8.2	Resolución abreviada.....	58
2.9	Ejercicio 2 de control abril 2005 (J. Riba).....	59
2.9.1	Enunciado	59
2.9.2	Resolución abreviada.....	61
3	MODULACIONES DIGITALES SOBRE CANALES NO IDEALES	63
3.1	Ejercicio de examen de control abril 2004 (J. Rodríguez Fonollosa).....	63
3.1.1	Enunciado	63
3.1.2	Resolución	66
3.2	Ejercicio de examen de control noviembre 2002 (M. Cabrera).....	72
3.2.1	Enunciado	72
3.2.2	Resolución	74
3.3	Ejercicio de examen de control noviembre 2004 (M. Cabrera).....	79
3.3.1	Enunciado	79
3.3.2	Resolución	81
3.4	Ejercicio de examen de control abril 2002 (J. Riba).....	86
3.4.1	Enunciado	86
3.4.2	Resolución	88
3.5	Ejercicio de examen de control noviembre 2004 (J. Rodríguez Fonollosa)	92
3.5.1	Enunciado	92
3.5.2	Resolución:	94
3.6	Ejercicio de Examen de control Noviembre 2000 (J. Fernández-Rubio)	99
3.6.1	Enunciado	99

3.6.2	Resolución	101
3.7	Ejercicio de examen de control noviembre 2003 (J. Fernández-Rubio).....	108
3.7.1	Enunciado	108
3.7.2	Resolución	110
4	MODULACIONES PASO-BANDA	117
4.1	Ejercicio 2 de examen final de T03 (M. Cabrera)	117
4.1.1	Enunciado	117
4.1.2	Resolución	119
5	MODULACIONES AVANZADAS	127
5.1	Ejercicio enero 2001 examen final (M. Cabrera).....	127
5.1.1	Enunciado	127
5.1.2	Resolución	129
5.2	Ejercicio enero 2003 examen final (M. Cabrera).....	134
5.2.1	Enunciado	134
5.2.2	Resolución	137
5.3	Ejercicio junio 2004 examen final (J Rodríguez Fonollosa).....	144
5.3.1	Enunciado	144
5.3.2	Resolución	147
5.4	Ejercicio enero 2005 examen final (J Rodríguez Fonollosa).....	152
5.4.1	Enunciado	152
5.4.2	Resolución	154

1 INTRODUCCIÓN

Este documento constituye una recopilación de problemas de examen de la asignatura ‘Comunicacions 2’ (COM2, Estudis d’Enginyeria de Telecomunicacions, ETSETB) resueltos por profesores de la asignatura.

Los problemas se han organizado por temas, presentando para cada uno de ellos el enunciado completo y posteriormente la resolución desglosada por apartados. Algunas de las resoluciones incluyen resultados de simulaciones y desarrollos con mayor grado de detalle del exigido en el correspondiente examen, tal como se indica en cada apartado. Por otro lado, de otros ejercicios solo se presenta el resultado final, sin todo el desarrollo necesario para llegar a él.

Al publicar esta colección para hacerla accesible a los alumnos matriculados en COM2, los profesores que hemos participado recomendamos que se consulte siempre como un material adicional de segunda instancia. Creemos que es muy importante el esfuerzo personal que cada alumno debe dedicar para intentar resolver de forma individual cada uno de los ejercicios como etapa previa a la consulta de las resoluciones. La resolución de los problemas debería hacerse de forma gradual tras la asistencia y seguimiento de las clases presenciales y posterior estudio de la teoría.

Es importante “pensar durante un buen rato” cuál debe ser la resolución y resolverla de forma completa. Aprenderéis mucho más al observar vuestros propios errores en la comparación con la resolución que si consultáis directamente la resolución de los ejercicios sin dedicar el tiempo necesario para resolverlos.

Con el deseo por tanto, de que os sea de utilidad, también os animo a que nos hagáis llegar vuestros comentarios, dudas, sugerencias, etc.. a los autores, bien de forma individualizada o centralizada:

Margarita Cabrera
UPC-Campus Nord D5
Marga.cabrera@upc.edu

Septiembre 2005

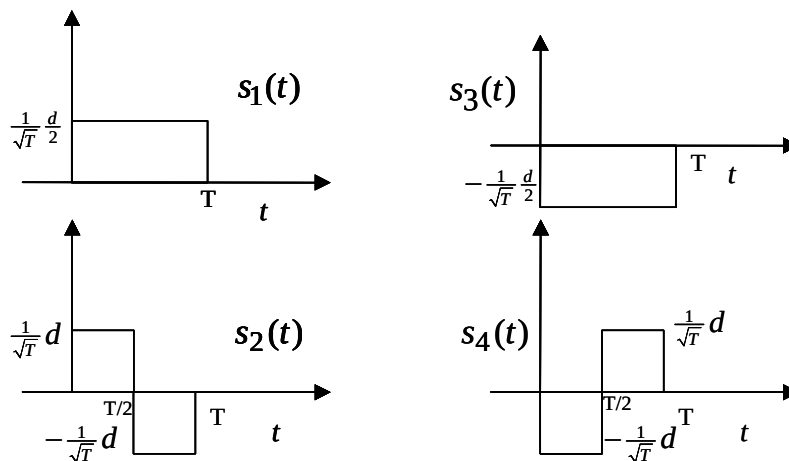
2 MODULACIONES DIGITALES SOBRE CANALES AWGN

2.1 Ejercicio de examen de control noviembre 2002 (M. Cabrera)

2.1.1 Enunciado

Sea el conjunto de 4 señales de la figura.

Bits	Señal
10	$s_1(t)$
11	$s_2(t)$
01	$s_3(t)$
00	$s_4(t)$



Se propone su descomposición mediante la base de funciones ortonormales:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right); \varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/4}{T/2}\right) - \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-3T/4}{T/2}\right)$$

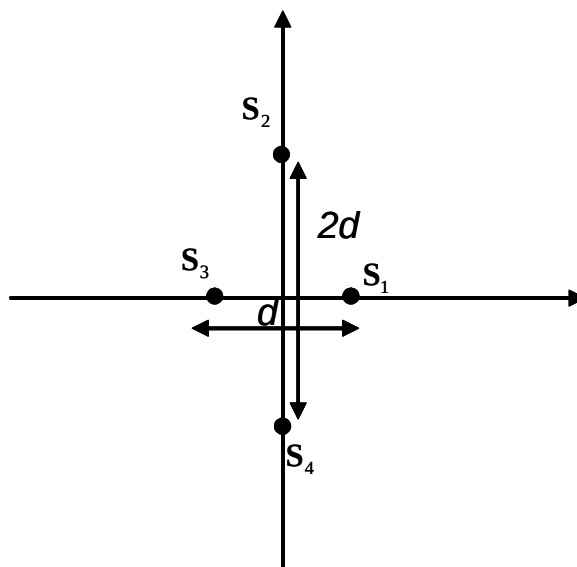
La base se utiliza para transmitir una secuencia de bits equiprobables y estadísticamente independientes entre sí: 2 bits por señal o símbolo según la tabla adjunta. Considere canal ideal y ruido $w(t)$ blanco gaussiano de media nula y densidad espectral $\frac{N_0}{2}$; $N_0 = \frac{1}{18} d^2$.

- Calcule las coordenadas del conjunto de señales sobre la base y dibuje el mapa de señal.
- Calcule la energía media de bit: E_b en función del parámetro d . ¿Cuánto vale la $\frac{E_b}{N_0}$?
- Aplique el criterio MAP para obtener las cuatro regiones de decisión óptimas y dibújelas.
- Comente las dificultades para obtener la probabilidad de error de forma exacta.
- Calcule una cota superior para la probabilidad de error. Para ello consulte la gráfica siguiente.

2.1.2 Resolución

- a) Calcule las coordenadas del conjunto de señales sobre la base y dibuje el mapa de señal.

Solución:



$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{s}_1$$

$$\mathbf{s}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -d \end{pmatrix} = -\mathbf{s}_2$$

- b) Calcule la energía media de bit: E_b en función del parámetro d . ¿Cuánto vale la $\frac{E_b}{N_0}$?

Solución:

Energía media de símbolo: $\hat{E}_m = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (\alpha_m)^2 = \frac{5}{8} d^2$

Energía media de bit: $E_b = \frac{\hat{E}_m}{b} = \frac{5}{16} d^2$

Cociente $\frac{E_b}{N_0} = \frac{\frac{5}{16} d^2}{\frac{d^2}{18}} = \frac{45}{8}$; 7,5 dB

c) Aplique el criterio MAP para obtener las cuatro regiones de decisión óptimas y dibújelas.

Solución:

$$\hat{s}_{m \text{ MAP}} = \max_{s_m} (\Pr(s_m / \mathbf{y})) = \max_{s_m} \left(-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2}{N_0} + \ln(\Pr(s_m)) \right)$$

En este caso, debido a la equiprobabilidad de los símbolos:

$$\hat{s}_{\text{MAP}} = \max_{s_m} \left(-\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2 \right) = \max_{s_m} (\mathbf{y} \cdot \mathbf{s}_m - \frac{1}{2} E_m)$$

Así, al desarrollar los límites entre los diferentes símbolos se tiene:

Límite entre Zona 1 y Zona 2:

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{s}_1 - \frac{1}{2} E_1 = y_1 \frac{d}{2} - \frac{1}{2} \frac{d^2}{4} \begin{matrix} >_{s_1} \\ <_{s_2} \end{matrix} y_2 d - \frac{1}{2} d^2 = \mathbf{y} \cdot \mathbf{s}_2 - \frac{1}{2} E_2 \quad y_2 \begin{matrix} >_{s_2} \\ <_{s_1} \end{matrix} \frac{y_1}{2} + \frac{3}{8} d$$

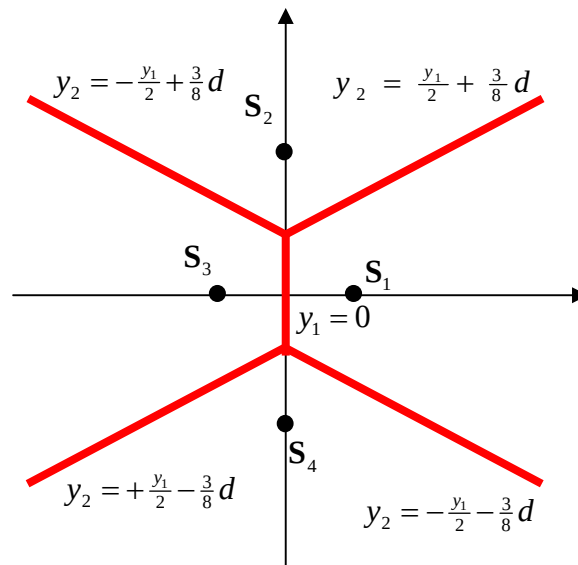
Operando de modo análogo y debido a las simetrías del espacio de señal:

Límite entre Zona 2 y Zona 3: $y_2 \begin{matrix} >_{s_2} \\ <_{s_3} \end{matrix} -\frac{y_1}{2} + \frac{3}{8} d$

Límite entre Zona 3 y Zona 4: $y_2 \begin{matrix} >_{s_3} \\ <_{s_4} \end{matrix} \frac{y_1}{2} - \frac{3}{8} d$

Límite entre Zona 1 y Zona 4: $y_2 \begin{matrix} >_{s_1} \\ <_{s_4} \end{matrix} -\frac{y_1}{2} - \frac{3}{8} d$

Límite entre Zona 1 y Zona 34: $y_1 \begin{matrix} >_{s_1} \\ <_{s_3} \end{matrix} 0$



d) Comente las dificultades para obtener la probabilidad de error de forma exacta.

Solución:

El problema en el cálculo de la probabilidad de error radica en que las líneas que separan las zonas de decisión, en general, no son paralelas y/o perpendiculares a los ejes de coordenadas. Aun con giro de ejes, no se consigue dicha característica.

Así por ejemplo, si se calcula la probabilidad de error parcial condicionada al símbolo S_1 , de forma exacta se plantearía como:

$$P_r(e/S_1) = 1 - P_r(S_1/S_1)$$

$$P_r(S_1/S_1) = \int_0^{\infty} \int_{-\frac{y_1}{2} - \frac{3}{8}d}^{\frac{y_1}{2} + \frac{3}{8}d} f_{y_1}(y_1/S_1) f_{y_2}(y_2/S_1) dy_2 dy_1$$

$$f_{y_1}(y_1/S_1) = f_{\beta_1}(y_1 - \frac{d}{2}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{1}{N_0}\left(y_1 - \frac{d}{2}\right)^2\right)$$

$$f_{y_2}(y_2/S_1) = f_{\beta_2}(y_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{1}{N_0}(y_2)^2\right)$$

e) Calcule una cota superior para la probabilidad de error. Para ello consulte la gráfica siguiente.

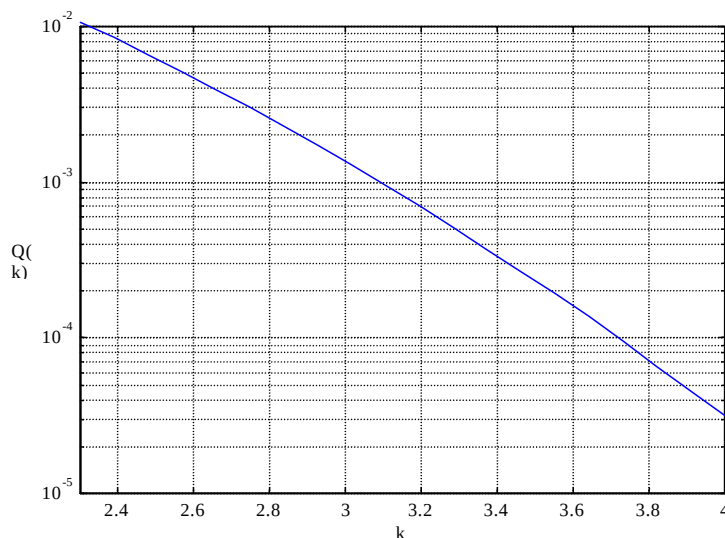
Solución:

Debido a la equiprobabilidad de los símbolos, se aplicará la siguiente cota: $BER \leq \frac{(M-1)}{b} Q\left(\frac{d_{\min}}{\sigma}\right)$, donde $d_{\min}$ corresponde a la distancia mínima entre dos símbolos y $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$.

En el presente ejemplo se tiene $d_{\min} = d$. Además es fácil de comprobar que $\frac{d}{2}$ es menor o igual que la mínima distancia entre un símbolo cualquiera y el límite de su región de decisión.

$$\text{Por tanto } \left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right)^2 = \frac{d^2}{2N_0} = \frac{\frac{16}{5}E_b}{2N_0} = \frac{8E_b}{5N_0} = 9$$

$$BER \leq \frac{3}{2} Q(3) \cong 2.25 \cdot 10^{-3}$$



2.2 Ejercicio de examen de control noviembre 2003 (M. Cabrera)

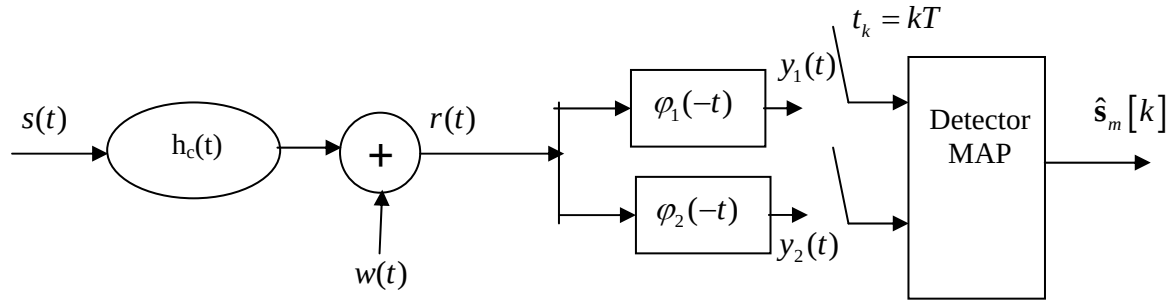
2.2.1 Enunciado

Considere el espacio de señal de $M = 4$ señales equiprobables y dimensión $L = 2$. Los 4 vectores referidos a la base ortonormal $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$ son: $\mathbf{s}_1 = -\mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} \frac{d}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{s}_2 = -\mathbf{s}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. De las funciones de la base se conocen sus funciones de autocorrelación:

$$R_{\varphi_1}(\tau) = R_{\varphi_2}(\tau) = p_{RC}(\tau)_{100\%} = \frac{\text{sinc}(2r\tau)}{1 - (2r\tau)^2} \quad R_{\varphi_1\varphi_2}(\tau) = R_{\varphi_2\varphi_1}(\tau) = \text{sen}^2(\pi r\tau) p_{RC}(\tau)_{100\%}$$

Donde $p_{RC}(\tau)_{100\%}$ es la función *raised cosinus* o *pulso de Nyquist 100% roll-off*.

La señal modulada $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^2 \alpha_l[n] \varphi_l(t - nT)$ se transmite por una canal ideal $h_c(t) = \delta(t)$ y se recibe según el receptor de la figura:



donde la señal de ruido es de media nula, estacionaria, gaussiana e incorrelada con la señal útil. Su función de autocorrelación es: $R_w(\tau) = \frac{N_0}{2} \left((1 - \rho) \delta(\tau) + \rho \delta\left(\tau - \frac{T}{2}\right) + \rho \delta\left(\tau + \frac{T}{2}\right) \right)$

Se pide:

- a) Ancho de banda de la señal transmitida, es decir, ancho de banda de las funciones de la base. Dibuje la densidad espectral de las funciones transmitidas: $S_{\varphi_1}(f) = S_{\varphi_2}(f)$. No es necesario que escriba su expresión analítica.

- b) Demuestre que el vector de señal detectado se halla libre de ISI.

- c) Calcule la matriz de covarianza $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} E[\beta_1^2(t_k)] & E[\beta_1(t_k)\beta_2(t_k)] \\ E[\beta_2(t_k)\beta_1(t_k)] & E[\beta_2^2(t_k)] \end{pmatrix}$ del vector de

ruido $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \beta_1(t_k) \\ \beta_2(t_k) \end{pmatrix}$ a la entrada del detector MAP en función de N_0, ρ .

En estas condiciones la f.d.p. del vector de ruido es $f_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\mathbf{C}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{n}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{n}\right)$

- d) Justifique que el criterio MAP $\mathbf{s}_{MAP} = \max_{\mathbf{s}_m} \{\Pr\{\mathbf{s}_m / \mathbf{y}\}\}$ para símbolos equiprobables consiste en detectar:

$$\mathbf{s}_{MAP} = \min_m \left\{ (\mathbf{y} - \mathbf{s}_m)^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{s}_m) \right\}$$

- e) Desarrolle el criterio MAP a partir de la expresión anterior para obtener las 4 regiones de decisión y dibújelas sobre el espacio de señal. Aplique todas las simetrías que considere útiles.
- f) Obtenga una cota superior para la probabilidad de error, en función del cociente $\frac{E_b}{N_0}$.

Nota:

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(-t); \varphi_2(t) = \varphi_2(-t), \quad p_{RC100\%}\left(\frac{T}{2}\right) = p_{RC100\%}\left(-\frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

2.2.2 Resolución

- a) Ancho de banda de la señal transmitida, es decir, ancho de banda de las funciones de la base. Dibuje la densidad espectral de las funciones transmitidas: $S_{\varphi_1}(f) = S_{\varphi_2}(f)$. No es necesario que escriba su expresión analítica.

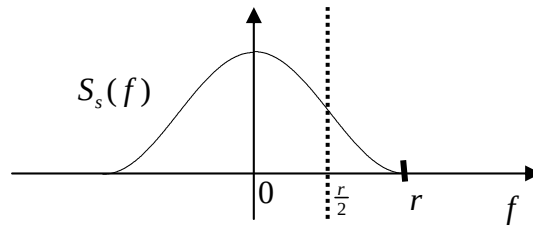
Solución:

Dado que es una modulación codificada sin memoria y además las dos secuencias de coordenadas son de media nula y estadísticamente independientes entre sí, la densidad espectral de $s(t)$ es directamente proporcional a $S_{\varphi_1}(f), S_{\varphi_2}(f)$:

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \left(C_{\alpha_1}[0] |\Phi_1(f)|^2 + C_{\alpha_2}[0] |\Phi_2(f)|^2 \right) = \frac{d^2}{2T} \frac{1}{r} \cos^2\left(\frac{\pi}{2r} f\right) \Pi\left(\frac{f}{2r}\right) = E_b \cos^2\left(\frac{\pi}{2r} f\right) \Pi\left(\frac{f}{2r}\right)$$

El ancho de banda es $B_T = \frac{r}{2} + \beta = \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$

En el dibujo de la densidad espectral es de destacar la simetría vestigial respecto a $\frac{r}{2}$.



- b) Demuestre que el vector de señal detectado se halla libre de ISI.

Solución:

La primera coordenada del vector detectado es

$$y_1(t) = s(t) * \varphi_1(-t) + w(t) * \varphi_1(-t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^2 \alpha_l[n] R_{\varphi_l \varphi_1}(t - nT) + \beta_1(t) \Rightarrow$$

$$y_1(t_k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^2 \alpha_l[n] R_{\varphi_l \varphi_1}((k-n)T) + \beta_1(t_k) = \alpha_1[k] + \beta_1(t_k)$$

Donde se ha utilizado la condición: $R_{\varphi_l \varphi_j}((k-n)T) = \delta[k-n] \delta[l-j]$

Análogamente se demuestra:

$$y_2(t_k) = \alpha_2[k] + \beta_2(t_k)$$